高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版·孙训方　方孝淑　关来泰编

九章丛书

材料力学Ⅰ

第五版

同步辅导及习题全解

主　编　郭维林　刘东星

·知识点窍　·逻辑推理　·习题全解

·全真考题　·名师执笔　·题型归类

新版

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

材料力学 I （第五版）
同步辅导及习题全解

主　编　郭维林　刘东星

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是与高等教育出版社出版，孙训方、方孝淑、关来泰编的《材料力学 I》（第五版）一书配套的同步辅导书。

本书共有 9 章，分别介绍轴向拉伸和压缩、扭转、弯曲应力、梁弯曲时的位移、简单的超静定问题、应力状态和强度理论、组合变形及连接部分的计算、压杆稳定、截面的几何性质。本书按教材内容安排全书结构，针对各章思考题和习题给出详细解答，思路清晰，逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书可作为高等学校土建、水利类各专业及相关工程技术人员的参考书，也可作为自学者的辅导书及教师的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

材料力学（第五版）同步辅导及习题全解. 1 / 郭维林，刘东星主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2010.8
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5084-7743-5

I. ①材… II. ①郭… ②刘… III. ①材料力学一高等学校一教学参考资料 IV. ①TB301

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第149914号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：宋俊娥　封面设计：李佳

书　名	高校经典教材同步辅导丛书 **材料力学 I（第五版）同步辅导及习题全解**
作　者	主　编　郭维林　刘东星
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京市梦宇印务有限公司
规　格	170mm×227mm　16 开本　18 印张　442 千字
版　次	2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
印　数	0001—5000 册
定　价	21.80 元

前　　言

材料力学一直是大中专院校土建和水利类专业学生的必修课程，其内容随着土建和水利类技术的发展而日趋丰富。这就产生了一个矛盾：一方面学生因所修课程越来越多而导致课外时间减少；另一方面因技术的进步又要求学生去了解比以前更多的知识。

本书正是为了解决这一矛盾而精心编写的。

作为与孙训方、方孝淑、关来泰编的教材《材料力学Ⅰ》（第五版）同步配套的习题全程辅导书，本书对教材中的思考题和课后习题进行详细解答，帮助学生提高分析问题、解决问题的能力。

教材中课后习题丰富、层次多样，本书从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论，促使其掌握基本解题方法。除了有传统辅导书的解题过程外，本书主要有以下特点：概念清晰、步骤完整、数据准确、附图齐全，在解题思路和解题技巧上进行精练分析和引导，巩固所学知识，达到举一反三的效果。

本书可供使用孙训方、方孝淑、关来泰编的《材料力学Ⅰ》（第五版）教材的学生和教师参考，并可作为使用其他教材的读者或考研者的参考书。

由于编者水平有限及时间仓促，不妥之处在所难免。希望读者不吝批评、指正。

编者

2010 年 8 月

目 录

第二章

轴向拉伸和压缩

思考题详解

2－1 试论证杆件横截面上各点处的正应力若相等，则截面上法向分布内力的合力必能通过横截面的形心。反之，法向分布内力的合力虽通过横截面的形心，但正应力在横截面上各点处却不一定相等。

【证明】 设有任意横截面的杆件，如思考题 2－1 图(a)所示，O 点为其横截面的形心，设该截面上的法向分布内力的合力为 F，其作用点到该截面形心的距离为 δ。设分布内力的集度为 σ。

由合力矩定理，合力 F 对 y 轴之矩等于分布内力对 y 轴之矩的代数和，即

$$F\delta\sin\theta=\int_A(\sigma\mathrm{d}A)_z=\sigma\int_A z\mathrm{d}A$$

因为 z 轴通过截面形心，即

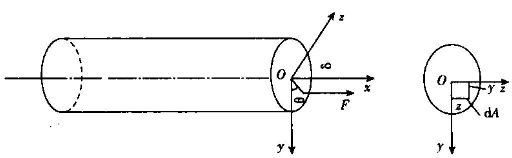
$$z_cA=\int z\mathrm{d}A=0$$

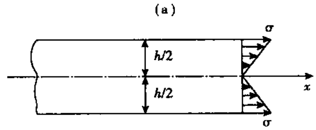
所以 $$F\delta\sin\theta=0 \tag{1}$$

同理， $$F\delta\cos\theta=\int_A(\sigma\mathrm{d}A)_y=\sigma\int_A y\mathrm{d}A=0 \tag{2}$$

