按教育部新大纲新教材同步编写

龙门新教案

在线课堂

学生专用版

丛书主编 周益新

本册主编 蔡义阳

初三几何

龍門書局

www.Longmen.com.cn

龙门新教案

在线课堂

初三几何

主　编　蔡义阳

撰　稿　陈　勇　李健光　孙凌峰　蔡义金

蔡志勇　杨　帆　李剑光　付方军

蔡义阳　叶仕红　杨小莉　叶昭林

齐志超

龍　門　書　局

北　京

图书在版编目(CIP)数据

龙门新教案.在线课堂.初三几何/周益新主编；蔡义阳编.—北京：龙门书局，2004.5

ISBN 7-80160-908-5

Ⅰ.龙…　Ⅱ.①周…②蔡…　Ⅲ.几何课-初中-教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 033638 号

责任编辑：田　旭　樊庆菊

封面设计：耕者设计工作室

龍門書局 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.longmen.com.cn

中国人民解放军第 1201 工厂印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2003 年 6 月第 一 版　开本：880×1230　大 16 开

2004 年 4 月修 订 版　印张：13 1/2

2004 年 4 月第三次印刷　字数：348 500

印数：50 001-90 000

定　价：14.50 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

策划者语

学会学习，轻松考高分

你会学习吗？

在学习中，你是否存在以下问题：

你上课会不会经常走神？老师讲课有些内容你没有听懂怎么办？

如果你上课经常走神，或者没有听懂老师的讲解，而你又不喜欢问老师问题，那你学习的过程中就会有很多不懂的问题，一个个不懂的问题积攒在一起，形成一片片知识空白，长此以往，你的成绩能提高吗？

因此，你需要一个能够像播放VCD一样将老师讲解再现的"纸上课堂"。

你在家里学习，有问题不会怎么办？

老师不在身边，家长帮不上你的忙，问题不会，无处可问，成绩怎样，可想而知。

所以，你需要一个随时可以提问、不受约束的"便携式纸上教练"。

你有一套自己的学习方法吗？

教材你理解透彻了吗？你是不是比较喜欢做有难度的题目，而对那些看似简单的问题不屑一顾呢？这是大多数学生的通病——不会走，怎么能够跑呢？即便可以，也肯定会摔跤。

记住，在你开始大量做题之前，别忘了先问一下自己：教材我理解透了吗？

以上只是你在学习中遇到的问题中很小的一部分，但这些都会导致你的成绩老是徘徊不前。我们策划这套书的初衷，就是为了解决大家在学习中的这些问题——**你可以在较短的时间内学得更多，记得更牢，练得更精。**

如何利用本丛书迅速提高学习成绩？

本套丛书是**专门为那些渴望成为优等生的同学设计的**，它可以用于**预习、上课、课后作业时**。栏目设计新颖别致，有自己独特的功能，你在使用时一定要特别注意以下几个栏目：

教材全解

你必须完全掌握教材的重要知识点，这是你解决一切问题的基础，也是前提。**千万不要教材知识点还没搞明白就去追难题！**

这一部分就像老师上课一样，帮你透彻理解教材知识点，在此基础上匹配典型例题，加深你对该知识点的理解，老师还为你总结了解题规律、方法技巧、易错点、误区等，然后通过一两个同类变式的练习，检测你是否全面理解与掌握了该知识点。

问题研讨　**综合延伸**　**创新探究**

此部分根据重点内容的不同、针对你遇到的问题不同，分为三种情况：

① 你经常容易出错的概念、误区、易错点用"问题研讨"，通过几位同学的讨论让你知道哪里容易出错、为什么会出这样的错，从而避免你在做题的过程中重蹈他们的覆辙。

只要你是聪明人，一定能品位出其中的味道的。

② 对经常会出现综合应用、拓展延伸的重点内容，我们为你设计了"综合延伸"栏目，这部分的例题都有相

当的综合性和一定的难度。

你一定要特别关注"延伸总结"栏目，因为它将知识点向何处延伸、发散点等内容总结得十分详尽。吃透此栏目，"举一反三"没问题！

③ 最近的中高考考试大纲都明确提出**"着重考察学生运用知识分析和解决实际问题的能力"，在高考试题中，研究性学习的内容不仅是考试热点，而且比重在不断增加。**

为了从一开始就培养你的创新能力和研究性学习的能力，本书特别设计了"创新探究"这一栏目。你可一定要特别注意哦！

要点记忆

在你身边，肯定有很多同学特别喜欢做题，以为做题是取得好成绩的"法宝"。其实不然！我们老祖宗有句古话"磨刀不误砍柴工"，如果你的刀快，那么砍起柴来肯定既快又多又省劲。"要点记忆"这一栏目就是你的磨刀石，它将你最需要掌握的问题全部归纳在一起，尤其是在期中、期末复习时，只要你完全记在心中，相信你一定会取得满意的成绩！

