高等院校教材

理工农林专业通用教材

高等数学（下册）

· 高等数学编写组　编 ·

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

中国人民大学出版社

高等院校教材

理工农林专业通用教材

高等数学（下册）

· 高等数学编写组　编 ·

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/高等数学编写组编．
北京：中国人民大学出版社，2009
高等院校教材．理工农林专业通用教材
ISBN 978-7-300-11399-9

Ⅰ．①高…
Ⅱ．①高…
Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 203796 号

高等院校教材
理工农林专业通用教材
高等数学（下册）
高等数学编写组　编
Gaodeng Shuxue

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242(总编室)		010－62511398(质管部)
	010－82501766(邮购部)		010－62514148(门市部)
	010－62515195(发行公司)		010－62515275(盗版举报)
网　　址	http：//www. crup. com. cn		
	http：//www. ttrnet. com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东方圣雅印刷有限公司		
开　　本	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2010 年 2 月第 1 版
印　　张	25.75 插页 1	**印　　次**	2010 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	467 000	**定　　价**	29.80 元

高等院校教材
理工农林专业通用教材

主　编
张义侠

副主编
陈凡红　牛玉玲　丁茂震

内容简介

本书是依据教育部主持制定的非数学专业《本科数学基础课程教学基本要求》，并针对理、工、农、林等专业数学教学计划为 140～180 学时的教学需要而编写的. 教材内容在保证上述基本要求的前提下，兼顾拓宽知识的需要，以适应不同要求和不同层次的教学.

全书分上、下册，上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分以及定积分的应用，共七章. 高等数学中用到的极坐标和行列式等基本知识是中学阶段没有讲授的内容，特在书后的附录中对其加以介绍. 下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、无穷级数以及微分方程，共五章. 书中注有⊛的内容，可根据教学计划学时的多少加以取舍. 略去这些内容并不影响教学内容的完整性及严谨性. 作为续篇，傅里叶级数及曲线积分和曲面积分两章，是针对计划学时较多的数学教学或报考研究生部分专业的需要而编写的，可供教学或自学选用.

章后配有深度不同的课后习题. 同时出版与教材配套的《高等数学习题解答》上、下册.

前　言

17 世纪，人们通过对天体力学等学科的研究，催生了微积分学的创立．自英国的牛顿和德国的莱布尼茨创立独立于古典几何和代数之外的微积分学这一新的数学分支伊始，它就是与力学、物理学以及几何直观紧密相连的．正因为如此，微积分随即被广泛地运用于各个科学领域中．但是其后，它在很长时间未能脱胎于几何直观和力学、物理学的背景，其许多内容缺乏严谨的理论和确切的数学描述，因而局限了它自身的发展和更有效地为其他领域所运用．经过后继数学家的不断探索，直至 19 世纪初，法国数学家柯西，在牛顿-莱布尼茨奠定的微积分学的重要思想方法的基础上，对其中的一些重要概念给予了精确的数学描述，构建了比较完备的理论体系，从此微积分学成为推动包括数学学科自身和自然科学、工程技术以及社会科学在内的一切领域发展的强大动力．

微积分学的发展历史启示我们，学习微积分，既要注重联系实际，了解建立数学概念和方法的实际背景，又要注意掌握其分析和推理的思想方法，培养严谨的数学思维的能力，以便为学习后续的数学课程和相关知识打下坚实的数学基础，并且提高利用数学工具分析和解决实际问题的能力．

我们在传承我国数学分析教材重归纳、演绎、推理的优秀传统的基础上，更加注重分析、综合和实用性，对传统教材的内容和结构加以调整，编写了这本教材.

编写过程中，我们注意教材内容与初等数学及后续数学课程的衔接，譬如，近年的教学实践证明，删去传统的高等数学教材中复习基本初等函数的部分，会在很大程度上影响到教学效果，因此在本书中我们恢复了对基本初等函数的复习和提高的内容. 再如，分段函数的导数是学习中的难点和要点，也是后继课程要用到的知识，在导数运算这一节，我们把分段函数的导数列为其中一段. 广义积分中，变上限的分段函数的积分是后续的概率论中某些随机变量的分布函数的计算形式，但是由于一般高等数学教材中没有这一类型积分的实例，所以在概率论教学的这一环节，学生普遍感到难以理解和掌握，于是，我们在教材中编入了这一类型积分的例题及习题. 又如，重积分是化成单积分计算的，其关键在于确定积分限，而定限要依据积分域（平面域或空间域）的不等式表示，这对初学者往往是个难点，是重积分计算难学的症结所在，在重积分计算这一节中，作为预备知识，我们单列一段讲述这部分内容.