综合式(1)，(2)分析，得 $\delta=0$

因此当横截面上各点处的正应力相等时，其法向分布内力的合力必通过横截面的形心。

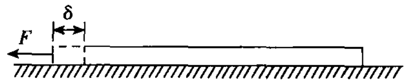




思考题 2－1 图

若横截面上正应力的分布情况如思考题2－1图(b)所示,则显然其法向分布内力的合力 F 通过截面形心,但正应力并非均匀分布。

2－2　横截面面积为 A,单位长度重量为 q 的无限长弹性杆,自由放在摩擦因数为 f 的粗糙表面上,如思考题2－2图所示。试求欲使该杆在端点产生位移 δ 时所需的力 F。已知杆的弹性模量为 E。



思考题2－2图

【解题过程】　设杆在轴向力 F 作用下,长度为 l 的一段杆内产生的伸长量为 δ,该段杆与支承面之间摩擦力的集度为 qf,所以该段内任意横截面 x 面上的轴力为

$$F_{\mathrm{N}}=F-qfx \tag{1}$$

在长度为 l 处,杆横截面上的轴力为零,即

$$F_{\mathrm{N}}(l)=F-qfl=0, l=F/qf \tag{2}$$

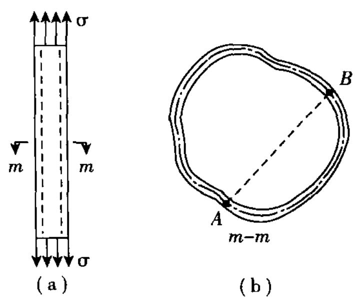
杆在 l 长度内的伸长量为

$$\delta=\int_0^l \mathrm{d}(\Delta l)=\int_0^l \frac{F-qfx}{EA}\mathrm{d}x=\frac{Fl-qfl^2/2}{EA}$$

将式(2)代入上式,整理后得

$$F=\sqrt{2\delta qfEA}$$

2－3　受轴向拉伸的闭合薄壁截面杆如思考题2－3图所示。已经 A,B 两点间的距离 a、材料的弹性常数 E,ν。试证明两点间距离的改变量为 $\Delta_{AB}=-\nu\sigma a/E$。



思考题2－3图

【证明】　在轴向拉力作用下,该杆产生均匀变形,其横向线应变为

$$\varepsilon'=-\nu\frac{\sigma}{E}$$

所以 A,B 两点间距离的改变量为

$$\Delta_{AB}=a\varepsilon'=-\nu a\sigma/E$$

2-4　试论述为什么轴向拉(压)杆斜截面上的应力是均匀分布的?

【解题过程】　轴向拉(压)杆在同方向两个斜截面间的纵向纤维变形相同,因此应力均匀分布。

2-5　弹性模量 E 的物理意义是什么? 如低碳钢的弹性模量 $E_s=210\text{GPa}$,混凝土的弹性模量 $E_c=28\text{GPa}$,试求下列各项:

(1)在横截面上正应力 σ 相等的情况下,钢和混凝土杆的纵向线应变 ε 之比;

(2)在纵向线应变 ε 相等的情况下,钢和混凝土杆横截面上正应力 σ 之比;

(3)当纵向线应变 $\varepsilon=0.000\ 15$ 时,钢和混凝土杆横截面上正应力 σ 的值。

【解题过程】　弹性模量 E 是表征材料抵抗弹性变形的能力。

(1)在横截面上正应力 σ 相等的情况下

$$\varepsilon_s/\varepsilon_c=\frac{\sigma/E_s}{\sigma/E_c}=\frac{E_c}{E_s}$$

(2)在纵向线应变相等的情况下

$$\frac{\sigma_s}{\sigma_c}=\frac{E_s\varepsilon_s}{E_c\varepsilon_c}=\frac{E_s}{E_c}$$

(3)当 $\varepsilon=0.000\ 15$ 时

钢杆横截面上的正压力　$\sigma_s=E_s\varepsilon=210\times10^9\times1.5\times10^{-4}=31.5\text{MPa}$

混凝土杆横截面上的正压力　$\sigma_c=E_c\varepsilon=28\times10^9\times1.5\times10^{-4}=4.2\text{MPa}$

2-6　若在受力物体内某点处,已测得 x 和 y 两方向均有线应变,试问在 x 和 y 两方向是否都必定有正应力? 若测得仅 x 方向有线应变,则是否 y 方向必无正应力? 若测得 x 和 y 方向均无线应变,则是否 x 和 y 方向都必无正应力?