总而言之，本套丛书是龙门书局两年多来的研究成果，也是黄冈重点中学学科带头人的呕心沥血之作，它既是一本可以随时播放的"纸上课堂"，又是一位可随时交流的"纸上教师"，其中"宝藏多多"，善于发掘者一定会"满载而归"。

"世上无难事，只怕有心人。"渴望成为优等生的你，一定要做生活的有心人，那么，开始行动起来吧！

《龙门新教案·在线课堂》
丛书策划组
2004 年 5 月于北京

主编寄语

这种方法最有效

多少年来，许多教育学家一直在探索：老师怎样教，学生怎样学，才最有效果？经过长期探索、实验、比较，结论是——紧扣教材，边讲边练，师生双方交流合作探究，达到融会贯通。通过典型例题的讲解，使学生全面掌握知识要点和解题方法、技巧、规律。通过举一反三的训练和实践、探究、应用活动，加强学生发散性思维的培养。

《龙门新教案·在线课堂》丛书正是这种科学训练方法的结晶。本丛书与同类书相比，其突出的特点是：

一、课堂教学的真实性

从书将开发学生潜能的"同步学案"融化在"同步教案"之中，像 VCD 一样再现黄冈重点中学一代名师每一节课的精彩讲解，师生双向交流、合作探究的思路贯穿教师授课的全部过程

二、教材讲解的细致性

从书的语文、英语学科对教材逐字逐词、逐句逐段讲解，细致入微；数学、物理、化学学科对教材重点内容采用"一点、一讲、一例、一练"的方法，即每一个重要知识点对应一段解析、一道典型例题，然后总结这类题目的解题规律、方法技巧、警示误区，并进行变式训练，训练题新颖灵活，步步升级。

三、教育理念的超前性

从书每一节课的创设意境、导入新课，关注学生的学习兴趣和生活经验，师生互动情感交流，体现了以学生为主体的意识。每一课时还根据教材内容，设置对易错点和易混淆点进行思维诊断的"问题研讨"、对知识进行拓展迁移的"综合延伸"、课外开展研究性学习活动的"创新探究"栏目，体现了倡导学生"主动参与、乐于探究、勤于动手、张扬个性、开发潜能"的现代教育理念。

四、教学风格的务实性

从书按教育部规定的课时进行教学，课外探究、课题案例应有尽有，真正实现了同步配套课堂教学。既符合课堂师生双向交流发现、探究知识的规律，又留足空隙让学生记录课堂笔记。课堂作业适度适量、灵活、新颖；答案另附，并有详细点拨，便于测评，适合全国各地重点中学和普通中学学生课堂和课外集体使用或个人自学使用。

新世纪、新教材、新课堂、新的考试模式，对每一个学生都是一种新的感悟、新的考验。读完这本书，你会对新课程理念有更深的体会，从而在全新教育理念营造的新课堂内焕发新的活力。

丛书主编　周益新

2004 年 5 月

编委会

目录

龙门新教案

初三几何

第六章 解直角三角形

第七章 圆

第六章 解直角三角形

第一节 正弦和余弦

第一讲

脚踏楼梯步步高,楼梯是一种攀高的工具.

如图6-1-1甲,树上有一鸟窝,一位小学生想借用梯子攀上树,端下鸟窝,但由于力气太小,只能将梯子摆放成如图6-1-1乙的形状,望鸟兴叹了.一位路过的叔叔帮忙将梯子摆成如图6-1-1丙的形状,够着了鸟窝,你能解释这一现象吗?你能用数学知识来解释这一现象吗?

通过这一节的学习,就会功到自然成.

图6-1-1

教材全解

重点1 正弦、余弦的定义 ★★★

在Rt△ABC中,$\angle C=90^\circ$,$BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,如图6-1-2.

我们把锐角A的对边与斜边的比叫做∠A的正弦,记作sinA,即$\sin A=\dfrac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$,我们把∠A的邻边与斜边的比叫做∠A的余弦,记作cosA,即$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}$.

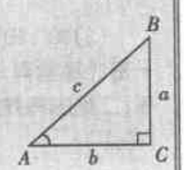

图6-1-2

在线课堂

(1)由于直角三角形中,斜边长大于直角边长且均为正数,所以有:$0<\dfrac{a}{c}<1$,$0<\dfrac{b}{c}<1$,即可得结论:$0<\sin A<1$,$0<\cos A<1$.

