面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

线性代数

敖长林　宋仁学　主编

中国农业出版社

面向 21 世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

线 性 代 数

敖长林　宋仁学　主编

中 国 农 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/敖长林，宋仁学主编. －北京：中国农业出版社，2000.12

面向21世纪课程教材

ISBN 7－109－06648－7

Ⅰ.线… Ⅱ.①敖…②宋… Ⅲ.线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第55772号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路2号）

（邮政编码 100026）

出版人：沈镇昭

责任编辑 朱 雷

中国农业出版社印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行

2001年1月第1版　　2001年1月北京第1次印刷

开本：787mm×960mm 1/16　　印张：17

字数：303千字　　印数：1～10 000册

定价：23.40 元

前言

由于电子计算机的飞速发展和广泛应用，使许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决，于是作为离散问题的表述，数据的存贮以及各类数值计算方法的基础——线性代数，就成为理工、农林、经济、管理各专业本科生以及从事实际工作的科技人员和管理人员必修的课程。

本书是作为教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”立项项目《面向21世纪高等农业院校本科数学系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践》的研究成果之一，经过几年教学实践及课题组同志们的讨论，确定了编写本书的基本思想：一是解决问题、模型化和应用，二是强调与计算机结合，引入相应的数学软件，加入数学实验的教学内容。多年的教学实践和调查表明，许多学生感到线性代数课程抽象难学，学完之后也不知道通过这门课程学到了什么，因而远不如学微积分那样有兴趣。究其原因就是在线性代数课程中未能把线性代数的抽象性与其应用性有机地结合起来。编写过程中我们注意了以下几点：

1. 努力体现实用性，尽量用与当今社会生活和现代科技密切相关的实例，适当进行理论证明的方法，在中学数学的基础上讲解有关的内容，目的是避免那种远离实际而只讲数学的抽象定义、定理、证明的教学模式。

2. 尽量突出数学建模的思想。

3. 一定程度体现数学实验和运用计算机的重要性，即通过学生自己做实验，有所发现，从而导致对某些结论的猜测，并自己从数学上严格证明或否证这些猜测，从而真正领会线性代数的原理和方法。

4. 本书对目前流行的MATLAB语言进行了介绍。

本书第一、二、三、四章由敖长林编写，第五、六、七章及附录由宋仁学编写。在本书编写过程中得到各级领导、同事们的支持和鼓励，在此表示感谢。我们还要特别感谢主审人潘介正教授，他提出了许多宝贵的意见和建议，对提高本书的质量起到重要的作用。

限于编者的水平，书中难免有错误和不妥之处，特别是有关数学实验的内容，有很多需要进一步充实和完善之处，尚祈多方教正。

编　者

2000年早春　于哈尔滨

目录

第一章 矩 阵

在社会生产实际中，大量的各种各样的问题都提出矩阵的概念，并且这些问题的研究常常反映为有关矩阵的某些方面的研究，甚至于有些性质完全不同的，表面上完全没有联系的问题，归结成矩阵问题以后却是相同的，这就使矩阵成为数学中一个极其重要的应用广泛的概念，因而也就使矩阵成为线性代数的一个主要研究对象．这一章的目的是引入矩阵的有关概念、运算；通过示例、练习、习题等说明其性质及由来；对在解决问题、解释概念中有用的一些技巧作了介绍；讨论了用途很广的矩阵的初等变换及初等矩阵．

1.1 矩阵的概念

1.1.1 矩阵的概念

像所有的数学学科一样，线性代数有两类基本的数学构件．一类是对象：数组；一类是这些对象进行的运算，如两个数组的相加或相乘．本节将引入基本的对象——矩阵．下一节介绍基本运算．本节还要提出某些涉及矩阵的数学模型．这些模型将在本书中多次使用，以说明一些新概念．

例 1 在实际问题中我们经常会遇到各种各样的表格，例如某公司在计划期内生产并销售的甲、乙、丙、丁四种产品，这 4 种产品的销量、销售单价、单位变动成本的有关资料如表 1-1.