【解题过程】　若在受力物体内某点处已测得 x 和 y 两方向均有线应变,则在 x 和 y 两方向不一定都有正应力。例如,杆在 x 方向受轴向拉(压),则 x 方向有正应力 σ_x,y 方向不受力,即 $\sigma_y=0$。但横向效应使 y 方向产生线应变 $\varepsilon_y=\varepsilon'-\nu\varepsilon_x$。

若测得仅在 x 方向有线应变,则由广义胡克定律求得

$$\sigma_y=\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x$$

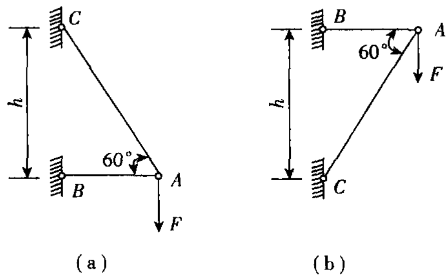
可知 y 方向有可能有正应力。

若测得 x 和 y 方向均无线应变,则由广义胡克定律求得

$$\sigma_x=\sigma_y=\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z$$

可知 x 和 y 方向都有可能有正应力。

2-7　直径相同的铸铁圆截面杆,可设计成思考题 2-7 图(a)和图(b)所示的两种结构形式。试问哪种结构所承受的荷载 F 大? 大多少?



思考题 2－7 图

【解题过程】 首先由平衡方程可求出两种结构中各杆的轴力。图(a)的结构中 $F_{NAC}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}F$，为拉力；$F_{NAB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}F$，为压力。图(b)的结构中 $F_{NAC}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}F$，为压力；$F_{NAB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}F$，为拉力。

因为铸铁材料在压缩时的强度极限比在拉伸时要大得多，因此应对这两个结构的受拉构件进行强度分析。

设图(a)结构所承受的许用荷载为 $[F_a]$，图(b)结构所承受的许用荷载为 $[F_b]$，则有

图(a)结构 $$F_{NAC}=\frac{2}{\sqrt{3}}F_a\leqslant A[\sigma_{拉}]$$

$$[F_a]=\frac{\sqrt{3}}{2}A[\sigma_{拉}]$$

图(b)结构 $$F_{NAB}=\frac{1}{\sqrt{3}}F_b\leqslant A[\sigma_{拉}]$$

$$[F_b]=\sqrt{3}A[\sigma_{拉}]$$

所以 $$[F_b]=2[F_a]$$

即图(b)结构所承受的荷载要比图(a)结构所承受的荷载大 1 倍。

2－8 由某种材料制成的拉杆，如果实际上是由于 $\tau_{\pm45^\circ}=\tau_u$ 而引起强度破坏，试问是否可用 $\sigma_0=\sigma_u$ 作为强度破坏的判据？这里 σ_u 和 τ_u 是指拉杆材料发生强度破坏时横截面上的正应力和 45°斜截面上的切应力。

【解题过程】 由拉(压)杆斜截面上的应力计算公式

$$\tau_{\pm45^\circ}=\pm\frac{\sigma_0}{2}\sin(2\times45^\circ)=\pm\frac{\sigma_0}{2}$$

得 $$\tau_u=\frac{\sigma_u}{2}$$

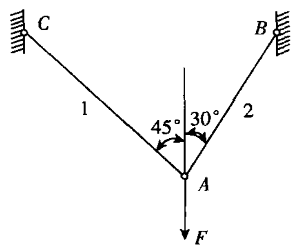
所以，对于轴向拉伸杆件，可以用 $\sigma_0=\sigma_u$ 作为强度破坏的判据。

