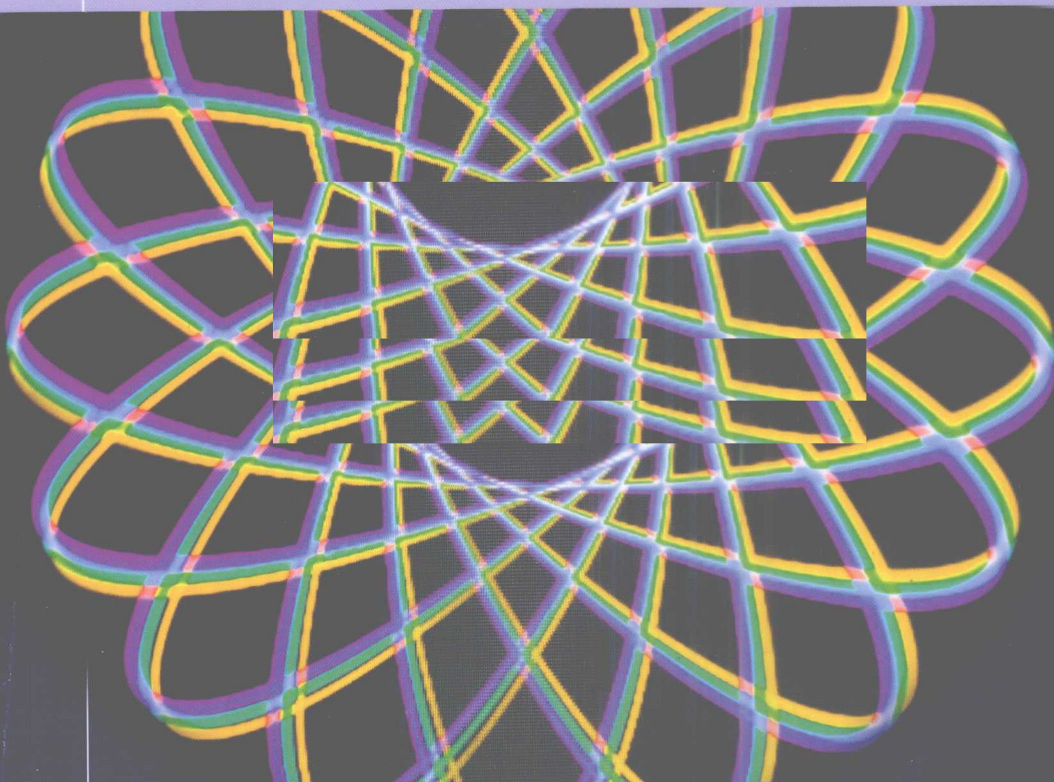
高等学校理工科数学类规划教材（创新系列）

数学物理方法

——理论、历史与计算机

郭玉翠 编著



大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

■ 高等学校理工科数学类规划教材（创新系列）

数学物理方法

——理论、历史与计算机

郭玉翠　编著

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法 / 郭玉翠编著. 一 大连 : 大连理工大学出版社，2010. 8

ISBN 978-7-5611-5750-3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①郭… Ⅲ. ①数学物理方法 Ⅳ. ①O411. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 162828 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

电话:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp. cn URL:http://www. dutp. cn

大连业发印刷有限公司印制 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:19. 25 字数:445 千字

2010 年 8 月第 1 版 2010 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:王 伟 责任校对:婕 琳

封面设计:季 强

ISBN 978-7-5611-5750-3 定 价:32. 00 元

前 言

“数学物理方法”是理工科大学生的一门重要基础课，本书参考高等院校数学物理方法课程教学大纲，并结合编著者多年来在北京邮电大学讲授这门课程的经验和体会以及在已编几版教材的基础上修改并增添内容而完成。

本书定名为《数学物理方法——理论、历史与计算机》，理论内容分为 8 章，包括数学物理方程及其定解条件的推导；分离变量法求解定解问题；二阶线性常微分方程的级数解法与本征值问题的提法与性质；Bessel 函数的性质与应用；Legendre 多项式的性质与应用；行波法和积分变换法求解定解问题；Green 函数法求解定解问题；积分方程和非线性微分方程简介等。

鉴于我们是把几百年发展起来的知识“浓缩”在几十个小时中讲授，为了使读者了解学科形成的思想轨迹和发展进程，进而启发思考和创新，在培养科学素养的同时，培养人文素养，除了讲述理工科数学物理方法的常规内容，我们还加入了科学家评介、历史事件分析等体现数学文化与发展的内容。这也是本套创新系列教材的特色之处。

关于“数学物理方法(或方程)”，甚至“偏微分方程”的发展历史，还没有现成的书籍对此专门介绍，资料散见于数学史和科学家传记等文献中。现在我们将其与本书理论内容相关的一些知识整理出来编进教材，供讲授和学习这门课程的师生朋友选读和体会。希望通过对这些思想脉络的理解和领悟，使学生对课程的思想和精髓有所认识。

在计算机应用深入普及的今天，应用数学软件“Maple”来辅助求解常微分方程、复杂代数方程(组)以及复杂积分等，是至关重要的。

本书可以作为高等院校通讯电子类、机械建筑类以及应用数学与应用物理等专业本科学生的教材或教学参考书。书中加“*”的内容可以根据学时情况选讲。

感谢北京邮电大学精品课程建设资金的支持！感谢北京邮电大学数学系王丽霞老师与大连理工大学出版社联合开展“创新系列教材”建设，让我们有幸参与其中，将多年的教学经验和体会凝练成书。在本书编写过程中，参考了一些文章和书籍，本书作者对这些文章和书籍的作者表示深深的谢意。

