高等数学

——全国高等农林专科统编教材

杨正辉 主编

高等教育出版社

全国高等农林专科统编教材

高等数学

农学类专业用

杨正辉　主编

高等教育出版社

（京）112号

本书是在全国高等农林专科基础课程教材委员会的统一组织下，根据全国高等农林专科教育研究协作组所制订的《高等数学课程教学基本要求》编写的。主要内容包括一元函数、二元函数微积分，微分方程等，同时也介绍了概率论和数理统计的基本知识。

本书可作为农学类学校高等数学教材，也可供广大农业技术工作者参考。

全国高等农林专科统编教材

高 等 数 学

农学类专业用

杨正辉　主编

•

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

三河科教印刷厂印装

•

开本 850×1168 1/32　印张 16　字数 410 000

1992年5月第1版　1992年5月第1次印刷

印数0001—4017

ISBN7-04-003633-9/O·1087

定价4.95元

主　编	杨正辉	副教授	(张家口农业专科学校)
副主编	林晴炎	副教授	(厦门水产学院)
编　者	朱振清	副教授	(熊岳农业专科学校)
	曾敬发	讲　师	(湛江农业专科学校)
	吴坤明	副教授	(苏州蚕桑专科学校)
	王永坤	讲　师	(河北农业技术师范学院)
审稿人	金子瑜	教　授	(主审，河北农业大学)
	陈伟侯	副教授	(参审，北京农业大学)

出版说明

高等农林专科教育是高等农林教育体系中一个相对独立、不可缺少的层次。

我国高等农林专科教育，自进入80年代以来，有了长足发展，在校人数迅速增加，为适应发展的需要，改变教学多年来一直借用本科教材的局面，建设具有农林专科教育特色的教材体系，经国家教委批准，于1986年7月成立全国高等农林专科基础课程教材委员会，并在全国高等农林专科教育研究协作组制定的农林专科生培养基本规格和部分专业教学计划以及课程教学基本要求的基础上，首批组织统编了49门教材。

本批教材力求体现农林专科生培养基本要求，突出应用性，加强实践性，强调针对性，注意灵活性；遵循教学规律，具有科学性、系统性，由浅入深，循序渐进，理论联系实际；既具有广泛的适应性，又具有先进性和时代特征。

这批教材在适用农林专科教育的修业年限上，兼顾了二、三年制的需要，同时可供电大、函授等专科教育和中等专业学校教师，以及有关科技人员参考。

这批教材的编审出版是在国家教委高教司直接领导下进行的，并得到农业出版社、高等教育出版社、中国林业出版社，四川科学技术出版社、广西科学技术出版社的通力合作与大力支持，在此深致谢意。

本教材的编审出版，不仅是为了解决部分课程教学所用教材的有无问题，而更重要的是在新的历史条件下，为建设具有高等农林专科教育特色的教材体系探索路子，试图提供一些有益的尝试，故缺点错误在所难免，恳望各校在使用过程中提出宝贵意

见，以便再版时作进一步修改。

全国高等农林专科基础课程教材委员会

1990年

前　言

本书是在全国高等农林专科基础课程教材委员会的统一组织下，根据全国高等农林专科教育研究协作组所制订的《高等数学课程教学基本要求》编写的。

书中主要包括一元函数、二元函数微积分；微分方程等内容。同时，为进一步学习《生物统计》课程打下必要的基础，简要介绍了概率论与数理统计等基本知识，这些内容，都是农林专业的技术人员和管理人员所必须掌握的数学基础知识。

本书根据农林专科教育的特点，努力贯彻理论联系实际的原则，力求从实际背景出发引进概念。对于数学中的某些理论，不作过多的严格论证，以求叙述精炼、通俗易懂、便于自学。这是一本适合我国当前农林专科培养目标要求的数学教材，也可作为广大农业技术工作者的数学参考书。

书中的插图由张家口农业专科学校的李庆忠同志提供；金子瑜教授、陈伟侯副教授审阅了全稿，提出了许多宝贵意见；朱鋐道副教授对书稿进行了校订，在此表示谢意！

由于水平所限，书中缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　函数与极限

高等数学以变量为研究对象，而变量之间往往存在相互依赖的关系，这种依赖关系就是所谓的函数关系。极限方法则是研究变量的基本方法。本章将介绍变量、函数、极限和函数连续性的基本概念，以及它们的简单性质。

