高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版·孙训方　方孝淑　关来泰编

九章丛书

材料力学 II

第五版

同步辅导及习题全解

主　编　郭维林　刘东星

· 知识点窍　· 逻辑推理　· 习题全解

· 全真考题　· 名师执笔　· 题型归类

新版

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

材料力学II（第五版）同步辅导及习题全解

主　编　郭维林　刘东星

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是与高等教育出版社出版，孙训方、方孝淑、关来泰编的《材料力学Ⅱ》（第五版）一书配套的同步辅导书。

本书共有 7 章，分别介绍弯曲问题的进一步研究、考虑材料塑性的极限分析、能量法、压杆稳定问题的进一步研究、应变分析和电阻应变计法基础、动荷载和交变应力、材料力学性能的进一步研究。本书按教材内容安排全书结构，针对各章习题给出详细解答，思路清晰，逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书可作为高等学校土建、水利类各专业及相关工程技术人员的参考书，也可作为自学者的辅导书及教师的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

材料力学（第五版）同步辅导及习题全解. 2 / 郭维林，刘东星主编. -- 北京：中国水利水电出版社，2010.8
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5084-7744-2

Ⅰ. ①材… Ⅱ. ①郭… ②刘… Ⅲ. ①材料力学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①TB301

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第149917号

策划编辑：杨庆川　　责任编辑：宋俊娥　　封面设计：李佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 材料力学Ⅱ（第五版）同步辅导及习题全解
作　　者	主　编　郭维林　刘东星
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京市梦宇印务有限公司
规　　格	170mm×227mm　16 开本　8.25 印张　194 千字
版　　次	2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
印　　数	0001—5000 册
定　　价	11.80 元

前　　言

材料力学一直是大中专院校土建和水利类专业学生的必修课程，其内容随着土建和水利类技术的发展而日趋丰富。这就产生了一个矛盾：一方面学生因所修课程越来越多而导致课外时间减少；另一方面因技术的进步又要求学生去了解比以前更多的知识。

本书正是为了解决这一矛盾而精心编写的。

作为与孙训方、方孝淑、关来泰编的教材《材料力学Ⅱ》（第五版）同步配套的习题全程辅导书，本书对教材中的思考题和课后习题进行详细解答，帮助学生提高分析问题、解决问题的能力。

教材中课后习题丰富、层次多样，本书从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论，促使其掌握基本解题方法。 除了有传统辅导书的解题过程外，本书主要有以下特点：概念清晰、步骤完整、数据准确、附图齐全，在解题思路和解题技巧上进行精练分析和引导，巩固所学知识，达到举一反三的效果。

本书可供使用孙训方、方孝淑、关来泰编的《材料力学Ⅱ》（第五版）教材的学生和教师参考，并可作为使用其他教材的读者或考研者的参考书。

由于编者水平有限及时间仓促，不妥之处在所难免。希望读者不吝批评、指正。

编者

2010 年 8 月

目 录

第一章

弯曲问题的进一步研究

思考题详解

1-1 试列出推导非对称纯弯曲梁正应力的普遍公式(1-1)时的变形几何相容条件、物理关系及静力学关系式。

【解题过程】

几何相容条件 $\varepsilon = \dfrac{\eta}{\rho}$

物理关系 $\sigma = E\varepsilon$

静力学关系 $\int_A \sigma \mathrm{d}A = F_\mathrm{N} = 0$

$$\int_A z\sigma \mathrm{d}A = M_y$$

$$\int_A y\sigma \mathrm{d}A = M_z$$

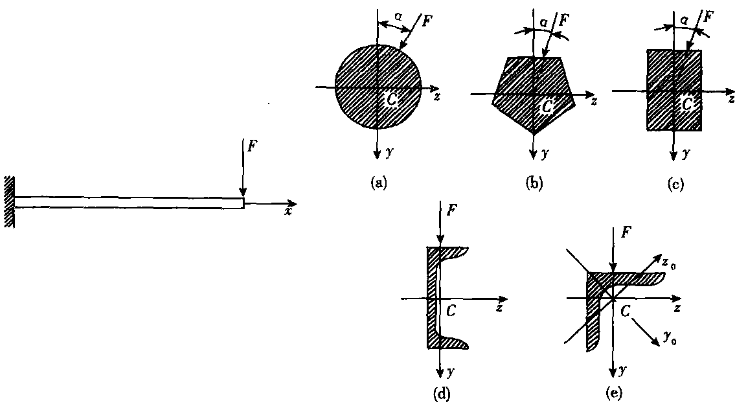
1-2 试问在教材式(1-1)中弯矩分量 M_y 和 M_z 的正负是如何判定的?