限于作者的水平，书中难免会有不当之处，恳请读者批评指正。如果您有任何建议或意见，请通过以下方式与我们联系：

电话 0411-84707962 84706670

邮箱 jcjf@dutp.cn

编著者

2010.8

目 录

绪 论 /1

第 1 章 数学物理方程及其定解条件 / 8

1.1 数学物理基本方程的建立 /8

1.1.1 波动方程 /8

1.1.2 热传导方程和扩散方程 /23

1.1.3 泊松方程和拉普拉斯方程 /26

1.1.4 亥姆霍兹方程 /27

1.2 定解条件 /28

1.2.1 初始条件 /29

1.2.2 边界条件 /29

1.3 定解问题的提法 /31

1.4 二阶线性偏微分方程的分类与化简 解的叠加原理 /32

1.4.1 含有两个自变量二阶线性偏微分方程的分类与化简 /32

1.4.2 线性偏微分方程的叠加原理 /38

1.5 历史注记——数学物理学家：达朗贝尔 /39

1.6 例题分析 /41

习题 1 /46

第 2 章 分离变量法 /48

2.1 (1+1)维齐次方程的分离变量法 /48

2.1.1 有界弦的自由振动 /48

2.1.2 有限长杆上的热传导 /56

2.2 二维 Laplace 方程的定解问题 /61

2.3 非齐次方程的解法 /67

2.4 非齐次边界条件的处理 /74

2.5 历史注记——数学物理学家：傅里叶 /79

2.6 例题分析 /82

习题 2 /90

第 3 章 二阶常微分方程的级数解法 本征值问题 /93

3.1 二阶常微分方程的级数解法 /93

3.1.1 常点邻域内的级数解法 /93

3.1.2 正则奇点附近的级数解法 /95

3.2 Legendre 方程的级数解 /97

3.3 Bessel 方程的级数解 /101

3.4 Sturm-Liouville 本征值问题 /107

3.4.1 Sturm-Liouville 方程 /107

3.4.2 本征值问题的一般提法 /108

3.4.3 本征值问题的一般性质 /109

3.5 历史注记——数学物理学家：刘维尔 /111

3.6 例题分析 /113

习题 3 /121

第 4 章 Bessel 函数的性质及其应用 /122

4.1 Bessel 方程的引出 /122

4.2 Bessel 函数的性质 /124

4.2.1 Bessel 函数的基本形态及本征值问题 /124

4.2.2 Bessel 函数的递推公式 /126

4.2.3 Bessel 函数的正交性和模方 /129

4.2.4 按 Bessel 函数的广义 Fourier 级数展开 /130

4.3 Bessel 函数在定解问题中的应用 /131

*4.4 修正 Bessel 函数 /137

4.4.1 第一类修正 Bessel 函数 /137

4.4.2 第二类修正 Bessel 函数 /138

*4.5 可化为 Bessel 方程的方程 /142

4.5.1 Kelvin (W. Thomson)方程 /142

4.5.2 其他例子 /142

4.5.3 含 Bessel 函数的积分 /143

4.6 历史注记——天文学家、数学家：贝塞尔 /144

4.7 例题分析 /145

习题 4 /154

第 5 章 Legendre 多项式及其应用 /156

5.1 Legendre 方程与 Legendre 多项式的引入 /156

5.2 Legendre 多项式的性质 /159

5.2.1 Legendre 多项式的微分表示 /159

5.2.2 Legendre 多项式的积分表示 /161

5.2.3 Legendre 多项式的母函数 /161

5.2.4 Legendre 多项式的递推公式 /163

5.2.5 Legendre 多项式的正交归一性 /164

5.2.6 按 $P_n(x)$ 的广义 Fourier 级数

展开 /166
5.2.7 一个重要公式 /166
5.3 Legendre 多项式的应用 /167
*5.4 关联 Legendre 多项式 /172
5.4.1 关联 Legendre 函数的微分表示 /172
5.4.2 关联 Legendre 函数的积分表示 /172
5.4.3 关联 Legendre 函数的正交性与模方 /173
5.4.4 按 $P_l^m(x)$ 的广义 Fourier 级数展开 /173
5.4.5 关联 Legendre 函数递推公式 /174
*5.5 其他特殊函数方程简介 /176
5.5.1 Hermite 多项式 /176
5.5.2 Laguerre 多项式 /178
5.6 历史注记——数学家:勒让德 /179
5.7 例题分析 /183
习题 5 /189
第 6 章 行波法和积分变换法 /191
6.1 一维波动方程的 d'Alember 公式 /191
6.2 三维波动方程的 Poisson 公式 /195
6.2.1 三维波动方程的球对称解 /195
6.2.2 三维波动方程的 Poisson 公式 /196
6.2.3 Poisson 公式的物理意义 /199
6.3 Fourier 积分变换法求定解问题 /202
6.3.1 预备知识——Fourier 变换及性质 /203
6.3.2 Fourier 变换法 /205
6.4 Laplace 积分变换法解定解问题 /208
6.4.1 Laplace 变换及其性质 /208
6.4.2 Laplace 变换法 /209
6.5 历史注记 /213
6.5.1 数学家、天文学家:拉普拉斯 /213
6.5.2 数学物理学家:泊松 /215
6.6 例题分析 /218
习题 6 /227
第 7 章 Green 函数法 /229
7.1 引 言 /229
7.2 δ 函数的定义与性质 /230
7.2.1 δ 函数的定义 /230
7.2.2 广义函数的导数 /231
7.2.3 δ 函数的 Fourier 变换 /232
7.2.4 高维 δ 函数 /233
7.3 Poisson 方程的边值问题 /233
7.3.1 Green 公式 /234
7.3.2 解的积分形式——Green 函数法 /234
7.3.3 Green 函数关于源点和场点是对称的 /238
7.4 Green 函数的一般求法 /239
7.4.1 无界区域的 Green 函数 /239
7.4.2 用本征函数展开法求边值问题的 Green 函数 /241
7.5 用电像法求某些特殊区域的 Dirichlet-Green 函数 /242
7.5.1 Poisson 方程的 Dirichlet-Green 函数及其物理意义 /242
7.5.2 用电像法求 Green 函数 /244
7.6 历史注记——数学物理学家:格林 /247
7.7 例题分析 /251
习题 7 /254
*第 8 章 积分方程和非线性微分方程简介 /256
8.1 积分方程的分类及解法 /256
8.1.1 积分方程的概念与分类 /256
8.1.2 退化核方程的求解 /257
8.1.3 积分方程的迭代解法 /261
8.1.4 对称核的 Fredholm 方程 /269
8.1.5 微分方程与积分方程的联系 /271
8.2 非线性微分方程及其某些解法 /273
8.2.1 求解非线性微分方程的函数变换方法 /274
8.2.2 非线性偏微分方程的孤立波解 /277
8.2.3 解析近似解与正则摄动法 /280
8.3 历史注记——数学家:庞加莱 /282
习题 8 /285
附 录 /288
附录 A 正交曲线坐标系中的 Laplace 算符 /288
附录 B Γ 函数的定义和基本性质 /294
附录 C 通过计算留数求拉普拉斯变换的反演 /295
附录 D Fourier 变换和 Laplace 变换简表 /297
参考文献 /302