(2)sinA、cosA都是整体符号,不能看成sin·A、cos·A.

(3)当∠A一定时,sinA、cosA也是一定的,这与∠A的两边的长短无关.

(4)当一个角用三个字母表示时,如∠ADB,则∠ADB的正弦和余弦应表示为sin∠ADB,cos∠ADB,而不能用sinADB和cosADB表示.

(5)$\sin A=\dfrac{a}{c}$是一个等式,可变形为$a=c\sin A$或$c=\dfrac{a}{\sin A}$.

[例1] (1)在Rt△ABC中,$\angle C=90^\circ$,$AC=5$,$AB=13$,求sinA和cosA的值.

(2)如图6-1-3,在△ABC中,$\angle C=90^\circ$,$\angle ABC=30^\circ$,D为AC的中点,求cos∠DBC.

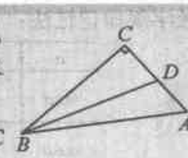

图6-1-3

思路导引

(1)$\sin A=\dfrac{BC}{AB}$,$\cos A=\dfrac{AC}{AB}$,而且已知$AC=5$,$AB=13$,因此应先求出BC边,由勾股定理可得BC边.

(2)要求cos∠DBC的值,即是求$\dfrac{CB}{BD}$的值.而$\angle ABC=30^\circ$,则不难推出其三边之比.

解:(1)在Rt△ABC中,$AB=13$,$AC=5$,由勾股定理得

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12$

$\therefore \sin A=\dfrac{BC}{AB}=$______,$\cos A=\dfrac{AC}{AB}=$______.

(2)在Rt△ABC中,令$AC=2k$.∵ D为AC的中点

∴ $CD=k$,又∵ $\angle ABC=30^\circ$,$\angle ACB=90^\circ$

∴ $BC=2\sqrt{3}k$,在Rt△BCD中

$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{(2\sqrt{3}k)^2+k^2}=\sqrt{13}k$.

∴ $\cos\angle DBC=\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{2\sqrt{3}k}{\sqrt{13}k}=$______.

方法技巧

求锐角的正弦、余弦值就是用定义求两边的比值.

随堂练习

1. 如图6-1-4,在Rt△ABC中,$\angle C=90^\circ$,$AC=3$,$BC=4$.求sinA和cosB的值.

2. 在△ABC中,$\angle C=90^\circ$,各边长度都扩大2倍,那么锐角A的正弦值、余弦值有何变化.

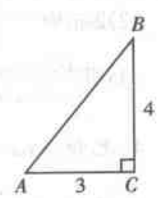

图6-1-4

重点2 30°,45°,60°角的正弦、余弦值 ★★

$\sin30^\circ=\dfrac{1}{2}$　$\cos30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$\cos45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

在线课堂

(1)30°、45°、60°角的正弦、余弦值是利用特殊直角三角形求得的.

(2)30°、45°、60°角的正弦、余弦值的记忆方法:

①特殊图形记忆法:图 6-1-5

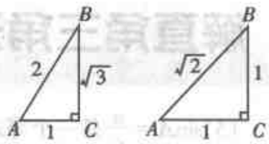

图 6-1-5

②数字规律记忆法:

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$

[例 2]　(1)求下列各式的值:

①$\sin30^\circ+\cos30^\circ$　②$\sqrt{2}\sin45^\circ-\frac{1}{2}\cos60^\circ$

(2)已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$,且$\angle\alpha$为锐角,则$\angle\alpha=$______.

思路导引

30°、45°、60°角的正弦值、余弦值的应用有两方面:

(1)已知角,求其正弦、余弦值.

(2)已知一个锐角的正弦、余弦值,求这个锐角的度数.

解:(1)①$\sin30^\circ+\cos30^\circ=$______,

②$\sqrt{2}\sin45^\circ-\frac{1}{2}\cos60^\circ=$______.

(2)$\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \sin\alpha=\sin60^\circ$　$\alpha=$______.

解题规律

已知角求函数值,一般分为两步:①代值,②化简.已知函数值求锐角是特殊角的正弦值、余弦值的逆应用,是一种逆向思维.

随堂练习

3. 计算:

(1)$\frac{1}{2}\sin60^\circ-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos45^\circ=$______.

(2)$2\sin30^\circ-\frac{1}{2}\cos^2 45^\circ\cdot\sin^2 60^\circ=$______.

(3)$\frac{\sin45^\circ+\cos30^\circ}{3-2\cos60^\circ}-\sin30^\circ\cdot\sin60^\circ=$______.

4. 已知:$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则锐角 $\alpha=$______.

5. 已知:$\sin\beta=\frac{1}{2}$,则锐角 $\beta=$______.