2－9 拉伸试样的断后伸长率为 $\delta=\dfrac{l_1-l}{l}\times100\%=\dfrac{\Delta l}{l}\times100\%$，而试样的纵向线应变为 $\varepsilon=\dfrac{\Delta l}{l}=\dfrac{\Delta l}{l}\times100\%$。可见，两者的表达式相同，试问能否得出结论：试样的断后伸长率等于其纵向线

应变。

【解题过程】 试样拉断后弹性变形恢复，伸长率只反映塑性变形；纵向线应变即包括塑性变形也包括弹性变形，所以伸长率不等于纵向线应变。

2-10 在思考题 2-10 图所示结构中，杆 1 和杆 2 的许用应力分别为$[\sigma]_1$和$[\sigma]_2$，横截面面积分别为 A_1 和 A_2，则两杆各自的许可轴力分别为$[F_{N1}]=[\sigma]_1A_1$和$[F_{N2}]=[\sigma]_2A_2$。若根据结点 A 的平衡条件 $\sum F_y=0$ 求得结构的许可荷载，则$[F]=[F_{N1}]\cos30°$。试问结论是否正确？为什么？



思考题 2-10 图

【解题过程】 该结论不正确。

结构的许可荷载$[F]$是指两根杆中若有一根杆的轴力首先达到许可轴力时所对应的荷载值。

由平衡方程可求得两杆内的轴力分别为

$$F_{N1}=\frac{\sin30°}{\cos45°(\sin30°+\cos30°)}F=0.518F$$

$$F_{N2}=\frac{1}{(\sin30°+\cos30°)}F=0.732F$$

由强度条件

对 1 杆　$F_{N1}=0.518F\leqslant[F_{N1}]=[\sigma]_1A_1$

$F\leqslant1.93[\sigma]_1A_1$

对 2 杆　$F_{N2}=0.732F\leqslant[F_{N2}]=[\sigma]_2A_2$

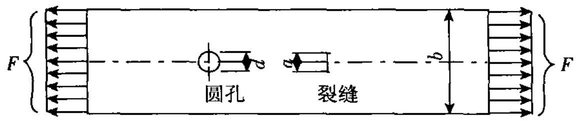
$F\leqslant1.366[\sigma]_2A_2$

所以该结构的许可荷载应取

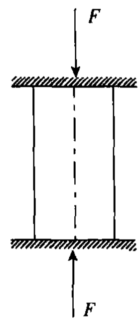
$$[F]=\min\{1.93[\sigma]_1A_1,1.366[\sigma]_2A_2\}$$

2-11 在一长线条的中部，打出一小圆孔和切出一横向裂缝，如图所示。若小圆孔的直径 d 与裂缝的长度 a 相等，且均不超过纸条宽度 b 的十分之一$\left(d=a\leqslant\frac{b}{10}\right)$。小圆孔和裂缝均位于纸条宽度的中间，然后在纸条两端均匀受接，试问纸条将从何处破裂，为什么？

【解题过程】 因为裂缝部位的截面变化比圆孔部位剧烈，应力集中程度大，所以纸条在裂缝部位破裂。



思考题 2-11 图



思考题 2-12 图

2-12　轴向压缩时的最大切应力发生在45°的斜截面上,而由铸铁的压缩试验发展,试样的破坏是大致沿55°的斜截面剪断的。若铸铁的内摩擦因数$f\approx 0.35$,试证试样受压时(如图),其破坏面法线与试样轴线间的倾角约为55°。

(提示:考虑材料的内摩擦,在临近破坏时,导致斜截面发生错动的应是斜截面上的切应力τ_α与摩擦力集度$f\sigma_\alpha$之差。)

【解题过程】　由 $\tau_\alpha=\dfrac{\sigma_0}{2}\sin 2\alpha,\sigma_\alpha=\sigma_0\cos^2\alpha,f=0.35$ 有

$$\tau_\alpha-f\sigma_\alpha=\frac{\sigma_0}{2}\sin 2\alpha-0.35\sigma_0\cos^2\alpha$$

上式对α求导有,

$$\frac{d(\tau_\alpha-f\sigma_\alpha)}{d\alpha}=\sigma_0(\cos 2\alpha+0.35\sin 2\alpha)=\sigma_0\sin(2\alpha+\varphi)$$