建立数学概念，应由产生概念的现实背景引入，并且应使一些重要概念的形成或定义的过程成为分析、认识、推理的过程，这样，才能使读者理解这一概念的深层含义. 譬如，“微分形式”和在此基础上建立的微元法是数学分析及其应用的核心内容，故我们在建立微分及全微分的概念和介绍微元法时，是着重遵循这一思路进行讲述的. 我们本着同样的原则，建立梯度及续篇中的散度、旋度的概念，而不是以这个数量或向量的计算公式来定义这个量，以便使读者通过这个概念的产生背景和建立过程，理解这一概念的深刻含义，从而不仅会计算，也会用以分析解决实际问题.

由于我们的教材是面向非数学专业的读者，在教材中我们略去了某些并非学习后续课程或报考研究生所需要的内容以及某些证明过程，对部分的极限定义，我们给出了相对确切，但并非完全精确的分析定义（同时为了适应不同层次的教学需要，我们在注有⊛的部分，补充了严格的分析定义，以备取舍）. 但对重要的定理或法则则给予了严格、精确的证明. 对于数学内容的表述，力求通俗易懂，清晰准确，不为不必要的复杂的形式和符号所赘.

在汲取和借鉴国内外传统教材的优点的基础上，结合我们长期教学实践的点滴经验，编写了这本教材. 不足之处，谨望数学同行和读者给予指正，以便再版时加以修正和补充.

编者

目　录

第八章

空间解析几何与向量代数

第一节　向量及其线性运算

为了学习多元微积分及研究空间几何问题，本章介绍空间解析几何. 所谓空间解析几何，就是用代数方法研究空间的几何问题，作为基础首先引入向量的概念；进一步，为了深入研究向量的运算问题，我们建立空间直角坐标系，把向量放在坐标系里来讨论. 向量是研究后续空间几何问题的有力工具.

一、向量的概念

向量是因力学、物理学以及一些技术科学的需要而建立的数学概念，特别是电磁学、流体力学等学科的发展促使人们更加广泛而深入地研究向量的理论. 向量不仅在许多科学技术领域中有重要的应用，同时也是研究数学中许多问题的重要工具.

本节讨论向量的线性运算，即向量的加减法、向量与数量的乘法等运算.

现实世界中的一些物理量，如力、位移、速度、加速度等，这些量既有大小，又有方向．这一类的量称为向量或矢量．

在几何上，向量可以用空间的一个有向线段来表示，这个有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向（见图 8—1）

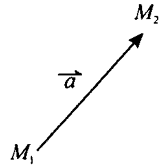

图 8—1

以 M_1 为起点、M_2 为终点的有向线段所表示的向量，记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$．向量也可用拉丁字母上面加一个箭头来表示，如 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{v}$ 等，也可用粗体字来表示如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 等．向量的大小或长度称为向量的模，记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 或 $|\vec{a}|$、$|\boldsymbol{a}|$，模是数量．模是 1 的向量称为单位向量．

起点固定的向量称为固定向量，例如，质点运动到某一点的速度是与该点的位置有关的，所以速度是固定向量．起点可以在向量所在直线上任意移动的向量称为滑动向量，例如作用在刚体上的力就是滑动向量，因为它的起点在刚体内力的作用线上任意移动，对刚体产生的效果是一样的．

但是向量的最主要、最一般的特征是它的大小和方向，所以在数学中研究向量，我们只考虑它的大小和方向，而不考虑它的起点在什么位置，也就是说，我们假定向量的起点是可以任意移动的，这样的向量称为自由向量．以后提到的向量均指自由向量．在处理具体问题时，遇到固定向量或滑动向量的情况，必要时可给予特别考虑．

自由向量既然是不考虑起点，那么当两个向量大小相等，方向相同时，我们就说两个向量相等，也就是说，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向，且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，即 $\vec{a}=\vec{b}$．

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

由力学实验我们知道，两个力作用在物体上同一点，合力的方向是以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为两边的平行四边形的对角线的方向，大小等于对角线的长，对于速度也有同样的结果，因此我们用这种方法确定两个向量之和，这个法则称为平行四边形法（见图 8—2）．

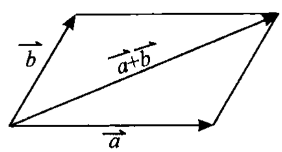

图 8—2

如果向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的起点不在同一点，就平移其中一个向量，使两个向量的起点重合.