绪 论

1. 什么是数学物理方法

含有未知函数的导数或微分的等式叫做微分方程. 当未知函数是一元函数，即方程中的未知函数只依赖于一个自变量时，这样的微分方程称为常微分方程；当未知函数是多元函数，即依赖于两个以上自变量时，这样的微分方程称为偏微分方程. 在学习常微分方程时，求解常微分方程的方法是“积分”，而积分一次会出现一个任意常数，所以 n 阶常微分方程的通解中含有 n 个任意常数，要确定这些常数，需要附加初始条件(或者边界条件)，常微分方程附加初始条件(或者边界条件) 称为定解问题.

偏微分方程的求解当然也要用“积分”，而积分常数不是“数”，而是“函数”. 例如，形式最简单的偏微分方程：

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

两边对“t”积分，得到其通解：

$$u(x,t) = f(x),$$

其中，$f(x)$ 是 x 的任意函数，它就是积分函数. 由于 $f(x)$ 是任意函数，所以在它确定之前，我们得不到关于方程(1) 的解的任何信息，而用初始条件(或边界条件) 来确定函数显然比确定“常数” 要困难得多. 因此偏微分方程的求解就比常微分方程的求解困难. 同时，解对条件的依赖也比常微分方程紧密得多. 这样，人们就逐渐认识到“数学意义上的” 偏微分方程意义的局限：通解是任意函数，且不用说方程是否“可积”，即可以用初等积分方法求解. 提到“可积”这个问题，我们马上联想到“可积” 问题真是了得，单说一阶常微分方程，“可积” 类型也只有“可分离变量方程”、“齐次方程”、“一阶线性方程(包括伯努利方程和几种特殊类型的 Riccati 方程)” 和一些符合一定条件的所谓“恰当方程”. 要研究二阶常微分方程的可积性，就需要动用诸如复变函数、代数群论等其他数学分支的方法，那么偏微分方程的“可积” 问题呢?一定更复杂，包含的数学手段也更加难深. 鉴于这些情况，人们就将偏微分方程研究方向的一部分集中于那些有物理背景的偏微分方程(物理学的发展正好需要) 上，这些方程中的自变量和函数有着鲜明的物理意义，有些问题的解可以通过实验唯象地给出. 这给偏微分方程的研究指明了方向，同时由于物理学上的需求，就诞生了专门研究有物理意义的偏微分方程的解法，以及解的意义的分析等问题的学科 —— 数学物理方程.

说到这里，读者明白了其实数学物理方程是指有物理背景，也就是从物理问题中提炼出来的偏微分方程. 然而，这里所说的偏微分方程指的还只是(直) 线性(linear) 偏微分方程. 因为非线性偏微分方程无论从解法上，还是解的性质的研究上，难度和复杂度都更

大，现在称为“高等数学物理方程”或“非线性数学物理方程”. 好，又弄清一个概念. 那么又有问题了：“为什么有好多书叫做《数学物理方法》呢？”“方程”、“方法”一字之差，有什么不同吗？有.

我们知道代数方程是否有解与讨论的数域有关，如方程

$$x^2 + 1 = 0$$

在实数域内无解. 也就是说，要表示这个方程的解，实数域是不够用的. 微分方程的解是函数，要表示微分方程的解是否也存在函数域不够用的情形呢？当然. 如下形式简单的常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin x}{x} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2,$$

就没有可以用初等函数[由常函数($y = C$)、指数函数($y = a^x$)、对数函数($y = \log_a x$)、幂函数($y = x^\mu$)、三角函数($y = \sin x$ 等)和反三角函数($y = \arcsin x$ 等)等6个基本初等函数经过有限次加、减、乘、除和有限次复合运算得到的函数]表示的解.

前文已经说过，偏微分方程或称数学物理方程作为一门学科，主要研究有物理意义的偏微分方程. 要解决这个由偏微分方程描述的问题，必须使方程有解. 这就引出了用来表示微分方程的解，又不是初等函数的函数——特殊函数(当然特殊函数不全是用微分方程的解定义的，还有用积分等形式定义的特殊函数等). 要讨论实际问题解的性质，就要讨论这些作为微分方程解的特殊函数的性质. 于是人们把数学物理方程连同特殊函数一起叫做数学物理方法. 当然数学物理方法不只包含“数学物理方程”和“特殊函数”两部分，有的还包含复变函数，有的还包含场论等知识. 现在工科各专业数学物理方法课程一般包含着数学物理方程和特殊函数两部分内容. 本书主要研究这两部分内容.