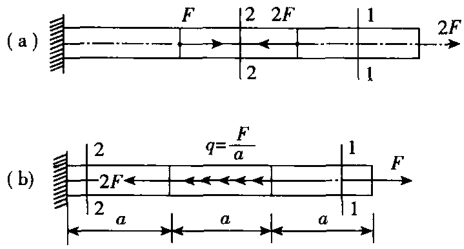
其中

$$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+0.35^2}},\cos\varphi=\frac{0.35}{\sqrt{1+0.35^2}},\varphi\approx 70^\circ$$

令$\dfrac{d(\tau_\alpha-f\sigma_\alpha)}{d\alpha}=0$得$\alpha$最小正数解为$\alpha=55^\circ$,此时$\tau_\alpha-f\sigma_\alpha$有最大值。因此铸铁压缩的破坏面为55°。

习题详解

2-1　试求习题2-1图示各杆1-1和2-2横截面上的轴力,并作轴力图。



习题 2-1 图

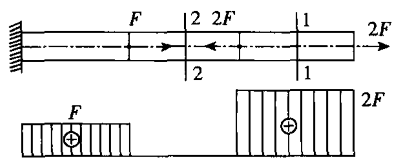
【解题过程】

(a)分别对各截取部分建立平衡方程

$$\sum F_x = 0$$

得 $$F_{N1} = 2F, F_{N2} = 0$$

轴力图如续题 2-1 图(a-1)所示。

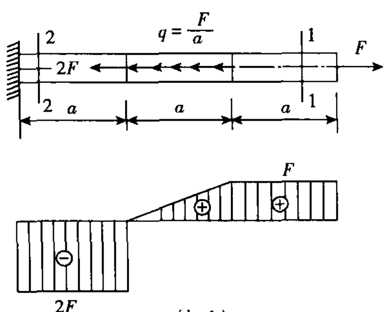


(a-1)

续题 2-1 图

(b)　分别对各截取部分建立平衡方程 $\sum F_x = 0$，求得截面 1 和截面 2 上的轴力分别为 $F_{N1} = F, F_{N2} = -2F$(压力)

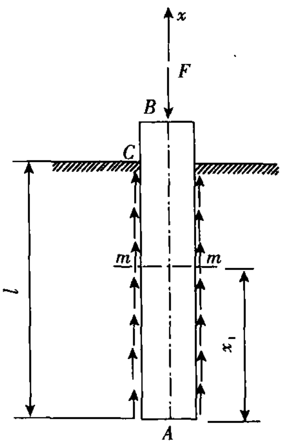
轴力图如续题 2-1 图(b-1)所示。



(b-1)

续题 2-1 图

2-2 一打入地基内的木桩如图所示,沿杆轴单位长度的摩擦力为$f=kx^2$(k为常数),试作木桩的轴力图。



习题2-2图

【解题过程】由整体平衡方程

$$\int_0^l kx^2\mathrm{d}x-F=0$$

解得 $$k=\frac{3F}{l^3}$$

取m-m截面下半部为研究对象,设轴力为F_N,列平衡方程

$$\int_0^{x_1}kx^2\mathrm{d}x+F_N=0$$

解得 $$F_N=-F\left(\frac{x_1}{l}\right)^3$$

图略。

2-3 石砌桥墩的墩身高$l=10\text{m}$,其横截面尺寸如习题2-3图所示。荷载$F=1\ 000\text{kN}$,材料的密度$\rho=2.35\times10^3\text{kg/m}^3$,试求墩身底部横截面上的压应力。

【解题过程】 桥墩横截面的面积为

$$A=3\times2r+\pi r^2=9.14\text{m}^2$$

桥墩的自重P为

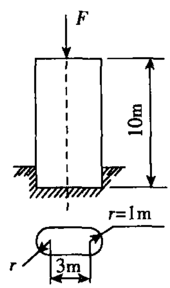
$$P=\rho glA=2.35\times10^3\times9.8\times10\times9.14=2\ 104.9\text{kN}$$