§1.1　集合、常量与变量

一、集合

数学中把具有某种特定性质的事物的全体称为集合。例如一个试区中所有的作物植株，一个牧区的所有羊只，自然数全体，实数全体等等，都可以组成一个集合。集合中的每一个事物称为该集合的元素。对于一个集合M来说，如果事物a是M的元素，就说a属于M，记作$a \in M$；如果事物a不是集合M的元素，就说a不属于M，记作$a \notin M$。

如果一个集合由有限个元素组成，如由元素a_1，a_2，…，a_n组成集合A，则集合A可记作

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

如果一个集合A由具有某种特定性质的元素x组成，则集合A可记作

$$A = \{x \mid x\text{所具有的特性}\}.$$

例如，xOy平面上与原点距离为1的所有点组成的集合A，则记作

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

每个元素都是数的集合，称为数集。例如，全体自然数的集合记作N，全体整数的集合记作Z，全体实数的集合记作R等，

就都是数集．以后用到的集合主要是数集．如果集合A的每个元素都属于集合B，即，若$x\in A$，则必有$x\in B$，就说A是B的子集合（简称子集），记作$A\subset B$（读作A包含于B）或$B\supset A$（读作B包含A）。例如，$N\subset Z$，$Z\subset R$。

如果$A\subset B$，且$B\subset A$，就称A与B相等，记作$A=B$。例如，

$$A=\{2,\ 3\},\quad B=\{x \mid x^2-5x+6=0\},$$

则$A=B$。

不含任何元素的集合称为空集，记作ϕ。

区间是一种常用的数集，设实数a与b，且$a<b$，数集$\{x \mid a<x<b\}$称为开区间，记作$(a,\ b)$，即

$$(a,\ b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

a和b称为开区间的端点，并且$a\notin(a,\ b)$，$a\notin(a,\ b)$。数集$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间，记作$[a,\ b]$，即

$$[a,\ b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\},$$

a和b也称为闭区间的端点，并且$a\in[a,\ b]$，$b\in[a,\ b]$。

类似地，可以说明

$$[a,\ b)=\{x \mid a\leqslant x<b\},$$

$$(a,\ b]=\{x \mid a<x\leqslant b\},$$

这里$[a,\ b)$和$(a,\ b]$都称为半开区间。

上述区间是有限区间，数$a-b$称作区间的长度．除有限区间外，还有无限区间，例如

$$[a,\ +\infty)=\{x \mid a\leqslant x<+\infty\},$$

$$(-\infty,\ b]=\{x \mid -\infty<x\leqslant b\}\text{等等},$$

这里$-\infty$，$+\infty$分别读作“负无穷”和“正无穷”，它们不是数，仅仅是记号。

区间在数轴上表示出来，如图1-1所示。

全体实数的集合R也可记作$(-\infty,\ +\infty)$。

邻域也是经常用到的概念．设a与δ是两个实数，且$\delta>0$，数集

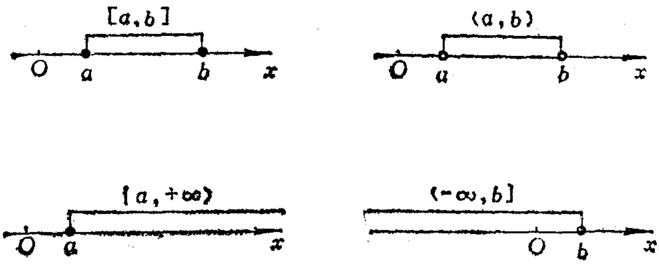

图 1-1

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

称为点a的δ邻域，记作$U(a,\ \delta)$，点a叫做邻域的中心，δ叫做邻域的半径。

因为$|x-a|<\delta$相当于

$$-\delta<x-a<\delta \qquad 即 a-\delta<x<a+\delta,$$

所以 $\quad U(a,\ \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$，

或 $\quad U(a,\ \delta)=(a-\delta,\ a+\delta)$。

由此看出，$U(a,\ \delta)$是以点a为中心，长度为2δ的开区间，如图1-2。

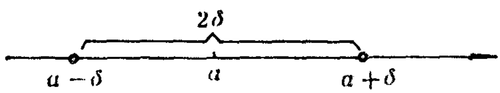

图 1-2

今后用到的邻域，有时需要把邻域的中心a去掉，点a的δ邻域去掉中心a后，称为点a的去心δ邻域，记作$U(\hat{a},\ \delta)$，即

$$U(\hat{a},\ \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

这里$0<|x-a|$就表示$x\neq a$。

二、常量与变量

我们观察或研究某种自然现象或技术过程中，常常遇到各种

不同的量，其中有的量在整个现象或过程中不起变化，即保持一定的数值，这种量叫做常量；而有些量在过程中是变化的，也就是可取不同的数值，这种量叫做变量.