2. 数学物理方法的早期发展简介

18世纪中叶，对物理学中出现的偏微分方程的研究导致了数学分析学的一个新的分支——数学物理方程的建立.

J·达朗贝尔(D'Alembert)(1717—1783)、L·欧拉(Euler)(1707—1783)、D·伯努利(Bernoulli)(1700—1782)、J·拉格朗日(Lagrange)(1736—1813)、P·拉普拉斯(Laplace)(1749—1827)、S·泊松(Poisson)(1781—1840)、J·傅里叶(Fourier)(1768—1830)等人的工作为这一学科分支奠定了基础. 他们在考察具体的数学物理问题中，所提出的思想与方法，竟适用于众多类型的微分方程，成为19世纪末数学物理方程一般理论发展的基础.

19世纪，数学物理方程发展的序幕是由法国数学家傅里叶拉开的，他于1822年发表的《热的解析理论》是数学史上的经典文献之一. 傅里叶研究的主要是吸热或放热物体内部任何点处的温度随空间和时间的变化规律. 在对物体的物理性状做出一定的限制(如均匀、各向同性)后，他根据物理原理推导出了三维空间的热传导方程：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = k^2 \frac{\partial T}{\partial t},$$

其中，k 是一个参数，其值依赖于物体的质料. 傅里叶当时解决的是特殊的热传导问题：设所考虑的物体两端保持在零度，表面绝热且无热流通过的柱轴. 在此情形下求解上述热传导方程，因为柱轴只涉及一维空间，所以这个问题也就是求解偏微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k^2 \dfrac{\partial T}{\partial t}, \\ T(0,t) = 0,\ T(l,t) = 0,\ t > 0, \\ T(x,0) = f(x),\ 0 < x < l, \end{cases}$$

其中后面两项分别是边界条件和初始条件. 傅里叶为解这个方程用了分离变量法,他得到满足方程和边界条件的级数解为

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{e}^{-(n^2\pi^2/k^2 l^2)t} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

为了满足初始条件,必须有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

这就促使傅里叶不得不考虑任给一个函数,能否将它表示成三角级数的问题. 傅里叶得出的结论是:每个函数都可以表示成

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,\quad 0 < x < \pi.$$

这样,每个 b_n 可由上式乘以 $\sin kx (k = 1,2,\cdots)$,再从 0 到 π 积分而得到. 他还指出这个程序可以应用于表达式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,\quad 0 < x < \pi.$$

接着,他考虑了任何函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 的表达式,利用对称区间上的任何函数可以表示成一个奇函数和一个偶函数之和这一事实,傅里叶将区间 $(-\pi,\pi)$ 上的任何函数 $f(x)$ 表示为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其系数由

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\quad n \geqslant 1$$

确定. 这就是我们通常所称的傅里叶级数.

为了处理无穷区域上的热传导问题,傅里叶还导出了现在所谓的"傅里叶积分":

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

需要指出的是,傅里叶从来没有对"任意函数可以展成傅里叶级数"这一断言给出过任何完全的证明,他也没有说出一个函数可以展开为三角级数必须满足的条件. 然而傅里叶本人对此充满信心,因为他的信念有几何上的根据. 傅里叶的工作不仅发展了偏微分方程的理论,而且使函数概念得以改进,同时也标志着人们从解析函数或可展成泰勒级数的函数中解放出来. 傅里叶的前辈都曾坚持一个函数必须可用单个式子表示,而傅里叶级数却可以表示那些在区间 $(0,\pi)$ 或 $(-\pi,\pi)$ 的不同部分有不同解析式的函数,不论这些表示式是否相互连续地接合着. 特别是,一个傅里叶级数是在一整段区间上表示一个函数的,而一个泰勒级数仅在函数的解析点附近表示该函数.

19 世纪数学物理方程的另一个重要发展是围绕着位势方程来进行的,这方面的代表

人物格林(G. Green) 是一位磨坊工出身、自学成才的英国数学家. 位势方程也称拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

拉普拉斯曾采用球面调和函数法解这个方程,不过他得到一个错误的结论,认为当被吸引的点(x,y,z) 位于物体内部时这个方程也成立. 这个错误由泊松加以更正,泊松指出,如果点(x,y,z) 在吸引体内部,则满足方程$\nabla^2 V=-4\pi\rho$,其中 ρ 是吸引体密度,它也是 x, y, z 的一个函数. 拉普拉斯和泊松的方法都只适用于特殊的几何体,格林则认识到函数 V 的重要性,并赋予它"位势"(potential) 的名称. 与前人不同的是,格林发展了函数 V 的一般理论. 他求解位势方程的方法与用特殊函数的级数方法相反,称为奇异点方法. 他在 1828 年私人印刷出版的小册子《关于数学分析应用于电磁学理论》的一篇论文中,建立了许多对推动位势论进一步发展极为关键的定理与概念,其中以格林公式:

$$\iiint_{\Omega}(U\,\nabla^2 V-V\,\nabla^2 U)\mathrm{d}v=\iint_{\sigma}\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma$$

(n 为物体表面指向外部的法向,$\mathrm{d}v$ 是体积元,$\mathrm{d}\sigma$ 是面积元)

和作为一种带奇异性的特殊位势的格林函数概念影响最为深远.

格林是剑桥数学物理学派的开山祖师,他的工作培育了汤姆逊(W. Thomson)、斯托克斯(G. Stokes)、麦克斯韦(J. C. Maxwell) 等强有力的后继者,他们是 19 世纪典型的数学物理学家. 他们的主要目标,是发展求解重要物理问题的一般数学方法,而他们手中的主要武器就是偏微分方程,以至在 19 世纪,偏微分方程几乎变成了数学物理的同义词.