问题研讨

[例 3]　在$\triangle ABC$中,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边分别是a、b、c,且$a:b:c=3:4:5$,求证 $\sin A+\sin B=\frac{7}{5}$.

甲生:

设 $a=3k,b=4k,c=5k$

则 $\sin A=\frac{a}{c}=\frac{3k}{5k}=\frac{3}{5}$

$\sin B=\frac{b}{c}=\frac{4k}{5k}=\frac{4}{5}$

$\therefore\ \sin A+\sin B=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5}$.

乙生:

设 $a=3k,b=4k,c=5k$

$\because\ a^2+b^2=(3k)^2+(4k)^2=25k^2=c^2$

$\therefore\ \triangle ABC$为直角三角形,且$\angle C=90^\circ$

$\therefore\ \sin A+\sin B=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}=\frac{3k+4k}{5k}=\frac{7}{5}$.

诊断

要点记忆

本节课主要学习了正弦、余弦的概念及30°,45°,60°角的正弦、余弦值,重点内容是:

(1)一个直角三角形的锐角的正弦、余弦是这个直角三角形的两边的比值,是一个数值,它角度的大小有关,与角的两边的长短无关.(考点)　(★★)

(2)$\sin A=\frac{a}{c}$及$\cos A=\frac{b}{c}$整体看是一个等式,右边是一个分式,因而$\sin A=\frac{a}{c}$,$\cos A=\frac{b}{c}$具有等式、分式的性质,当已知式中的两个量,即可求出第三个量.(考点)　(★★★)

(3)30°,45°,60°角的正弦值及余弦值表有两层含意:一是计算含有30°,45°,60°等特殊角的正弦、余弦值的式子;二是由特殊锐角的正弦、余弦值求出这个角的度数.(考点)　(★★★)

心得笔记

[例 1]　(1)$\frac{12}{13}$,$\frac{5}{13}$;(2)$\frac{2}{13}\sqrt{39}$

[例 2]　(1)①$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$,②$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$;(2)$60^\circ$

[问题研讨]　诊断:本题应用的$\sin A=\frac{a}{c}$和$\sin B=\frac{b}{c}$是在$\angle C$为直角的前提下的结论,而题目的题设中并没有$\angle C=90^\circ$,因此直接运用正弦的定义是错误的,应先证明$\triangle ABC$为直角三角形,然后再应用.所以甲的解答是错误的.乙的解答是正确的.

课后作业

班级______ 姓名______ 分数______

[基础演练]

1. 分别求图 6-1-6 两图中，∠A、∠B 的正弦和余弦值.

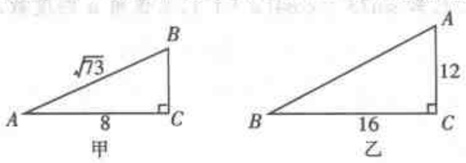

图 6-1-6

2. 在△ABC 中，∠C = 90°，若 $3AC=\sqrt{3}BC$，求∠A 的度数及 $\cos B$ 的值.

3. 计算：

(1) $\frac{\cos60^\circ}{1+\sin60^\circ}+\frac{\cos45^\circ-\sin30^\circ}{\cos45^\circ+\sin30^\circ}$.

(2)(北京崇文 2003) $(\sqrt{2}+1)^{-1}+2\sin30^\circ-\sqrt{8}$.

[综合测试]

4. 如果 α 为锐角，且 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，求 $\sin\alpha$ 的值.

5. 已知∠A、∠B 均为锐角，且 $\sin A$ 是方程 $6x^2-11x+3=0$ 的根，$\cos B$ 是方程 $6x^2-x-2=0$ 的根，求 $\sin^2A+\cos^2B$ 的值.

6. (北京朝阳 2003) 在平面直角坐标系中，已知点 A(3,0) 和点 B(0, −4). 试求 cos∠OAB 的值.

7. (黄冈市 2003) 当 $x=\sin60^\circ$ 时，求代数式 $\frac{2x^2-4x}{x+2}\times\frac{x^2+2x}{x^2-4x+4}+\frac{4x}{2-x}$ 的值.

[探究升级]

8. 正方形 ABCD 中，N 是 CD 的中点，M 是 AD 上异于 D 的点，且∠NMB = ∠MBC. 求 sin∠ABM 的值.

自我评价

第一节 正弦和余弦

第二讲

1884年，瑞士的一个中学教师巴尔末夸口说："我能用公式把任意4个数字有规律地联系起来"，于是有人把已知的氢光谱中红、绿、蓝、紫4条谱线的波长数据给了他，他竟顺利地用一个公式——巴尔末公式$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{n^2}\right)$把这些谱线的波长联系起来，在当时的物理界引起了轰动.

