范氏高等代数学

（普及本）

范氏高等代數學

Fine: College Algebra.

沈　璿
　　　　合譯
曹　䃿

薛德炯　校訂

上海 新亞書店 印行

本書經呈請內政部登記執有警字六〇三九號執照

范氏高等代數學

（普及本）

實價國幣二元四角

外埠酌加寄費 范

原著者 Henry Burchard Fine

譯述者 沈璿 曹隆

校訂者 薛德炯

發行者 陳邦楨
上海河南路一五九號

印刷者 新亞書店

發行所 新亞書店
上海 柳州 成都 重慶
昆明 長沙 貴陽

中華民國二十三年九月初版

中華民國二十八年三月十六版

原序

本書於啓迪代數學算法之原理,力求簡要,而仍不失聯絡與嚴正,且使算法之形式,適切於實際之演算.

凡有關於代數學,而爲各校學生所需要者,本書靡不羅載,且於編列此各種材料時,所取之順序,務期能適當明示各部分間交相從屬之關係.

本書分爲二部:第一部專述代數學中之數系統,第二部專述代數學本論.

余於論數時,以基數觀念,及自然標尺 1, 2, 3,……中所示順序觀念爲基礎. 余之出此,自有論據,茲不必贅. 但由余之經驗,縱就教學法論之,亦確信以此法爲最佳. 例如無理數之順序的定義,雖一幼年學生,亦能使之領會;蓋以若是之數不採若是之定義,則其義雖眞,每嫌過於抽象,優秀學生亦難正確瞭解也.

或謂本書關於數之討論,不必如是詳密. 但著作者於討論基本性質之問題時,若應討論者,而不加以討論,應證明者,而不加以證明,豈能無憾. 余所望者,此類討論,在好學者能引起其興趣,在多數學生,能確認實數之順序的性質,及其間推演之關係,與夫明瞭無論對於實數,複素數,其基本運算皆

可依可易,可羣,及分配三律以定其義.

本書第二部分,即代數學本論中,余先認上舉各律,在文字表數之代數學中,實爲基本運算之定義. 是等代數學上之定義,述之綦詳;且由是推演代數算法之全部原理,及實際演算之法則.

關於此部,余不詳論. 惟有若干要點,所以別於其他各種通行之教科書而當一述者. 余力避僅爲標新立異而採用不普通之方法;但若因欲得理論之一致,而余認爲有必要,或可使理論及實算簡約時,則徑用之而無疑, 特殊方法在本文及習題中所佔篇幅極少;而對於代數學之普通方法,則常設法使學生確實運用之.

因此,如待定係數法,即研究解析法之至要方法,不置諸本書之後部,而儘早提前,自後若利於用,即常用之. 然題目之編列,則不得不因而變化. 又如部分分數,余特納諸分數章中. 揆諸理論,此爲允當,且若適當處理之,可供初步演算最佳之練習.

又余於除法變形及其結果,以全神赴之;且插入有效之綜合除法,以資聯絡.

關於方程式之前數章中,對於解方程式所依據之理由,有詳密之討論;對於可用二次式解之方程組,有較通常更有組織之探討;又對於二元一次,及二元二次之方程式圖解法有較精密之研究,

對於正整指數之二項定理,余視作連乘之特例以論之.由余之經驗,余確信欲令學生體認此重要定理之意義,以此法爲最佳.分指數之一章中,雖已使用普偏二項定理,但此定理之證明,及關於無窮級數之諸事,延至近於卷末,始論及之.

在方程式論及行列式諸章中,對於方程式根之對稱函數之基本定理,載有證明,對於結式之重要性質,亦有討論.是等事項,皆不屬初步代數學範圍之內,但專門學校之學生,欲繼續研究算學,則不可不知.其餘諸章,如無窮級數及卷末所載連續函數之性質亦然.

余編第一部分時,取 Rowan Hamilton, Grassmann, Helmholtz, Dedekind, 及 Georg Cantor 諸家之說爲基礎.以往曾否有人對於順序數之原理,以余所取之見解,作同樣詳細之啓迪,則非余之所知矣.