桥墩底部截面内的轴力为

$$F_N=-F-P=-(1\ 000+2\ 104.94)=-3\ 104.94\text{kN}$$

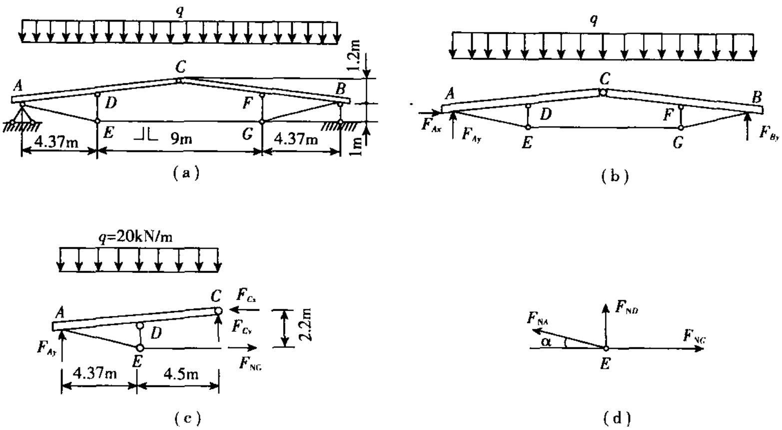
桥墩底部横截面上的应力为

$$\sigma=\frac{F_N}{A}=\frac{-3\ 104.94\times10^3}{9.14}\text{Pa}=-0.34\text{MPa(压应力)}$$



习题2-3图

2-4 习题2-4图(a)为一混合屋架结构的计算简图。屋架的上弦用钢筋混凝土制成。下面拉杆和中间竖向撑杆用角钢构成,其截面均为两个75mm×8mm的等边角钢。已知屋面承受集度为$q=20\text{kN/m}$的竖直均布荷载。试求拉杆AE和EG横截面上的应力。



习题 2-4 图

【解题过程】 以整个结构为研究对象，其受力图如习题 2-4 图(b)所示。由对称性可知

$$F_{Ay} = F_{By} = q \times (4.37 + 9 + 4.37)/2 = 177.4\text{kN}$$

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} = 0$$

求拉杆 EG 的轴力。取半个屋架为分离体，其受力图如习题 2-4 图(c)所示。

建立平衡方程

$$\sum M_C = 0, F_{NG} \times 2.2 - F_{Ay} \times 8.82 + q \times \frac{1}{2} \times 8.82^2 = 0$$

将 $F_{Ay} = 177.4\text{kN}, q = 20\text{kN/m}$ 代入上式求解，得 $F_{NG} = 357.62\text{kN}$。

求拉杆 AE 的轴力。取节点 E 为研究对象，其受力图如习题 2-4 图(d)所示。由几何关系，知

$$\cos\alpha = \frac{4.37}{\sqrt{4.37^2 + 1}} = 0.975$$

建立平衡方程

$$\sum F_x = 0, F_{NA}\cos\alpha = F_{NG}$$

$$F_{NA} = \frac{F_{NG}}{\cos\alpha} = \frac{357.62}{0.975} = 367\text{kN}$$

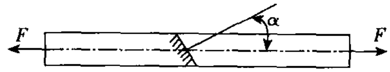
查表知：75mm × 8mm 等边角钢的截面面积 $A = 11.503\text{cm}^2$。

则拉杆 AE 和 EG 横截面上的应力分别为

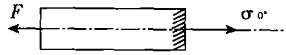
$$\sigma_{AE} = \frac{F_{NA}}{2A} = \frac{367 \times 10^3}{2 \times 11.503 \times 10^{-4}}\text{Pa} = 159.4\text{MPa}$$

$$\sigma_{EG} = \frac{F_{NG}}{2A} = \frac{357.62 \times 10^3}{2 \times 11.503 \times 10^{-4}}\text{Pa} = 155.4\text{MPa}$$

2-5　习题 2-5 图(a)所示拉杆承受轴向拉力 $F = 10\text{kN}$，杆的横截面面积 $A = 100\text{mm}^2$。如以 α 表示斜截面与横截面的夹角，试求(1)当 $\alpha = 0°, 30°, -60°$时各斜面上的正应力和切应力，并用图表示其方向；(2)拉杆的最大正应力和最大切应力及其作用的截面。