你能用一个公式把sin30°、cos30°、1这三个数字有规律地联系起来吗？你会求含非特殊角的正弦、余弦的式子sin53°cos37°+sin37°cos53°的值吗？

这就是我们今天所要解决的问题，正弦与余弦的关系.

教材全解

重点1 互余两角的正弦和余弦的关系 ★★★

$\sin(90°-A)=\cos A$

$\cos(90°-A)=\sin A$

在线课堂

由锐角三角函数的正弦和余弦的定义知：

$\sin A=\frac{a}{c}$ $\cos B=\frac{a}{c}$ $\therefore \sin A=\cos B$

又$\because \angle A+\angle B=90°$ $\therefore \cos(90-A)=\sin A$

同理：$\sin(90°-A)=\cos A$.

[例1] (1)已知$\sin A=\frac{1}{3}$，且$\angle B=90°-\angle A$，求$\cos B$的值；

(2)已知$\sin35°=0.5736$，求$\cos55°$；

(3)已知$\sin30°=\cos5(\alpha-9°)$，求锐角α的度数.

思路导引

解：(1)直接运用余角关系式，$\cos B=$______$=\sin A=$____.

(2)$\because 35°+55°=90°$

$\therefore \cos55°=$________$=\sin35°=$______.

(3)$\because 30°+60°=90°$

$\therefore \sin30°=\sin(90°-60°)=\cos60°$

而$\sin30°=\cos5(\alpha-9°)$

$\therefore \cos60°=\cos5(\alpha-9°)$ $\therefore$ ________

$\therefore \alpha=$____.

解题规律

解此类问题关键是化异名函数为同名函数，就是已知的和要求的或等式左、右两边的必须要么都是正弦，要么都是余弦，而正弦、余弦的余角关系就是化异名函数为同名函数的依据.

随堂练习

1.(1)已知$\sin67°18'=0.9225$，求$\cos22°42'$；

(2)已知$\cos4°24'=0.9971$，求$\sin85°36'$.

2.已知$\sin73°=\cos4(\alpha+1°)$，求锐角α的度数.

3.如图6-1-7，$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，$BD\perp AC$于D，$\angle CBD=\alpha$，$AB=4$，$BC=3$，求$\sin\alpha$和$\cos\alpha$的值.

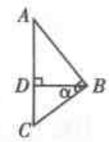

图6-1-7

重点2 同角的正弦、余弦间的关系 ★★★

$\sin^2A+\cos^2A=1$

在线课堂

(1)公式的推导：用正弦、余弦的定义推导.

(2)公式的变式：①$1=\sin^2A+\cos^2A$②$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}$

③$\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}(0°<A<90°)$.

(3)已知一个角的正(余)弦值，就可以求出它的余(正)弦值.

[例2] 已知：在Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\sin A=\frac{3}{4}$，求$\cos A$的值.

思路导引

本题可用两种方法求解：

(1)利用$\angle A$的正弦、余弦的定义；

(2)利用同角三角函数中的平方关系式.

解法一：如图6-1-8，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\sin A=\frac{3}{4}$，$\therefore$可设$a=3k$，$c=4k$，利用勾股定理可得：$b=$______

$\therefore \cos A=\frac{b}{c}=$______$=$______.

解法二：$\because \sin^2A+\cos^2A=1$，$\sin A=\frac{3}{4}$，$\angle A$为锐角

$\therefore \cos A=$______

$=$______$=$______.

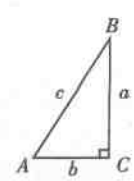

图6-1-8

解题方法

已知一个角的正弦(或余弦)值,求出这个角的余弦(或正弦)值,一般有两种思路,一是用定义求解,二是用同角的三角函数关系式求解.方法二比方法一要简捷.

随堂练习

4.如图6-1-9,在Rt△ABC中,∠C=90°,如果∠A=30°,那么sinA+cosB的值等于________.

A.1　　B.$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

C.$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$　　D.$\frac{1}{4}$

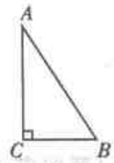

图6-1-9

5.已知∠A为锐角,且$\cos A=\frac{8}{17}$,求sinA的值.

6.(北京宣武区2003)若α为锐角,且$\sin\alpha=\frac{1}{2}$,求cosα的值.

7.(贵州黔东南2003)如图6-1-10,已知点P的坐标是(a,b),则sinα等于______

A.$\frac{a}{b}$　　B.$\frac{b}{a}$

C.$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

D.$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

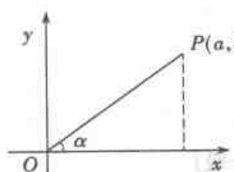

图6-1-10

创新探究

[探究课题]　正弦余弦函数的增减性.