剑桥数学物理学派的贡献使经历了一个多世纪沉寂的英国数学在 19 世纪得以复兴,麦克斯韦在 1864 年导出的电磁场方程:

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\boldsymbol{H}&=\frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon\boldsymbol{E})}{\partial t},\\ \mathbf{rot}\boldsymbol{E}&=-\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu\boldsymbol{H})}{\partial t},\\ \mathrm{div}(\varepsilon\boldsymbol{E})&=\rho,\\ \mathrm{div}(\mu\boldsymbol{H})&=0\end{aligned}$$

是 19 世纪数学物理最壮观的胜利,正是根据对这组方程的研究,麦克斯韦预言了电磁波的存在,这不仅给科学和技术带来巨大的冲击,同时也使数学物理方程威名大振. 在第 1 章我们就会看到,由麦克斯韦方程组就可以推出波动方程. 爱因斯坦在一次纪念麦克斯韦的演讲中说:"偏微分方程进入理论物理学时是婢女,但逐渐变成了主妇." 他认为这是从 19 世纪开始的,而剑桥数学物理学派尤其是麦克斯韦在这一转变中起了重要的作用.

除了麦克斯韦方程,19 世纪导出的著名偏微分方程组还有黏性流体运动的纳维(C. L. M. H. Navier)- 斯托克斯方程和弹性介质的柯西方程等. 所有这些方程都不存在普遍解法. 不过,19 世纪的数学家们已经逐渐认识到:对于偏微分方程,无论是单个方程还是方程组,通解实际上不如初始条件和边界条件已给出的特殊问题的解有用. 因此他们在求解定解问题方面做了大量工作.

对 18、19 世纪建立起来的类型众多的微分方程(包括偏微分方程和常微分方程),数

学家们求显式解的努力往往失败，这种情况促使他们转而证明解的存在性．最先考虑微分方程解的存在性问题的数学家是柯西，他指出：在求显式解无效的场合常常可以证明解的存在性．他在19世纪20年代对形如 $y' = f(x, y)$ 的常微分方程给出了第一个存在性定理，这方面的工作被德国数学家李普希茨（R. Lipschitz）、法国数学家刘维尔（J. Liouville）和皮卡（C. E. Picard）等追随．柯西也是讨论偏微分方程解的存在性的第一人，他在1848年的一系列论文中论述了如何将任意阶数大于1的偏微分方程化为偏微分方程组，然后讨论了偏微分方程组解的存在性，并提出了证明存在性的强函数方法．柯西的工作后来被俄国女数学家柯瓦列夫斯卡娅（С. В. Ковалевская）独立地发展为包括拟线性方程和高阶微分方程组在内的非常一般的形式．有关偏微分方程解的存在唯一性定理在现代文献中就称为"柯西－柯瓦列夫斯卡娅定理"．

由于18世纪的大量开发，常微分方程的求解在19世纪反而局限于用分离变量法解偏微分方程时所得到的那些方程，并且多半使用级数解，这引导出一串特殊函数，如贝塞尔（Bessel）函数、高斯（Gauss）超几何函数等．在19世纪后半叶，对常微分方程研究的理论方面变得突出，并且在常微分方程解析理论和定性理论两个大的方向上开拓了常微分方程研究的新局面，其中重大的发展都与庞加莱（H. Poincare）的名字紧密联系．

庞加莱从27岁起任巴黎大学教授，直到去世．他是欧拉、柯西之后最多产的数学家，并且在研究领域的广泛方面很少有人能与他相比．他每年在巴黎大学讲授一门不同的科目，而在每一门科目中，他都留下他自己的创造印记．

庞加莱、克莱因和希尔伯特，是在19和20世纪数学交界线上高耸着的三个巨大身影．他们放射着19世纪数学的光辉，同时照耀着通往20世纪数学的道路．在19世纪末，数学发展呈现出一派生机勃勃的景象，这与18世纪形成了鲜明的对比．无论从内部需要还是外部应用看，数学家们似乎都有做不完的问题．1900年8月5日，庞加莱宣布巴黎国际数学家大会开幕，正是在这次会议期间，希尔伯特充满信心地走上讲台，以他著名的23个问题揭开了20世纪数学的序幕．

当研究在解决物理问题的过程中出现的具体微分方程时，往往会产生一些极具普遍性，起初并没有严格的数学根据而应用于范围广泛的物理问题的方法．例如，傅里叶方法、里茨（Ritz）方法、伽辽金（Галёркин）方法、摄动理论方法等就是这一类方法．这些方法应用的有效性成为试图对它们进行严格论证的原因之一．这就导致新的数学理论、新的研究方向的建立（傅里叶积分理论、本征函数展开理论和广义函数论等）．

3. 数学物理方法的近代发展——对推动物理学发展的意义

前面已经指出，数学物理方法产生于考察用某些具体偏微分方程描述的具体物理问题的研究，这些方程便得到数学物理方程的称谓．

数学在物理中应用的历史较长，18世纪是数学与经典力学相结合的黄金时期，19世纪数学应用的重点转移到电学与电磁学，并且由于剑桥学派的努力而形成了数学物理分支．进入20世纪以后，随着物理科学的发展，数学相继在应用于相对论、量子力学以及基本粒子理论等方面取得了一个又一个突破，极大地丰富了数学物理的内容，同时也反过来刺激了数学自身的进步．

在20世纪初狭义相对论和广义相对论的创立过程中，数学都建有奇功．1907年，德

国数学家闵可夫斯基(Minkowski)提出了“闵可夫斯基空间”,即将时间与空间融合在一起的四维时空 $\mathbf{R}^{3+1}$. 闵可夫斯基几何为爱因斯坦狭义相对论提供了适合的数学模型. 有了闵可夫斯基时空模型后,爱因斯坦又进一步研究引力场理论以建立广义相对论. 1912年夏他已经概括出新的引力理论的基本物理原理,但为了实现广义相对论的目标,还必须寻求理论的数学结构,爱因斯坦为此花费了3年的时间,最后在数学家格罗斯曼(Grossmann)介绍下掌握了发展相对论引力学说所必需的数学工具——以黎曼几何为基础的绝对微分学,亦即爱因斯坦后来所称的张量分析. 在1915年11月25日发表的一篇论文中,爱因斯坦终于导出了广义协变的引力场方程:

$$\mathbf{R}_{\mu\nu}=-k\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right),$$

其中,$g_{\mu\nu}$ 就是黎曼度量张量. 爱因斯坦指出:“由于这组方程,广义相对论作为一种逻辑结构终于大功告成!”