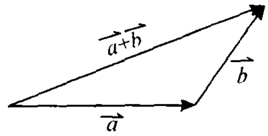

图 8—3

作两个向量的合向量还可以用另一种方法，即三角形法，将向量 $\vec{b}$ 平行移动，使 $\vec{b}$ 的起点与向量 $\vec{a}$ 的终点重合，那么由 $\vec{a}$ 的起点到 $\vec{b}$ 的终点的向量就是合向量 $\vec{a}+\vec{b}$（见图 8—3）.

将三角形法推广，作向量 $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_n$（$n\geqslant 3$）的合向量时，可以向量 $\vec{a}_i$ 的终点为起点作向量 $\vec{a}_{i+1}$（$i=1$，2，…，n），即可以向量 $\vec{a}_1$ 的终点为起点作向量 $\vec{a}_2$，…，以向量 $\vec{a}_{n-1}$ 的终点为起点作向量 $\vec{a}_n$，那么由 $\vec{a}_1$ 的起点到 $\vec{a}_n$ 的终点的向量即为合向量 $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n$，这种方法称为折线法.

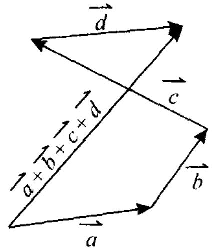

图 8—4

例如四个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ 之和的作法（见图 8—4）.

与向量 $\vec{a}$ 的模相等，而方向相反的向量称为 $\vec{a}$ 的负向量，记作 $-\vec{a}$.

如同数量的运算一样，我们规定减法是加法的逆运算．两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 之差 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$，于是，按照三角形法，以向量 $\vec{a}$ 的终点为起点，作向量 $-\vec{b}$，那么由 $\vec{a}$ 的起点到 $-\vec{b}$ 的终点的向量即向量 $\vec{a}-\vec{b}$（见图 8—5）.

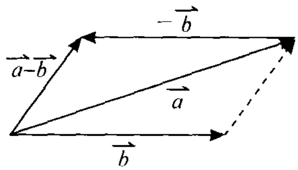

图 8—5

由图 8—5 可见，也可按如下方法作 $\vec{a}-\vec{b}$，即使向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的起点重合，那么，由 $\vec{b}$ 的终点到 $\vec{a}$ 的终点的向量即为 $\vec{a}-\vec{b}$.

运算中有时遇到 $\vec{a}-\vec{a}$ 的情形，为了方便，记 $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$，称 $\vec{0}$ 为零向量，其模为零，方向是任意的.

2. 向量与数量的乘法

设 λ 为实数，$\vec{a}$ 为向量，规定 $\lambda\vec{a}$ 为一向量.

其模 $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向；

$\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向；

$\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

于是有如下结论：

【定理】 设向量 $\vec{a}\neq\vec{0}$，则向量 $\vec{b}$ 与向量 $\vec{a}$ 平行的充要条件是存在唯一实数 λ，使 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，即

$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\Longleftrightarrow\vec{b}=\lambda\vec{a}\qquad\text{（证略）}$$

与非零向量同向的单位向量，以 $\vec{e}_a$ 或 $\vec{a}_0$ 表示，显然

$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{e}_a$$

因为可以平移向量，使几个向量的起点重合，那么通过平移使几个相互平行的向量起点重合后，它们是在同一直线上，所以两个向量相互平行，可以说两个向量共线.

假如经过平移使几个向量的起点重合后，这些向量在同一平面上，就说这些向量共面.

根据向量线性运算的法则，可得如下运算：

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

$$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$$

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

也就是说，向量加减法及实数与向量的乘法的运算律与数量加减法及乘法的运算律相同.

【例 1】 平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点为 M（见图 8—6），设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，试用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$.