表 1-1

销售单价(元)	900	2 000	1 000	3 000
单位变动成本(元)	700	1 800	600	2 100
销 售 量	40	80	20	60

为了简便，把表中的文字说明去掉，把数字按原来的位置列成一个表，即

$$\begin{bmatrix} 900 & 2\ 000 & 1\ 000 & 3\ 000 \\ 700 & 1\ 800 & 600 & 2\ 100 \\ 40 & 80 & 20 & 60 \end{bmatrix}$$

这就是一个三行、四列的矩阵.

例 2 在解析几何中考虑坐标变换时，如果只考虑坐标系的转轴(反时针方向转轴 θ 角)，那么平面直角坐标变换公式为

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

其中 θ 为 x 轴与 x' 轴的夹角，显然，新旧坐标之间的关系，完全可以通过公式中系数所排成的两行、两列矩阵

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

表示出来.

定义 1 由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-1}$$

叫做 m 行 n 列矩阵,简称 $m \times n$ **矩阵**.这 $m \times n$ 个数叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素,a_{ij} 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素,元素是实数的矩阵称为**实矩阵**,元素是复数的矩阵称为**复矩阵**.本书中的矩阵除特别说明外,都指实矩阵,(1-1) 式也简记为:

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n} \text{ 或 } \boldsymbol{A} = (a_{ij})$$

1.1.2 一些特殊的矩阵

从矩阵的形状看,遇到最多的是在(1-1)中 $m = n$ 的情形,这时就称之为 **n 阶方阵**或 **n 阶矩阵**(1 阶矩阵作为数对待).另外,只有一列(即 $n = 1$)或一行(即 $m = 1$)的矩阵也常碰到,分别称为**列矩阵**或**行矩阵**,亦称为**列向量**或**行向量**,作为**列向量**,常用小写黑体字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 记之,而行向量被记作 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\cdots\cdots$,或 $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'\cdots\cdots$ 如:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{1-2}$$

是个 2 阶矩阵，而

$$\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \tag{1-3}$$

是个 2×1 的列矩阵，也可当作列向量．就向量而言，称其元为**分量**，分量的个数即为向量的**维**，故称(1-3)是 2 维向量，今后凡未作特别说明，讲到向量均指列向量．

从矩阵中零元素的分布看，也可分出常见的特殊矩阵．为此，先引进下面的定义．

定义 2 对于(1-1)的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，记 $k=\min\{m,n\}$，称 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{kk}$ 构成 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角线**，并称 a_{ii} 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个对角线元．

对于方阵，主对角线是自左上角到右下角的那根连线．

一般，称 $a_{i,i+1}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的**上对角线**上，而 $a_{i,i-1}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的**下对角线**上．

在下列这个 4 阶矩阵中，δ 表示其主对角线，而 μ 及 λ 分别表示上、下对角线：

$$\begin{bmatrix} \delta & \mu & \times & \times \\ \lambda & \delta & \mu & \times \\ \times & \lambda & \delta & \mu \\ \times & \times & \lambda & \delta \end{bmatrix}$$

(1) **零矩阵**：所有元素全为 0 的矩阵，记作

$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}_{m\times n}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(2) **三角矩阵**：主对角线一侧的元素都是零的方阵叫做**三角矩阵**，若其非零元素只出现在对角线及其上(或右)方，就称为**上三角阵**，记作 $\boldsymbol{R}$，如

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

是个 4 阶上三角阵．

一般而言，对 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，当且仅当 $i>j$ 必有 $a_{ij}=0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 为上三角阵；而当且仅当 $i<j$ 必有 $a_{ij}=0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 是下三角阵．