根据爱因斯坦的理论,时空整体是不均匀的,只是在微小的区域内可以近似地看作均匀. 在数学上,广义相对论的时空可以理解为一种黎曼空间,非均匀时空连续区可借助于现成的黎曼度量来描述. 这样,广义相对论的数学表述第一次揭示了非欧几何的现实意义,成为历史上数学应用最伟大的例子之一.

20世纪数学物理的另一项经典成果是量子力学数学基础的确立. 20世纪初,普朗克(M. Planck)、爱因斯坦、玻尔(N. Bohr)等创立了量子力学,但是到1925年为止,还没有一种量子理论能以统一的结构来概括这一领域已经积累的知识,当时的量子力学可以说是本质上相互独立的,有时甚至相互矛盾部分的混合体. 1925年有了重要进展,由海森堡(W. Heisenberg)建立的矩阵力学和由薛定谔发展的波动力学形成了两大量子理论,而进一步将这两大理论融合为统一的体系,便成为当时科学界的当务之急. 恰恰在这时,数学又起了意想不到的,但却是决定性的作用. 1927年,希尔伯特和冯·诺依曼、诺德海姆(L. Nordheim)合作发表了论文《论量子力学基础》,开始了用积分方程等分析工具使量子力学统一化的努力. 在随后两年中,冯·诺依曼又进一步利用他从希尔伯特关于积分方程的工作中提炼出来的抽象希尔伯特空间理论,去解决量子力学的特征值问题,并最终将希尔伯特的谱理论推广到量子力学中经常出现的无界算子情形,从而奠定了量子力学的严格数学基础. 1932年,冯·诺依曼发表了总结性著作《量子力学的数学基础》,完成了量子力学的公理化.

抽象的数学成果最终成为其他科学新理论的仿佛是量身定做的工具,在20世纪下半叶又演出了精彩的一幕,这就是大范围微分几何在统一场论中的应用. 广义相对论的发展,逐渐促使科学家们去寻求电磁场与引力场的统一表述,这方面第一个大胆的尝试是数学家外尔(H. Weyl)在1918年提出的规范场理论,外尔自己称之为“规范不变几何”. 统一场论的探索后来又扩展到基本粒子间的强相互作用和弱相互作用. 1954年,物理学家杨振宁和米尔斯(R. L. Mills)提出的“杨-米尔斯理论”,揭示了规范不变性可能是所有四种相互作用(电磁、引力、强、弱)的共性,开辟了用规范场论来统一自然界这4种相互作用的新途径. 数学家们很快就注意到杨-米尔斯理论所需要的数学工具早已存在,物理规范势实际上就是微分几何中纤维丛上的联络,20世纪30、40年代以来已经得到深入

的研究.不仅如此,人们还发现规范场的杨-米尔斯方程是一组在数学上有重要意义的非线性偏微分方程.1975 年以来,对杨-米尔斯方程的研究取得了许多重要成果,展示了统一场论的诱人前景,同时也推动了数学自身的发展.

4. 学习"数学物理方法"的方法

本课程作为数学物理方法的入门课程,主要研究以拉普拉斯方程、热传导方程和波动方程为代表的数学物理方程定解问题的各种解法和用来表示微分方程解的某些特殊函数的概念和性质.因此,数学物理方法的学习要以三类线性偏微分方程定解问题的解法为主线.同时考虑课程的特点:即与应用、物理的紧密联系.

对于每一类方程,首先需要对方程的导出有一定的了解.事实上,同一个方程可能有许多不同的来源,这一方面是偏微分方程理论具有广泛应用的原因之一.同时对于不同的来源进行类比研究可以更好地揭示物理过程的某些特性,因为某个具体物理特性在某个物理过程还没有被观察到或没有引起注意,而在另外某个物理过程已经被观察注意到了,如果这两个物理过程服从同一个偏微分方程,则在原来的物理过程中应该也具有这个特性.其次,在对数学模型进行研究之后,需要有意识地将数学解代回原来的物理意义中,去理解、解释物理现象.这一方面可以验证数学模型的有效性,另一方面可以更好地理解已知的物理现象,甚至预言新的物理现象.只有这样才能体会出数学物理方法理论是从物理等具体学科中发展出来,同时又服务于这些具体学科的思想,逐步提高分析、解决实际问题的能力.

最后,我们以数学史学家克莱因(Morris · Kline,1908.5.1—1992.5.10)在其著作《古今数学思想》中的一段话作为本绪论的结尾:"历史教导我们,一个科目的发展是由汇集不同方面的成果点滴积累而成的.我们也知道,常常需要几十年,甚至几百年的努力才能迈出有意义的几步.不但这些科目并未锤炼成无缝的天衣,就是那已经取得的成就,也常常只是一个开始,许多缺陷有待填补,或者真正重要的扩展还有待创造."