例如，我们选定了一块试验田，它的面积就是常量，而这块试验田每年的产量则是变量.

一个量是常量还是变量，都是在某一确定的现象或过程中说的. 有时，同一个量在某种情况下是常量，而在另外一种情况下，则是变量.

例如重力加速度，在同一个地区来说，它是常量，但在地球上不同的地区来说，它是变量，因为在地球上不同的地方，如两极与赤道的重力加速度不同.

常量通常用字母a、b、c等表示，变量通常用字母x、y、t等表示.

常量可以看成是取同一数值的变量，即常量可看作变量的特殊情况.

§1.2 函数的概念

一、函数的定义

在一个自然现象或技术过程中，常常同时有几个变量在变化着. 这几个变量往往并不是孤立地在变化，而是相互联系并遵循着一定的规律而变化. 下面我们先就两个变量的情况，举例加以说明.

例1 圆的面积A与它的半径r之间有如下相依关系

$$A=\pi r^2.$$

当半径r取定某一正的数值时，由上面相依关系，圆面积有确定的数值和它对应.

例2 一物体自距地面高h米处无初速自由落下，在落地之前，其经过的距离s与经过的时间t之间的关系为

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中g为重力加速度。在落地之前，给定一个t值，根据上述变化规律，就有一个s值与之对应。

例3 某气象站用自动记录仪记下某日从0时到24时的温度变化曲线，如图1-3，它形象地表示温度T随时间t的变化规律。

根据温度变化曲线所表示的规律，对于这一天，0时到24时中每一个时刻t_0，都有确定的温度T_0和它相对应。如$t=0$时，$T=17$℃；$t=14$时，$T=25$℃；$t=18$时，$T=20$℃等等。

以上三个例子，虽然是不同的自然现象，但是，从数量规律上看，它们有共同的特点，即在每一个例子所反映的过程中，变量与变量之间存在着依赖关系，两个变量的这种依赖关系，就是下面所定义的函数概念的实质。

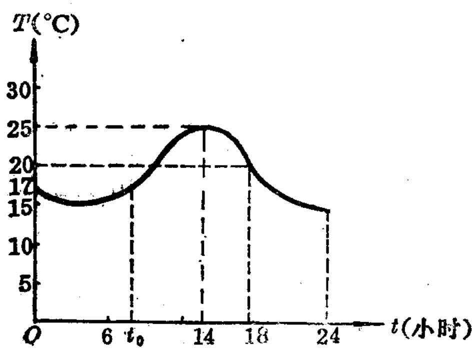

图 1-3

定义 设x与y是两个变量，D是一个给定的数集。如果对于每个数$x\in D$，变量y按照一定的法则，总有确定的数值和它对应，则称y是x的函数，记作

$$y=f(x),$$

其中数集D叫做这个函数的定义域，x叫做自变量，y叫做因变量。

函数$y=f(x)$中表示对应法则的记号"f"也可用其它字母，例如φ、ψ、F等表示，这时函数就分别记作

$$y=\varphi(x)、y=\psi(x)、y=F(x)\text{等。}$$

当x取某一数值$x_0\in D$时，与x_0对应的y的数值称作函数$y=f(x)$在点x_0处的函数值。记作

$$f(x_0) \quad \text{或} \quad y|_{x=x_0}\text{。}$$

例如，函数$y=f(x)=2x^2+1$，该函数在点$x=3$处的函数值为$f(3)=2\cdot3^2+1=19$或$y|_{x=3}=2\cdot3^2+1=19$。

此外，要说明的一点是，如果对于定义域中的每一点x，对应的函数值y只有一个，这样的函数叫做单值函数，否则叫做多值函数。我们主要研究单值函数。以后如不作特别声明，函数都是指单值函数。

当x遍取定义域D中的一切数时，相应的y值的全体，称作函数的值域。

二、函数定义域的确定

在具体问题中，函数的定义域要根据问题的实际意义来确定。如例1中，定义域为$[0,+\infty)$；例2中，定义域为$\left[0,\frac{\sqrt{2h}}{g}\right]$，例3中，定义域为$[0,24]$。

在数学中，当只给出函数的表达式，而没有说明函数的实际背景时，函数的定义域就是使表达式有意义的自变量所能取的一切实数。

例4 求函数$y=\lg\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$的定义域。

解 要使所给定的函数表达式有意义，必须

$$\frac{1}{1-x}>0\text{且}x+2\geqslant0,$$

即 $$x<1\text{且}x\geqslant-2,$$