(3) **对角矩阵**：一个既是上三角又是下三角的矩阵称为**对角阵**，亦即对角阵是非零元只能在主对角线的方阵．如

$$D=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}$$

是个 4 阶的对角阵，显然由对角线的元素就足以确定对角阵本身．故常将这对角阵记作

$$D=\mathrm{diag}(2,\ 3,\ 1,\ 4)$$

而 $\mathrm{diag}(a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn})$ 表示一个对角线元为 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 的 n 阶对角阵，详细写出就是

$$\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})\xlongequal{\text{def}}\begin{bmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\qquad(1-4)$$

（4）**数量矩阵**(标量矩阵)：主对角线上元素都相等的对角阵，特别称 $a_{ii}=1$ 的数量矩阵为**单位阵**，以 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{E}$ 来记，如：

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad(1-4')$$

1.1.3 矩阵问题的例

为了说明线性代数的一些概念与方法，以下提出的有关矩阵的模型，将在本书中多次使用．

例 3（通路矩阵） a 省 2 个城市 a_1，a_2 和 b 省 3 个城市 b_1，b_2，b_3 的交通联结情况如图 1-1 所示，每条线上的数字表示联结该两城市的不同通路总数，由该图提供的通路信息，可用矩阵形式表示(称之为通路矩阵)，以便存贮、计算与利用这些信息．现有

$$\begin{array}{cc}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}4&1&3\\0&2&2\end{bmatrix}&\begin{matrix}a_1\\a_2\end{matrix}\\ \quad\ \ \begin{matrix}b_1&b_2&b_3\end{matrix}&\end{array}$$

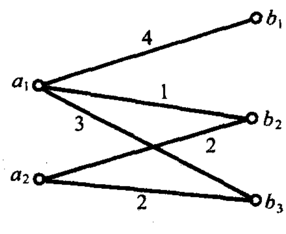

图 1-1

通路矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行表示 a 省的城市，列是 b 省的城市，而 C_{ij} 表示 a_i 与 b_j 间通路数．

例 4（价格矩阵） 4 种食品在 3 家商店中，单位量的售价(以某货币单位计)可用以下矩阵给出：

$$\begin{array}{cccc|c} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{bmatrix} 17 & 7 & 11 & 21 \\ 15 & 9 & 13 & 19 \\ 18 & 8 & 15 & 19 \end{bmatrix}\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \qquad (1-5)$$

这里行表示商店，而列表示食品，例如第 2 列就是第二种食品，其 3 个分量表示该食品在 3 家商店中的 3 个售价.

·背景聚焦·

以数学为职业——访问国家安全局的数学工作者 Didon Pachner

Walter Meyer：以数学为职业与学数学很相像吗?

Didon Pachner：某些方面很相像，我在学校所学的许多知识，在我的工作中迟早有用，当我对一个课题不熟悉时，我就得阅读数学书，然而，二者有一些差别，我现在阅读是因为我确实需要掌握这些材料，而不再仅仅是为了成绩，学习新的事物是非常令人愉快的，由于现在我是真正想学，并能按照我自己的进度阅读.

Walter Meyer：哪种数学你用得最多?

Didon Pachner：最近用得多的是线性代数，我比在学校时更喜欢它了. 我所使用的数学门类，范围很广. 当我在不同部门进行为期 6 个月的轮流实习时，我有一个实习计划，每个部门有各自的需要和专业，我曾经用过的其他门类数学包括抽象代数、概率论及统计.

Walter Meyer：这似乎有点紧张.

Didon Pachner：可能是有点紧，勤奋工作确实有压力，我设法通过保持一些业余兴趣来保持平衡，例如负重训练、弹钢琴及在慈善餐厅服务等.

Walter Meyer：你的雇主从事什么工作?

Didon Pachner：我为国家安全局工作，它的任务是从事秘密通信，例如把消息译成密码，以免被其他国家读出.

Walter Meyer：你怎样找到这份工作的?