(a)



(b)

习题 2－5 图

【解题过程】 （1）首先求出拉杆横截面上的应力为

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{10\times 10^3}{100\times 10^{-6}}\text{Pa} = 100\text{MPa}$$

由拉杆斜截面上应力的计算公式

$$\sigma_\alpha = \sigma_0\cos^2\alpha,\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2}\sin2\alpha$$

当 $\alpha = 0°$时，

$$\sigma_{0°} = \sigma_0 = 100\text{MPa}$$

$$\tau_{0°} = 0$$

应力方向如习题 2－5 图(b)所示。

当 $\alpha = 30°$时，

$$\sigma_{30°} = \sigma_0\cos^2 30° = 100\times\frac{3}{4} = 75\text{MPa}$$

$$\tau_{30°} = \frac{\sigma_0}{2}\sin(2\times30°) = 43.3\text{MPa}$$

当 $\alpha = -60°$时，

$$\sigma_{-60°} = \sigma_0\cos^2(-60°) = \frac{10000}{100}\cos^2(-60°) = 25\text{MPa}$$

$$\tau_{-60°} = \frac{\sigma_0}{2}\sin(-120°) = \frac{10000}{100\times2}\sin(-120°) = -43.3\text{MPa}$$

（2）
$$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{10\times10^3}{100} = 100\text{MPa}$$

由 $\sigma_\alpha = \sigma_0\cos^2\alpha$ 有

当 $\cos\alpha = 1$，即 $\alpha = 0$ 时，$\sigma_{\alpha\max} = 100\text{MPa}$

由 $\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2}\sin2\alpha$ 有

当 $\sin2\alpha = 1$，即 $\alpha = 45°$时，$\tau_{\alpha\max} = 50\text{MPa}$

2－6 一木桩受力如习题 2－6 图(a)所示。柱的横截面为边长 200mm 的正方形，材料可认为符合胡克定律，其弹性模量 $E = 10\text{GPa}$。如不计柱的自重，试求：

（1）作轴力图；

（2）各段柱横截面上的应力；

(3)各段柱的纵向线应变；

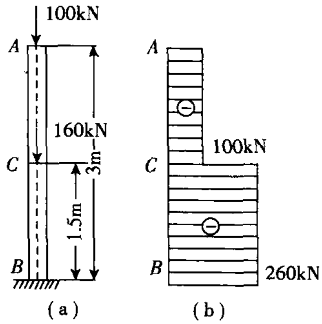
(4)柱的总变形。

【解题过程】 (1)作轴力图

由平衡条件知，柱横截面上的轴力分别为

$$F_{NAC} = -100\text{kN}, F_{NBC} = -260\text{kN}$$

该柱的轴力图如习题 2-6 图(b)所示。



习题 2-6 图

(2)计算各段柱横截面上的应力

$$\sigma_{AC} = \frac{F_{NAC}}{A} = -\frac{100\times10^3}{200\times200\times10^{-6}}\text{Pa} = -2.5\text{MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{NBC}}{A} = -\frac{260\times10^3}{200\times200\times10^{-6}}\text{Pa} = -6.5\text{MPa}$$

(3)各段柱的纵向线应变

$$\varepsilon_{AC} = \frac{\sigma_{AC}}{E} = -\frac{2.5\times10^6}{10\times10^9} = -0.25\times10^{-3}$$

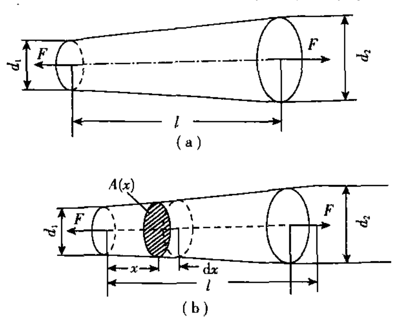
$$\varepsilon_{BC} = \frac{\sigma_{BC}}{E} = -\frac{6.5\times10^6}{10\times10^9} = -0.65\times10^3$$