第1章 数学物理方程及其定解条件

1.1 数学物理基本方程的建立

所谓数学物理方程，是指从物理学、工程科学与技术科学的实际问题中导出的，反映物理量之间关系的偏微分方程和积分方程等. 本章介绍几类典型的二阶线性偏微分方程：波动方程、热传导方程、Laplace方程、Poisson方程和Helmholtz方程的建立，定解条件的给出、定解问题的提法以及线性偏微分方程的分类与化简等.

1.1.1 波动方程

1. 均匀弦的微小横振动

著名法国数学物理学家达朗贝尔在1746年发表的《张紧的弦振动时形成的曲线研究》的论文中，对弦振动问题进行了研究，并提出了波动方程的概念，现在我们已经知道它是一大类偏微分方程的典型代表. 下面我们就从弦振动问题开始，介绍波动方程.

弦，即均匀柔软的细线. 这句话中包含三个假设.

(1) 弦是细线：弦的截面直径与长度相比可以忽略，因此弦可以视为一根曲线；

(2) 弦是均匀的，它的线密度 ρ 是常数；

(3) 弦是柔软的，它在形变时不抵抗弯曲，弦上各质点间的张力方向与弦的切线方向一致，弦的伸长形变与张力的关系服从胡克(Hooke)定律.

现在有一根长为 l 的弦，平衡时沿直线拉紧，除了受不随时间变化的张力及弦本身的重力外，不受其他外力的作用. 下面研究其作微小横振动的规律. 所谓"横向"是指全部运动出现在一个平面内，而且弦上的点沿垂直于 x 轴的方向运动(图1.1.1). 所谓"微小"是指运动的幅度及弦在任意位置处切线的倾角都很小，以致它们的高于一次方的项可以忽略不计.

设弦上具有横坐标为 x 的点，在时刻 t 的位置为 M，位移 NM 记为 u，显然，在振动过程中位移 u 是变量 x 和 t 的函数，即 $u=u(x,t)$. 现在来建立位移 u 满足的方程. 采用微元法，我们把弦上点的运动先看成小弧段的运动，然后再考虑小弧段趋于零的极限情况. 在弦上任取一弧段 $\overset{\frown}{MM'}$，其长为 $\mathrm{d}s$，弧段 $\overset{\frown}{MM'}$ 两端所受的张力依次记作 T, T'. 现在考虑弧段 $\overset{\frown}{MM'}$ 在 t 时刻的受力和运动情况.

根据牛顿第二运动定律，作用于弧段上任一方向上力的总和等于这段弧的质量乘以该方向上的运动加速度.

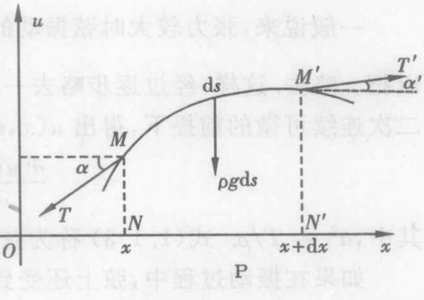


图 1.1.1

在 x 方向弧段 $\overset{\frown}{MM'}$ 的受力总和为 $-T\cos\alpha+T'\cos\alpha'$，由于弦只作横向运动，所以

$$-T\cos\alpha+T'\cos\alpha'=0. \tag{1.1.1}$$

按照上述弦作微小振动的假设，可知在振动过程中弦上 M 点与 M' 点处切线的倾角都很小，即 $\alpha\approx 0,\alpha'\approx 0$，从而由

$$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\cdots$$

可知，当略去 α 和 α' 的所有高于一次方的项时，就有

$$\cos\alpha\approx 1,\quad \cos\alpha'\approx 1.$$

代入式(1.1.1)，便可近似得到

$$T=T'.$$

在 u 方向弧段 $\overset{\frown}{MM'}$ 的受力总和为 $-T\sin\alpha+T'\sin\alpha'-\rho g\,\mathrm{d}s$，其中 $-\rho g\,\mathrm{d}s$ 是弧段 $\overset{\frown}{MM'}$ 的重力，g 为重力加速度. 由牛顿第二运动定律，有

$$-T\sin\alpha+T'\sin\alpha'-\rho g\,\mathrm{d}s=\rho\mathrm{d}s\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \tag{1.1.2}$$

这里 $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ 近似地表示小弧段在时刻 t 沿 u 方向的加速度，小弧段的质量为 $\rho\mathrm{d}s$.

因为当 $\alpha\approx 0,\alpha'\approx 0$ 时，有

$$\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\approx\tan\alpha=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

$$\sin\alpha'\approx\tan\alpha'=\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x},$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2}\,\mathrm{d}x\approx\mathrm{d}x.$$

将以上关系式代入式(1.1.2)，得

$$T\left[\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]-\rho g\,\mathrm{d}x\approx\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x. \tag{1.1.2$'$}$$

上式左端方括号的部分是由于 x 产生 $\mathrm{d}x$ 的变化引起的 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ 的改变量，可以用微分近似代替，即

$$\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\approx\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]\mathrm{d}x=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x.$$

于是式(1.1.2)′ 成为

$$\left[T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\rho g\right]\mathrm{d}x\approx\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x,$$

或

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\approx\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+g.$$

一般说来，张力较大时弦振动的速度变化很快，即$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$要比$g$大得多，因此又可以把$g$略去.这样，经过逐步略去一些次要的量，抓住主要的量，在$u(x,t)$关于x和t都是二次连续可微的前提下，得出$u(x,t)$应近似地满足方程：

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1.1.3}$$

其中，$a^2 = T/\rho$. 式(1.1.3)称为弦振动方程，也称一维波动方程.

如果在振动过程中，弦上还受到一个与弦的振动方向平行的外力作用，且假定在时刻t弦上x点处的外力密度为$F(x,t)$，显然式(1.1.1)和式(1.1.2)分别为

$$-T\cos\alpha + T'\cos\alpha' = 0,$$

$$F\mathrm{d}s - T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g\,\mathrm{d}s = \rho \mathrm{d}s\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

重复上面的推导，可得到有外力作用时弦的振动方程：

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1.1.4}$$

其中，$f(x,t) = \frac{1}{\rho}F(x,t)$，表示$t$时刻单位质量的弦在$x$点所受的外力.式(1.1.4)称为弦的强迫振动方程.