[探究目的]　探究正弦、余弦函数的在0°~90°的增减性,并能运用其增减性解决有关问题.

[探究过程]　通过查表求几个锐角的正弦或余弦值,并以角度为横坐标,函数值为纵坐标,在直角坐标系中,描出各点,以其图象直观地判断其增减性,以增加感性认识.

思路导引

根据正弦函数和余弦函数的定义,在Rt△ABC中,有$\sin A=\frac{a}{c}$,$\cos A=\frac{b}{c}$,要判断其增减性,必须在c值不变的前提下,探究A与a或b之间的关系,为此可以作一圆,使其半径为c,如图6-1-11,以圆心为坐标原点,以两条互相垂直的直径所在直线为横、纵轴,P为⊙O上任意一点,过P作PM⊥x轴于M,则$\sin A=\frac{PM}{PO}=\frac{PM}{c}$;$\cos A=\frac{OM}{OP}=\frac{OM}{c}$.

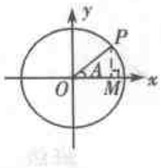

图6-1-11

运用数形结合思想,推断出其增减性.

探究点拨

1.对正弦函数或余弦函数分别取两个角α,β(α>β)利用求差比较.

2.正弦、余弦的增减性:正弦函数值随着角度的增大而增大,余弦函数值随着角度的增大而减小.

3.正、余弦函数增减的应用.如:化简$\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}$.

随堂练习

8.(北京宣武2003)若α为锐角,且$\sin\alpha=\frac{1}{2}$,则cosα的值为　(　　)

A.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

9.(浙江台州2003)在Rt△ABC中,AC=m,∠A=α,∠B=90°,那么BC=　(　　)

A.$m\sin\alpha$　　B.$m\cos\alpha$　　C.$\frac{m}{\sin\alpha}$　　D.$\frac{m}{\cos\alpha}$

10.(山东潍坊2003)在△ABC,$\sin B=\cos(90°-C)=\frac{1}{2}$,那么△ABC是　(　　)

A.等腰三角形　　B.等边三角形

C.直角三角形　　D.等腰直角三角形

11.(北京海淀2003)在△ABC中,∠C=90°,∠B=2∠A.则cosA=　(　　)

A.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

要点记忆

1.正弦、余弦的余角关系,两角必须是互为余角,即两角和为90°,计算要特别留心.　(★★)

2.正弦、余弦的平方关系,是指任意一个锐角的正弦值与余弦值的平方和为1,另外应注意它的变式的应用.(考点)　(★★★)

3.正弦是增函数,余弦是减函数,在比较大小时一定要是同名函数.　(★★)

心得笔记

[例1]　(1)cos(90°−A),$\frac{1}{3}$

(2)cos(90°−35°),0.5736

(3)60°=5(α−9°),21°

[例2]　$\sqrt{7}k,\frac{\sqrt{7}k}{4k},\frac{\sqrt{7}}{4},\sqrt{1-\sin^2A},\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2},\frac{\sqrt{7}}{4}$

课后作业

班级______ 姓名______ 分数______

[基础演练]

1. 已知 $\cos^2\alpha+\cos^2 55°=1$，则锐角 α 等于 ( )

A. 55° B. 35° C. 90° D. 45°

2. 已知 $0°<\alpha<90°$，$\sin\alpha=\cos30°$，则 $\alpha=$ ( )

A.30° B.45° C.60° D. 以上都不对

3. 已知 $0°<\alpha<30°$，$30°<\beta<60°$，那么下列各式中正确的是 ( )

A. $\sin\alpha>\sin\beta$ B. $\cos\alpha>\cos\beta$

C. $\cos\alpha\leqslant\cos\beta$ D. $\sin\alpha\leqslant\sin\beta$

4. (北京昌平 2003)若 α 为锐角，$\sin(90°-\alpha)=\frac{2}{3}$，则 $\cos\alpha$ 的值是 ( )

A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

5. (北京西城区 2003)Rt△ABC 中，∠C=90°，如果 $\cos A=\frac{3}{5}$，那么 $\sin B$ 的值是 ( )

A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

6. (北京东城区 2003)如果 α 是锐角，且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，那么 $\cos(90°-\alpha)$的值是 ( )

A. $\frac{9}{25}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{16}{25}$

7. (四川广元 2003)已知 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，那么锐角 α 的度数是 ( )

A.30° B.45° C.60° D.75°

[综合测试]

8. 已知 $2\sin^2\alpha-3\cos\alpha=0$，求锐角 α.