余編代數學本論時,獲益於他書者匪鮮,尤當誌謝者,爲 Chrystal 氏之論文,

本書編纂數年,始底於成.自1898年始,發行人逐年刊一小册,以資 Princeton 大學一年生之用.小册所載者,爲代數學重要部分之論述,乃當時最愜余意者.余每稿成,輒就商於同事 Eisenhart, Gillespie 二君,存其精華,而去其糟粕.因是本書之大部分,乃屢經删改始定者.但當然尙有多處,須賴今後之經驗,檢出而釐訂之.余所望於是書者,乃是書之行

於世,使學生諸君,不獨更能理解代數學,且若對其算法所依據之原理,予以相當之研討,則將更感興味而奮起也.

Henry B. Fine

五四年查訖

目次

第一編——數

第二編——代數學

第一編　數

I. 自然數—計數,加法,及乘法

物之羣及其基數

物之羣(Groups of things)　在吾人日常經驗中,引起吾人注意者,不獨單一之物,且有結合爲羣或集者矣. 1

手之指,家畜之羣,多角形之頂點,物之羣之例也.

所謂若干物組成一羣者,吾人區別此諸物於他物時,以其全體而不以其個體,其全體成一單一之物,而爲吾人所注意也.

爲便利起見,吾人稱組織一羣之各物爲其羣之元(Elements).

等値羣(Equivalent groups)　**一一對應**(One-to-one correspondence)　二文字羣 **ABC** 及 **DEF** 之間有次之關係:吾人能成對的組合其諸元,以一羣之各元一一與他羣之各元結合可矣. 譬如,吾人可以 **A** 與 **D** 結合, **B** 與 **E** 結合, **C** 與 **F** 結 2

之諸元可以如此結合時,此二羣爲等値;如此結合諸元之法,稱爲導二羣於一對一之關係,或一一對應之關係.

3 **定理** 與同一第三羣等值之二羣等值.

依假設,吾人可導二羣各與第三羣一一對應.次凡二羣中與第三羣之同元結合之二元,吾人皆認爲二羣之對應元而結合之.於是二羣亦一一對應矣.

4 **基數**(Cardinal number) 吾人設想一切可能之物羣區分爲各類之等值羣,任二與羣之屬於同類或異類,視其能一一對應與否而定.

例如,二文字羣 **ABCD** 及 **EFGH** 屬於同類,二羣 **ABCD** 及 **EFG** 屬於異類.

屬於同類之一切羣所公具之性質,亦卽區別一類之羣於他類之羣之性質,爲羣中物之數,或其基數.換言之:

一羣中物之數或其基數者,此羣自身以及凡能與之一一對應之羣所公具之性質也.

吾人亦可云:"一物羣之基數者,吾人變更羣中諸物之排列方法或一一取代之以他物時,此羣之性質有始終不變者是也;"或,"一物羣之基數者,此羣之性質有與羣中諸物自身之特性及其排列方法無關者是也."

何則,變更諸物之排列方法,或以他物一一取代之,凡此僅能變其羣爲一等值之羣而已,§2.又羣中有如此變化而不受影響之性質,自必與諸物之特性及其排列方法無關.

5 **部分**(Part) 第一羣之諸元爲第二羣之若干元,而非其一切元時,第一羣爲第二羣之部分.

例如,羣 ABC 爲羣 ABCD 之部分.

由定義立得:

如第一羣爲第二羣之部分,而第二羣爲第三羣之部分, 6
則第一羣亦爲第三羣之部分.

有窮羣及無窮羣 (Finite and infinite groups)　吾人謂羣 7
之不與其任何部分等值者爲有窮羣,與其某一部分等值者爲無窮羣.於集亦然.*

例如,羣 ABC 爲有窮羣;因此羣不能與 BC 或任何其他部分一一對應也.

然任一無盡之符號之列,例如無盡數列 1,2,3,4,……,則爲無窮集.

以例明之.在 1,2,3,4,…… 全集及其起於 2 之部分之間,亦即

在　1, 2, 3, 4, 5,……　(*a*)

及　2, 3, 4, 5, 6,……　(*b*)

之間,吾人能樹立一對一之關係;因 (*a*) 之 1 可與 (*b*) 之 2 結合,(*a*) 之 2 可與 (*b*) 之 3 結合,餘仿此,任舉 (*a*) 之何數,(*b*) 中常有一數與之對應,舉 (*b*) 之數亦然故也.