Didon Pachner：在马里兰大学我主修数学，并参加了一个与美国宇航局合作的项目，后来，我成了一名专职人员.

Walter Meyer：你对现在的学生有什么建议?

Didon Pachner：我认为，设法真正理解你正在学习的内容是很重要的，这比单纯记忆公式要更进一步.

例 5 炼油厂模型 考虑一家开办 3 个炼油厂的公司，每个炼油厂生产 3 种石油产品：燃料油、柴油和汽油，设从 1 个单位(约 2L)原油中，第一个炼油厂生产 16L 燃料油、8L 柴油及 4L 汽油，第二、第三个炼油厂生产这 3 种产品的数量各不相同，用下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来描述：

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ \text{燃料油} \\ \text{柴　油} \\ \text{汽　油} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{第一炼油厂} & \text{第二炼油厂} & \text{第三炼油厂} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 16 & 8 & 8 \\ 8 & 20 & 8 \\ 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \end{array} \quad (1-6)$$

$\boldsymbol{A}$ 的每一个列向量，是一个炼油厂的一个产出向量，例如第三炼油厂从 1 个单位石油中生产 8L 燃料油、8L 柴油及 20L 汽油，我们可以用产出向量 $a_3=\begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$表示第三炼油厂的生产能力. $\boldsymbol{A}$ 的每一行是一个向量，它的分量是不同炼油厂生产某种产品的数量，汽油产量的行向量是 $a_3=[4 \quad 10 \quad 20]$.

设 x_i 表示第 i 个炼油厂所用石油的单位数，假设需 9 600L 燃料油、12 800L柴油及 16 000L 汽油，注意，这些需求对于一个实际的炼油厂来说是过于小了，实际的需求往往是几百万升.

x_i 应该满足下列线性方程组：

$$\begin{aligned} 16x_1+8x_2+8x_3&=9\ 600 \\ 8x_1+20x_2+8x_3&=12\ 800 \\ 4x_1+10x_2+20x_3&=16\ 000 \end{aligned} \quad (1\text{-}7)$$

或满足矩阵列向量的单个向量方程(在下一节正式定义向量加法)：

$$x_1\begin{bmatrix} 16 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} 8 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9\ 600 \\ 12\ 800 \\ 16\ 000 \end{bmatrix} \quad (1\text{-}8)$$

设 $\boldsymbol{b}$ 是(1-8)式右端的需求列向量，$\boldsymbol{x}$ 是以 x_i 为分量的列向量，那么矩阵代数将为我们提供用 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{x}$ 简明书写方程组的一种方法. 确实，在下一节，我们将学会如何书写，在下一章，我们将学会如何解任何一个由 3 个变量 3 个方程构成的线性方程组.

例 6 天气的 Markov 链 假设我们把本市的天气分为 3 种状态：晴、阴与下雨，若今天阴，则明天晴的概率为 1/2，阴的概率为 1/4，下雨的概率为 1/4. 如果今天晴，或今天下雨，则明天天气会出现另外的概率，这些概率可以通过观察本市以往几年每天天气的变化趋势来确定，用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来表示这些概

率是方便的.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{今天} \\
\text{明天} & \begin{array}{ccc} \text{晴} & \text{阴} & \text{雨} \end{array}
\end{array}
$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \text{晴} \\ \text{阴} \\ \text{雨} \end{array} \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/8 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \tag{1-9}
$$

这是用概率方法预测天气的一种简化形式，通过考虑今天在本市若干地区的天气，来预测明天的天气，也许是更现实(但在数学上更复杂)的概率方法.例如，了解今天哈尔滨的天气，为预测明天哈尔滨市的天气奠定可靠的基础.

(1-9)式的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的概率称为**转移概率**，矩阵称为**转移矩阵**. 它的每一列对应于今天天气的状态，它的每一行对应于明天天气的状态. 例如，在"阴行"、"雨列"中出现的元素 a_{23}为 1/2，这给出已知今天下雨明天转阴的概率.