9. 已知 $\sin\alpha+\sin^2\alpha=1$，$\alpha$ 为锐角，求 $\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$ 的值.

10. 身高相同的甲、乙、丙三人放风筝，各人放出的线分别为 300m、250m、200m，线与平面所成的角分别为 30°，45°，60°(假定风筝线是拉直的)，问三人中谁所放的风筝最高?

11. (黄冈市 2003)在△ABC 中. AB = AC = 3，BC = 2. 试求 $6\cos B$ 的值.

12. (青海 2003)计算 $\sqrt{2}(2\cos45°-\sin90°)+(4-4\pi)^0+(\sqrt{2}-1)^{-1}$

[探究升级]

13. 已知 a,b,c 为 Rt△ABC 的三边，且 c 为斜边，求证：$a^n+b^n<c^n(n\geqslant3)$.

自我评价

第二节　正切和余切

第一讲

在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，两直角边 $a=\sqrt{3}$，$b=1$，求 $\angle A$.

要求 $\angle A$，用前面学过的正弦和余弦知识求解，都要先求斜边 c，再用 $\angle A$ 的正弦和余弦，求出 $\angle A$，能否直接由 a，b 的比值求 $\angle A$？如果能，问题的解答便简捷些.

在直角三角形中，正弦和余弦分别是某一锐角的对边与斜边的比及邻边与斜边的比，而某一锐角的对边与邻边的比或邻边与对边的比与该锐角有何关系？这就是我们这节课要研究的问题.

教材全解

重点1　正切和余切的定义 ★★

如图 6-2-1，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$

我们把锐角 A 的对边 a 与邻边 b 的比叫做 $\angle A$ 的正切，记作 $\tan A$，即

$$\tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\frac{a}{b}$$

把 $\angle A$ 的邻边 b 与对边 a 的比叫做 $\angle A$ 的余切，记作 $\cot A$，即

$$\cot A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\angle A\text{ 的对边}}=\frac{b}{a}$$

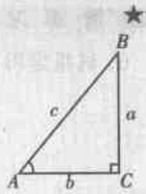

图 6-2-1

重点2　锐角三角函数的定义

锐角 A 的正弦、余弦、正切、余切都叫做 $\angle A$ 的锐角三角函数.

在线课堂

(1)正切、余切是在一个直角三角形中定义的，其本质是两条线段的比值，它只是一个数值，没有单位，其大小只与这个角的大小有关，而与所在直角三角形无关.

(2) $\tan A$、$\cot A$ 是一个完整的符号，不能写成 $\tan\cdot A$、$\cot\cdot A$，当用三个大写字母表示一个角时，在表示它的正切、余切时，角的符号"∠"不能省略.

(3)直角三角形中，锐角 A 固定，则它的正切值、余切值也固定，与 $\angle A$ 的两边的长度无关.

(4)直角三角形中，各边长都是正数，于是 $\tan A>0$，$\cot A>0$. $(0^\circ<A<90^\circ)$

［例1］　如图 6-2-2，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AB=3$，$BC=\sqrt{2}$，(1)求 $\tan A$、$\cot A$、$\tan B$、$\cot B$ 的值.
(2)求 $\sin A$ 及 $\cos A$ 的值.

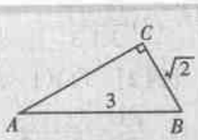

图 6-2-2

思路导引

$\tan A=\dfrac{BC}{AC}$　$\cot A=\dfrac{AC}{BC}$　$\tan B=\dfrac{AC}{BC}$　$\cot B=\dfrac{BC}{AC}$，因此应先求出 AC 边，由勾股定理可求得 AC 边.

解：在 Rt△ABC 中，$AB=3$，$BC=\sqrt{2}$，由勾股定理得：

$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{7}$

(1) $\tan A=\dfrac{BC}{AC}=$________　$\cot A=\dfrac{AC}{BC}=$________

$\tan B=\dfrac{AC}{BC}=$________　$\cot B=$________.

(2) $\sin A=\dfrac{BC}{AB}=$________　$\cos A=\dfrac{AC}{AB}=$________.

解题方法

求一个锐角的正切、余切值，就是运用定义求这个直角三角形两直角边的比值.

随堂练习

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AB=13$，$AC=3$，求 $\tan A$、$\cot A$、$\tan B$、$\cot B$ 的值.

2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AB=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{2}$，求 $\angle A$ 的四个三角形函数值.

3. 如图 6-2-3，在菱形 $ABCD$ 中，$AC=6$，$BD=8$，求 $\angle ABD$ 的四个三角函数值.