於是集 (*a*) 與其部分 (*b*) 等值.故 (*a*) 爲無窮集.

基數之大小　命 M 及 N 指示任二有窮羣.則成 8

1. M 與 N 等值,

或 2. M 與 N 之一部分等值,

或 3. N 與 M 之一部分等值,

三者必居其一.

---

* 在無窮羣——或無窮集,此名稱引較多——實際上吾人當然不能盡取其諸元而一一思考之.此種之集,但具有可判別各與物屬此不屬此之法則時,吾人即認爲已知.

在第一種情形,M及N有同一之基數,§4,或相等之基數;在第二種情形,M之基數小於N之基數;在第三種情形,M之基數大於N之基數.

譬如,若M爲文字羣abc,而N爲羣defg,則M與N之一部分等值.例如與部分def等值.

故M之基數小於N之基數,而N之基數大於M之基數.

9 注意　依有窮羣之定義,§7,如此定義之"等","大","小"諸關係,絕不容有所混淆於其間.

譬如,此定義不容M之基數同時等於又小於N之基數,因如此則M既與N等值,又與N之一部分等值,故N與自身之一部分等值,§3,而N爲無窮集矣,§7.

10 系　如第一基數小於第二基數,而第二基數小於第三基數,則第一基數亦小於第三基數.

何則,如M,N,P指示具有上述諸基數之任三物羣,則M與N之一部分等值,而N與P之一部分等值;故M與P之一部分等值,§§3,6.

11 **基數之系統**　自僅含一元之羣開始累次"附加"一新物,可導出下表之基數.

1. 僅含一元之羣(如I)之基數.
2. 附加一元於第一種羣而得之羣(如II)之基數
3. 附加一元於第二種羣而得之羣(如III)之基數.
4. 餘仿此,無終極.

此諸連續基數,吾人名之爲"一","二","三",……,以符號1, 2, ,……,表之.

12 **論此系統**　吾人稱有窮羣之基數爲有窮基數.關於前

表之基數有可得而言者,條舉於下:

其一. 此表中之基數皆爲有窮基數.

何則,羣 I 不能有何部分與之等值,故爲有窮羣;然附加一物於有窮羣之結果仍爲有窮羣,* 故以後各羣亦皆爲有窮羣.譬如, I 爲有窮羣, 故 II 亦然; II 爲有窮羣,故 III 亦然;餘仿此.

---

* 吾人可證之如下[坎托(G. Cantor),算學年刊(Math. Ann.)卷四十六第四九〇頁]:

如 M 指示有窮羣而 e 爲單一之物,則附加 e 於 M 而得之羣 Me 亦爲有窮羣.

令 G≡H 指示羣 G 與羣 H 等值.

如 Me 非有窮羣,則必與其某一部分等值, §7.

令 P 指示此部分,則 Me≡P.

(1) 假定 P 不含 e.

設 Me 中之 e 與 P 中之元 f 結合, P 中其餘之元所成之集以 P_1 代表之.

則因 Me≡P_1f 而 e≡f, 得 M≡P_1.

此事不可能,因 M 爲有窮羣而 P_1 則 M 之部分也, §7.

(2) 假定 P 含 e.

P 中之 e 與 Me 中之 e 結合爲不可能之事,因如此則 P 中其餘之元所成之集,既爲 M 之部分,又與 M 等值矣.

則假定 P 中之 e 與 Me 中之他元 g 結合,而 Me 中之 e 與 P 中之 f 結合.

如 Me≡P 在此一假設上成立,則吾人變更 e, f, g 諸元之組合方法,使 P 中之 e 與 Me 中之 e 結合,而 P 中之 f 與 Me 中之 g 結合時,此關係應仍成立.然適已證明如此則 P 之一部分將與 M 等值.故此一假設亦不可能.

其二. 有窮基數皆在此表中.