与(1-9)式中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一样的，以当前状态来预测下一段时间不同状态的概率的模型，称为 **Markov 链**(马尔可夫，Андрей Андреевич Марков，1856—1922，前苏联数学家). 对于一个 Markov 链来说，转移矩阵的每一列的概率之和必定为 1. 表示 Markov 链的一种方便方法是使用**变换图**，天气 Markov 链的变换图如图 1-2 所示，每个状态有一个结点，每个转移概率有一个箭头.

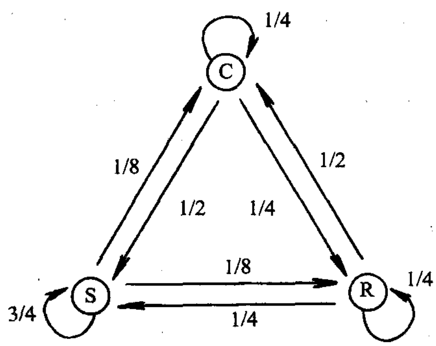

图 1-2 Markov 变换图

已知今天是晴，是阴或是雨的概率，就可用转移矩阵 $\boldsymbol{A}$ 提供的数据来计算明天是晴，是阴还是雨的概率，设 p_1，p_2，p_3 分别为今天是晴，是阴，是雨的概率，设 p'_1，p'_2，p'_3 分别为明天是晴，是阴，是雨的概率，对于上述

Markov 链，计算明天天气概率的公式为

$$
\begin{aligned}
p'_1 &= \frac{3}{4}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{4}p_3 \\
p'_2 &= \frac{1}{8}p_1 + \frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{2}p_3 \\
p'_3 &= \frac{1}{8}p_1 + \frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{4}p_3
\end{aligned}
\tag{1-10}
$$

例如，对于这个 Markov 链，如果在清晨我们听到天气预报为，今天为阴或为雨的概率为 1/2，那么 $p_1=0$，$p_2=1/2$，$p_3=1/2$. 利用今天天气的这些概率，用 Markov 链我们可以预测明天天气的概率 p'_1，p'_2，p'_3：

$$
\begin{aligned}
p'_1 &= \frac{3}{4}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{4}p_3 = 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\
p'_2 &= \frac{1}{8}p_1 + \frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{2}p_3 = 0 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\
p'_3 &= \frac{1}{8}p_1 + \frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{4}p_3 = 0 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
\tag{1-11}
$$

我们对(1-10)与(1-11)式中计算 p'_1 的公式直观地作以下的解释，要计算连接两个事件的概率，例如现在处于状态 2 的概率 p_2，以及从状态 2 转移到状态 1 的概率 1/2，我们可以把这两个概率相乘，得到 1/2 p_2，明天处于状态 1(天晴)可能有以下 3 种情况：一是今天处于状态 1，并仍保持状态 1，这个概率为 3/4 p_1；二是今天处于状态 2(阴)，然后转为状态 1，这个概率为 1/2 p_2；三是今天处于状态 3(雨)，然后转为状态 1，这个概率为 1/4 p_3.

我们可以使用形如(1-10)的概率公式，根据(1-11)式提供的明天天气的概率 $p'_1=3/8$，$p'_2=3/8$，$p'_3=1/4$，来预测后天(两天后)天气的概率 p''_1，p''_2 及 p''_3：

$$
\begin{aligned}
p_1'' &= \frac{3}{4}p'_1 + \frac{1}{2}p'_2 + \frac{1}{4}p'_3 = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{34}{64} \\
p_2'' &= \frac{1}{8}p'_1 + \frac{1}{4}p'_2 + \frac{1}{2}p'_3 = \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{17}{64} \\
p_3'' &= \frac{1}{8}p'_1 + \frac{1}{4}p'_2 + \frac{1}{4}p'_3 = \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{13}{64}
\end{aligned}
$$