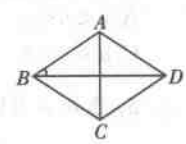

图 6-2-3

重点3　特殊角的三角函数值 ★★★

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

在线课堂

特殊角的三角函数值应熟记，可按如下方法记忆：(1)三角板记忆法如图 6-2-4；(2)数字规律法.

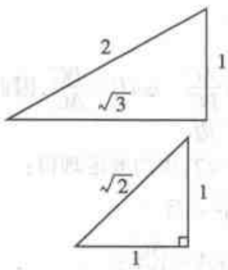

图 6-2-4

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{9}}{3}$	$\frac{\sqrt{27}}{3}$
$\cot\alpha$	$\frac{\sqrt{27}}{3}$	$\frac{\sqrt{9}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

[例 2] 求下列各式的值:

(1) $(\tan45^\circ-\cot30^\circ)(\cot45^\circ+\tan60^\circ)$;

(2) $\dfrac{\tan30^\circ\cdot\cos45^\circ-\sin60^\circ}{\cot30^\circ+\tan45^\circ\cdot\cos30^\circ}$.

思路导引

本题考查的是特殊角的三角函数值,要熟练地掌握特殊角的三角函数值.

解:(1)原式=______=______.

(2)原式=______=______.

解题方法

三角函数值的计算问题是一个重要题型,一般地,解这类问题要尽可能少用心算,先将三角函数值代入,再按式子所指定的运算顺序计算.

随堂练习

4. 令 $a=\sin60^\circ$, $b=\cos45^\circ$, $c=\tan30^\circ$,则它们之间的大小关系是______.

A. $c<b<a$ B. $b<a<c$

C. $a<c<b$ D. $b<c<a$

5. 已知 α 为锐角,且 $\cot(\alpha-10^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{3}$,求 α.

创新探究

[探究课题] 特殊角的三角函数值.

[例 3] 试运用三角函数的定义,求 $\sin15^\circ$, $\cos15^\circ$, $\tan15^\circ$, $\cot15^\circ$ 的值.

思路导引

运用三角函数定义求 15° 角的三角函数值,必须构造一直角三角形且有一锐角为 15°,再找出这个三角形的三边关系.

如图 6-2-5,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$, $\angle ABC=30^\circ$,延长 CB 到 D,使 $BD=BA$,则 $\angle ADB=15^\circ$,令 $AC=x$,则 $BC=\sqrt{3}x$, $AB=2x$, $AD=\sqrt{x^2+[(2+\sqrt{3})x]^2}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})x$

$\therefore \sin\angle ADB=\sin15^\circ=\dfrac{AC}{AD}$

$=\dfrac{x}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})x}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos\angle ADB=\cos15^\circ=\dfrac{DC}{AD}=\dfrac{(2+\sqrt{3})x}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})x}$

$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\tan\angle ADB=\tan15^\circ=\dfrac{AC}{DC}=\dfrac{x}{(2+\sqrt{3})x}$

$=2-\sqrt{3}$

$\cot\angle ADB=\cot15^\circ=\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{(2+\sqrt{3})x}{x}$

$=2+\sqrt{3}$.

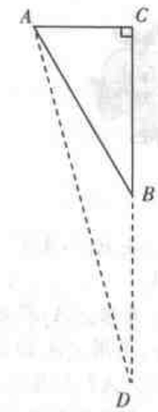

图 6-2-5

探究点拨

1. 求某些特殊角的三角函数值的基本方法:构造一个直角三角形,使它的一个内角为所要求值的角的度数,再运用勾股定理或相似三角形等知识推导出三边关系,或者设一边长为 x,再用 x 的代数式表示三角形其他边的长度.最后运用三角函数定义求解,是数形结合思想的体现.

2. 求值时除题目要求外,一般保留其准确值,不需取近似值.

随堂练习

6. 试根据图 6-2-5,求 75° 角的四个三角函数值.

要点记忆

1. 重点:30°, 45°, 60°等特殊角的三角函数值应熟练掌握,在记忆时可结合你所用的三角板帮助记忆;也可以运用数字规律帮助记忆.(考点) (★★★)

2. 难点是求某些特殊角的三角函数值,解此类问题的核心是构造一个直角三角形,并运用直角三角形的有关性质,求三边长度,或通过假设一边长为 x 的设数方法,把几何问题转化为代数问题,这是研究数形结合问题常用的数学思想方法. (★★)

心得笔记

[例 1] (1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$, $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$; $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$. (2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\sqrt{7}}{3}$

[例 2] (1) $(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=-2$

(2) $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}+1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-3}{9}$