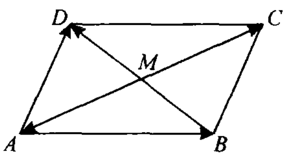

图 8—6

【解】 由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{MA},$$

于是 $$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$

$$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),$$

又 $$-\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD},$$

所以　$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$,

$$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}).$$

第二节　空间直角坐标系与向量的投影表达式

一、空间直角坐标系

为了用代数方法研究空间几何问题，就需要把空间曲线和曲面用代数方程来表示，作为基础，首先要建立空间的点与数的对应关系，为此需要建立空间直角坐标系.

取空间一点 O 为原点，由点 O 引出相互垂直的三条数轴：Ox 轴，Oy 轴，Oz 轴，统称为坐标轴. 通常用右手系确定它们的方向，即伸直大拇指、食指、中指，使它们相互垂直，以食指指向 Ox 方向，中指指向 Oy 方向，直立的大拇指指向 Oz 的方向.

三个轴确定的三个平面 xOy、yOz、zOx 称为坐标平面. 三个坐标面把整个空间分成八个部分，每个部分称为一个卦限，依次用Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示（见图 8—7），这个三维坐标系可用 $Oxyz$ 表示.

设 M 为空间任一点，过 M 作三个平面分别垂直于 Ox、Oy、Oz 轴，与三个坐标轴的交点依次为 A，B，C（见图 8—8），三个有向线段的值分别为 $OA=x$，$OB=y$，$OC=z$.

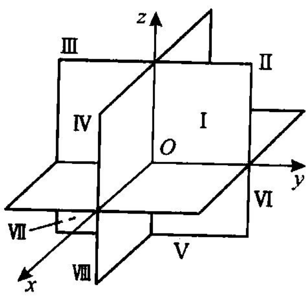

图 8—7

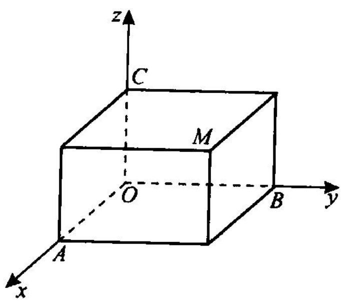

图 8—8

空间确定一点 M，就对应唯一确定的三元有序数组 (x, y, z)；反之，任给一个三元有序数组 (x, y, z)，就对应着以 x，y，z 为坐标的轴上三点 A，B，C. 过 A，B，C 三点分别垂直于 Ox 轴、Oy 轴，Oz 轴的三个平面的交点就是空间确定的一点. 这就是说，空间任一点与三元有序数组 (x, y, z) 是一一对应的，因此就可以用三元有序数组确定空间点的位置. (x, y, z) 称为 M 点的坐标，x，y，z 分别称为 M 点的横坐标，纵坐标和立坐标.

建立了空间的点与数组的对应关系之后，在此基础上就可以把空间曲线和曲面用代数方程来表示，从而就可以用代数方法研究空间的几何问题. 所以我们说，空间直角坐标系建立了空间的点与三元有序数组 (x, y, z) 的一一对应关系，它是数与形统一的基础.

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点，过 M_1，M_2 分别作平行于坐标平面的平面，形成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体（见图 8—9），在直角三角形 M_1NM_2 及直角三角形 M_1PN 中用勾股定理知

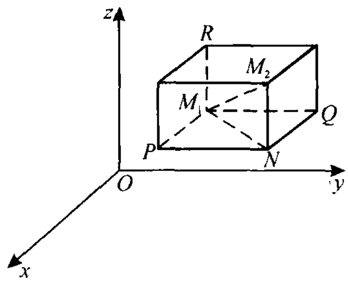

图 8—9

$$|M_1M_2| = \sqrt{|M_1N|^2 + |NM_2|^2}$$
$$= \sqrt{|M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2},$$

而 $\qquad |M_1P| = |x_2 - x_1|$，$|PN| = |y_2 - y_1|$，$|NM_2| = |z_2 - z_1|$，

于是可得空间任意两点的距离公式

$$|\boldsymbol{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

特别地，点 $M(x, y, z)$ 到原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$|\boldsymbol{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

【例 1】 在 y 轴上求一点 M，使点 M 到 $A(1, 0, 2)$，$B(3, 1, 1)$ 两点的距离相等.

【解】 设点 M 的坐标为 $(0, y, 0)$，据题意，有 $|MA| = |MB|$，

即 $\qquad \sqrt{(1-0)^2 + (0-y)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (1-y)^2 + (1-0)^2}$

两边平方后化简，得 $y = 3$.

故所求点为 $M(0, 3, 0)$.