何則,依定義每一有窮基數必爲某一有窮羣之基數.然任舉一有窮羣M,吾人常能作一標識之羣III……I與之等值,對於每一物作一標識可矣.此標識羣必有最後之標識,故包含於§11之表中,因非然則此羣爲無盡列,故爲無窮羣,而M亦爲無窮羣矣.

其三. 此表中之基數無相等者.

今上已證明諸羣I, II, III,…… 皆爲有窮羣.故如在此諸羣中任取二羣,則其一必與其他之一部分等值甚明.故據§8之定義卽得本定理.

自然標尺 等式及不等式

13 **自然數** (Natural numbers) 符號1, 2, 3,……——或其名"一","二","三",……——稱爲正整數或自然數.故

一自然數爲一基數之符號.

14 **自然標尺** (Natural scale) 此諸數依其所代表之基數在§11表中之順序而排列時,卽得無盡符號列

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots,$$

或"一","二","三","四","五",……,稱爲自然標尺或自然數之標尺.

15 此標尺中之每一符號,示終於此之標尺之部分所有符號之個數.

譬如,4示符號1,2,3,4,之個數.何則,符號1,2,3,4之個數,與羣I,II,III,IIII之個數同,而後者又與末一羣IIII之標識之個數同故也,§8.一般的皆如此.

自然標尺之順序的性質　就其本身而論,自然標尺祇一相異符號之集,其中有最先之符號,即1;此符號有一定之後繼符號,即2;此符號又有一定之後繼符號,即3;餘仿此無終極;如此而已. 16

換言之,自然標尺祇一相異符號之集,其元依一定且已知之順序而排列,其中有最先之符號而無最後之符號,如此而已.

由此一觀點論之,自然數自身祇為順序之標識而已,其順序則默誦標尺時諸數因時間的關係而自然呈現者是矣.

不獨此標尺,凡集之以一定且已知之順序排列其元者,皆有下之性質甚明. 17

1. 關於其任二元,吾人得謂其一"居前"其他"隨後",且此"居前","隨後"二語,用於任一二元組時,與用於任他二元組時有同一之意義.

2. 任舉二元,吾人常能決定何者居前何者隨後.

3. 如a, b, 及c為任三元,而a居b前,b居c前,則a居c前.

與集有本具以上之性質者,亦有其元經吾人依自擇之法則排列後即然者.吾人皆稱之為**順序系統**(Ordinal system).

第一種集例如:(1)自然標尺自身;(2)時間上連續發生之事件;(3)沿一橫直線自左至右而排列之點列.第二種集例如依人名中字母之順序而排列之諸人之羣.

18 一集亦可有相一致(Coincident)之元.譬如,在一事件之羣中,二或更多之事件可以同時發生.

吾人稱此種之集為順序系統,如在其不相一致之元之間,1, 2, 3 諸關係仍為眞,而關於其相一致之元,則

4. 如 a 與 b 一致,而 b 與 c 一致,則 a 與 c 一致;

5. 如 a 與 b 一致,而 b 居 c 前,則 a 居 c 前.

19 基數間之大小關係,自然數以其標尺中之相關順序指示之.

何則,在任二與基數中,其自然數於標尺中在後者為大.

而"如第一基數小於第二基數,而第二基數小於第三基數,則第一基數小於第三基數"之關係,於標尺則有"如 a 居 b 前,而 b 居 c 前,則 a 居 c 前"之關係代表之.

實則吾人比較基數時除此法外殆絕少用他法者.吾人並不依§8之法直接比較物羣之基數.反之,吾人以適當之自然數代表之,而自其標尺中之相關順序推知何者為大何者為小.此事不須若何自覺的推較,因標尺深印於吾人腦際,故一聞任二自然數之名,何者居前何者隨後立辨也.譬如,告吾人以 A 城人口 120,000, B 城人口 125,000, 吾人立即斷定 B 城居民較多,因吾人知於標尺中 125,000, 在 120,000, 之後也.

20 **等式及不等式** 以後凡"數"字皆指自然數而言,§13;又諸文字 a, b, c 指示任意之自然數.

21 如 a 及 b 指示同一之數,即於自然標尺中相一致,吾人以下之等式(Equation)表之.