式(1.1.3)和式(1.1.4)的差别在于式(1.1.4)的右端多了一个与未知函数u无关的项$f(x,t)$，这个项称为自由项.含有非零自由项的方程称为非齐次方程，自由项恒等于零的方程称为齐次方程.式(1.1.3)为一维齐次波动方程，式(1.1.4)为一维非齐次波动方程.

2. 均匀弹性杆的微小纵振动

一根弹性杆，如果其中任意小段受外界影响发生纵振动，必然使杆上与它相邻的部分发生伸长或缩短，这段杆的伸长或缩短又使与它相邻的部分产生伸长或缩短，依此类推，杆上任意小段的纵振动必然传播到整根杆.这种振动的传播就是波.现在推导杆的纵振动方程.设杆的弹性模量(杆伸长单位长度所需要的力)为E，质量密度为ρ，作用于杆上的外力密度为$F(x,t)$.

取x轴沿杆的轴线方向，以$u(x,t)$表示x点t时刻的纵向位移.使用微元法，考虑杆上的一小段$[x,x+\Delta x]$的运动情况.以$\sigma(x,t)$记杆上x点t时刻的应力(杆在伸缩过程中各点之间单位截面上的作用力)，其方向沿x轴，现在求杆上x点t时刻的应变(相对伸长).如图1.1.2所示，$A'B'$表AB段(平衡位置)在t时刻所处的位置，则AB段的相对伸长是

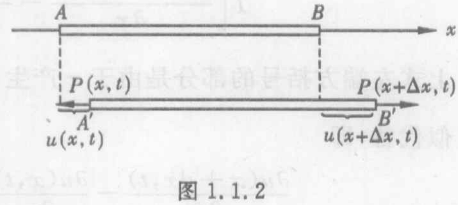


图 1.1.2

$$\frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{u(x+\Delta x,t) - u(x,t)}{\Delta x}, \tag{1.1.5}$$

而x点的应变则是

$$\lim_{\Delta x \to \infty} \frac{u(x+\Delta x,t) - u(x,t)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

由于振动是微小的(不超过杆的弹性限度)，由胡克定律有

$$\sigma(x,t) = E\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}. \tag{1.1.6}$$

设杆的横截面为 S(设为常数)，则由牛顿第二定律，$[x, x+\Delta x]$ 段的运动方程是

$$\begin{aligned}
&\rho S\Delta x \frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial^2 t}\bigg|_{\xi=x+\theta_1\Delta x} \\
&= \sigma(x+\Delta x,t)S - \sigma(x,t)S + F(x+\theta_2\Delta x,t)S\Delta x \\
&= ES\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=x+\Delta x} - ES\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=x} + F(x+\theta_2\Delta x,t)S\Delta x \quad (1.1.7)\\
&\approx ES\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial \xi^2}\bigg|_{\xi=x}\Delta x + F(x+\theta_2\Delta x,t)S\Delta x,
\end{aligned}$$

其中，常数 θ_1,θ_2 满足 $0\leqslant\theta_i\leqslant 1(i=1,2)$. 利用式(1.1.6)，而且将函数 $\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x+\Delta x}$ 在 $\xi=x$ 处展开为泰勒级数并取前两项. 以 $S\Delta x$ 除上式的两端后，令 $\Delta x\to 0$ 取极限，得到

$$\rho u_{tt}(x,t) = Eu_{xx}(x,t) + F(x,t). \tag{1.1.8}$$

记

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}},\quad f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho},$$

则方程最后变为

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t).$$

这就是杆的纵振动方程，也是一维波动方程.

由以上两个例子可见，不同物理过程中的规律可以用同一个数学物理方程来表示，并且这种性质不只是存在于以上两个例子中，在以下的推导中，还可以看到这种现象. 正因为如此，才有可能用一种物理现象去模拟另一种物理现象.

3. 传输线方程

对于直流电或低频的交流电，电路的基尔霍夫(Kirchhoff)定律指出同一支路中电流相等. 但对于较高频率的电流(指频率还没有高到能显著地辐射电磁波的情况)，电路中导线的自感和电容效应不可忽略，因而同一支路中电流可能不再相等.

现在考虑一来一往的高频传输线，将它抽象成具有分布参数的导体(图 1.1.3)，我们来研究这种导体内电流流动的规律. 在具有分布参数的导体中，电流通过的情况，可以用电流强度 I 与电压 V 来描述，此处 I 与 V 都是 x,t 的函数，记作 $I(x,t)$ 与 $V(x,t)$. 以 R，L，C，G 分别表示下列参数：

R—— 每一回路单位的串联电阻；

L—— 每一回路单位的串联电感；

C—— 每单位长度的分路电容；

G—— 每单位长度的分路电导.

采用微元法，根据基尔霍夫第二定律，在长度为 Δx 的传输线中，电压降应等于电动势之和，即

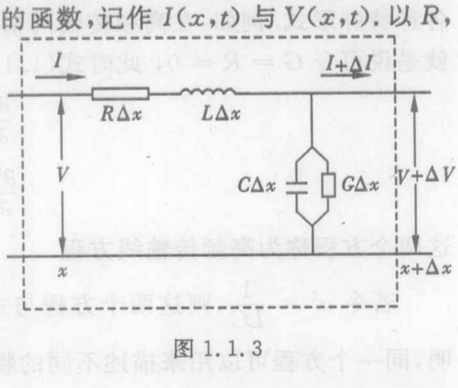


图 1.1.3