(4)柱的总变形

$$\begin{aligned}\Delta l &= \varepsilon_{AC}l_{AC} + \varepsilon_{BC}l_{BC} \\ &= -0.25\times10^{-3}\times1.5 - 0.65\times10^{-3}\times1.5 \\ &= -1.35\times10^{-3}\text{m} = -1.35\text{mm}\end{aligned}$$

即柱的总的压缩量为 1.35mm。

2-7　习题 2-7 图(a)所示圆锥形杆受轴向拉力作用，试求杆的伸长。



习题 2-7 图

【解题过程】　这是一变截面杆。由几何关系知，任意横截面的直径 $d = d_1 + (d_2 - d_1)\frac{x}{l}$。

任意横截面的面积

$$A(x)=\frac{\pi}{4}d^2=\frac{\pi}{4}\left[d_1+(d_2-d_1)\frac{x}{l}\right]^2$$

所以,圆锥形杆受轴向拉力作用时,其伸长量为

$$\Delta l=\int_0^l\frac{F_N\mathrm{d}x}{EA(x)}=\frac{4F}{\pi E}\int_0^l\frac{\mathrm{d}x}{\left[d_1+(d_2-d_1)\frac{x}{l}\right]^2}$$

$$=\frac{4F}{\pi E}\left[-\frac{1}{\frac{d_2-d_1}{l}d_2}+\frac{1}{\frac{d_2-d_1}{l}d_1}\right]=\frac{4Fl}{\pi E(d_2-d_1)}\left(\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_2}\right)$$

$$=\frac{4Fl}{\pi Ed_1d_2}$$

2-8　(1)试证明受轴向拉伸(压缩)的圆截面杆横截面沿圆周方向的线应变 ε_s 等于直径方向的线应变 ε_d。

(2)一根直径为 $d=10\text{mm}$ 的圆截面杆,在轴向拉力 F 作用下,直径减小 0.002 5mm。如材料的弹性模量 $E=210\text{GPa}$,泊松比 $\nu=0.3$,试求轴向拉力 F。

(3)空心圆截面钢杆,外直径 $D=120\text{mm}$,内直径 $d=60\text{mm}$,材料的泊松比 $\nu=0.3$。当其受轴向拉伸时,已知纵向线变 $\varepsilon=0.001$,试求其变形后的壁厚 δ。

【解题过程】　(1)设杆横截面的直径为 d,其周线的长度 $s=\pi d$。

由线应变的定义可知,圆截面杆沿直径方向的线应变为

$$\varepsilon_d=\frac{\Delta d}{d}$$

当直径的改变量为 Δd 时,圆周线的长度为 $s_1=\pi(d+\Delta d)$。因此,沿圆周方向的线应变为

$$\varepsilon_s=\frac{\Delta s}{s}=\frac{s_1-s}{s}=\frac{\pi(d+\Delta d)-\pi d}{\pi d}=\frac{\Delta d}{d}=\varepsilon_d$$

即受轴向拉伸(压缩)的圆截面杆横截面沿圆周方向的线应变等于沿直径方向的线应变。

(2)当杆受轴向拉伸(压缩)时,由胡克定律知,轴向线应变 $\varepsilon=\dfrac{\sigma}{E}$

因此,由纵向线应变 ε 和横向线应变 ε_d 之间的关系式 $\varepsilon_d=-\nu\varepsilon$,有

$$\varepsilon_d=\frac{\Delta d}{d}=-\nu\varepsilon=-\nu\frac{\sigma}{E}=-\nu\frac{F}{EA}$$

所以 $F=-\dfrac{\Delta dAE}{d\nu}=-\dfrac{0.002\,5\times10^{-3}\times\dfrac{\pi}{4}\times10^2\times10^{-6}\times210\times10^9}{10\times10^{-3}\times0.3}=13.75\text{kN}$

(3)因为　　$\varepsilon_d=\dfrac{\Delta D}{D}=-\nu\varepsilon$

所以　　$\Delta D=-\nu\varepsilon D=-0.3\times0.001\times120\times10^{-3}=0.036\times10^{-3}\text{m}$

该圆截面杆变形后的壁厚为

$$\delta=(D-d-\Delta D)/2=(120\times10^{-3}-60\times10^{-3}-0.036\times10^{-3})/2$$

$$=29.99\times10^{-3}=29.99\text{mm}$$