因此，我们可以用 2 天天气的概率，提前 3 天进行天气预报，依此类推，如果假设今天天气为晴、为阴、为雨的概率分别为 0，1/2，1/2，通过计算，可以得到以下预测表：

	晴	阴	雨	
今　日	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
1 天后	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	
2 天后	$\frac{34}{64}$	$\frac{17}{64}$	$\frac{13}{64}$	
3 天后	$\frac{149}{256}$	$\frac{60}{256}$	$\frac{47}{256}$	(1-12)
5 天后	$\frac{14}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{4}{23}$	
10 天后	$\frac{14}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{4}{23}$	
100 天后	$\frac{14}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{4}{23}$	

注意，若干天以后，天晴、天阴、天雨的概率，分别稳定于 14/23，5/23 与 4/23，只要知道今天的天气状况，及由 Markov 链转移矩阵所提供一天接一天天气的概率，这些概率就是对上述模型将来的预测．事实上，这些概率表明，在未来的平常一天，晴天的概率为 14/23，阴天的概率为 5/23，下雨天的概率为 4/23.

在下一章，我们将建立一个 3 个未知数 3 个线性方程的方程组，并通过解方程组来直接确定这些“平常日”的概率．对于任何 Markov 链，数学上可以证明，确定几十天后的稳定概率，比确定 4 天后的概率，要容易得多，数学在确定一个模型内在的、长期趋势方面的作用，常常比在找出逐天变化的中期结果方面的作用要大.

由于线性代数提供了有效的数学工具，从本质上解决人们在 Markov 链方面提出的任何问题，因此 Markov 链在科学上有广泛的应用.

例 7 超定方程组　假定例 5 炼油厂模型中的第二个炼油厂停产，而我们必须设法由仅有的两个炼油厂来满足需求，原有炼油厂方程组（1-7）变为

	第一炼油厂		第三炼油厂		需求	
燃料油	$16x_1$	+	$8x_2$	=	9 600	
柴　油	$8x_1$	+	$8x_2$	=	12 800	
汽　油	$4x_1$	+	$20x_2$	=	16 000	(1-13)

仅用两家炼油厂我们未必能正好满足3种需求．如果要我们选择，我们可能会用两家炼油厂来满足两种需求，而不是3种需求，这种问题称为**超定的**，因为约束个数多于变量个数．

对于上述问题，我们的目标通常是寻求最好的近似解，经过一些尝试，得到可能的近似解为 $x_1=300$，$x_2=800$，即以下产量表

	第一炼油厂		第三炼油厂		产量	需求		差额
燃料油	16（300）	+	8（800）	=	11 200	9 600	+	1 600
柴　油	8（300）	+	8（800）	=	8 800	12 800	−	4 000
汽　油	4（300）	+	20（800）	=	17 200	16 000	+	1 200

例8（赢得矩阵） 一个称为**对策论**或**竞赛论**的数学分支，是研究社会现象的一种特定数学方法．我国古代“齐王赛马”的故事，就是一个对策问题．故事说战国时代齐王与其大将田忌赛马，双方约定出上、中、下3个等级的马各一匹进行比赛，这样共赛马3次，每次比赛的败者付给胜者一百金．已知在同一等级马的比赛中，齐王之马可稳操胜券，但田忌的上、中等级的马分别可胜齐王中、下等级的马．

齐王及田忌在排列赛马出场顺序时，各可取下列6种策略(方案)之一：

(上，中，下)，(中，上，下)，(下，中，上)，

(上，下，中)，(中，下，上)，(下，上，中)．

若将这6种策略依次从1到6编号，则可写出齐王的赢得矩阵

$$\begin{array}{cc} & \text{田忌策略} \longrightarrow \\ \begin{array}{c}\text{齐}\\\text{王}\\\text{策}\\\text{略}\end{array}\downarrow & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P} \end{array}$$