【解题过程】 对于外法线与 x 轴正向一致的截面,如弯矩分量 M_y 和 M_z 分别与 y 轴和 z 轴正向一致时,M_y,M_z 为正;反之为负。

1-3 试问梁在非对称弯曲时,如何判定中性轴与 y 轴间夹角 θ 的正负?

【解题过程】 对于外法线与 x 轴正向一致的截面,y 轴到中性轴 $n-n$ 如逆时针转,则夹角 θ 为正;反之为负。

1-4 悬臂梁在自由端承受横向力 F,梁横截面的形状及横向力作用线的方向分别如图 a、b、c、d、e 所示。试问各梁将发生什么变化?



思考题 1-4 图

【**解题过程**】 (a)平面弯曲;(b)斜弯曲;(c)斜弯曲;(d)平面弯曲和扭转;(e)斜弯曲和扭转。

1-5 何谓弯曲中心(剪切中心)?试问弯曲中心的位置是否与外力的大小、作用线方向、截面的几何形状,以及材料的物性有关?为什么?

【**解题过程**】 由同一种材料制成的梁,弯曲中心的位置只与截面的几何形状有关,与外力的大小、作用线方向无关。因为弯曲中心仅决定于剪力作用线的位置,而与其方位及剪力数值无关。

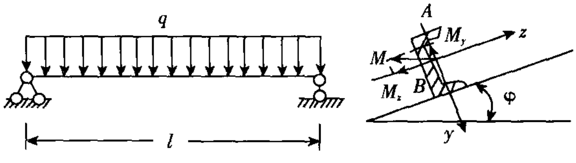
1-6 试问平面大曲率杆纯弯曲时,为何中性层偏于曲杆的内侧?在什么条件下可用直梁的公式作近似计算,并得到足够精确的结果?

【**解题过程**】 平面大曲率杆纯弯曲时,由于曲杆内侧线段的原长小于外侧线段,因此,由平面假设及纵向线段无挤压的假设,可得距中性轴等距离的内侧边应力大于外侧边应力,而中性轴位置由 $F_N=\int_A \sigma \mathrm{d}A=0$ 确定,于是,中性轴向内侧边移动,即中性层偏于曲杆的内侧。

当曲杆的横截面形心到其内侧边缘的距离 c 小于$\frac{R_C}{10}$时(R_C 是微段曲杆轴线的原始曲率半径),应用直梁弯曲正应力公式作近似计算,得到的结果能满足工程上的精度要求。

习题详解

1-1 习题 1-1 图示截面为 16a 号槽钢的简支梁,跨长 $l=4.2\mathrm{m}$,受集度为 $q=2\mathrm{kN/m}$ 的均布荷载作用。梁放在 $\varphi=20°$的斜面上。试确定梁危险截面上 A 点和 B 点处的弯曲正应力。



习题 1-1 图

【解题过程】　查教材中,附录Ⅲ型钢规格表,得 16a 号槽钢的截面几何性质

$$b=63\text{mm},\quad z_0=18\text{mm},\quad h=160\text{mm}$$

$$I_y=73.3\text{cm}^4,\quad I_z=866.2\text{cm}^4$$

显然,跨中截面为危险截面,该截面上弯矩为

$$M_z=-M\cos\varphi=-\frac{1}{8}ql^2\cos\varphi=-\frac{1}{8}\times 2\times 10^3\text{N/m}\times(4.2\text{m})^2\cos 20°$$
$$=-4\ 144\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_y=-M\sin\varphi=-\frac{1}{8}ql^2\sin\varphi=-\frac{1}{8}\times 20\times 10^3\text{N/m}\times(4.2\text{m})^2\sin 20°$$
$$=-1\ 508\text{N}\cdot\text{m}$$

危险截面上,A 点、B 点坐标分别为

$$y_A=-80\text{mm},z_A=(b-z_0)=45\text{mm},y_B=80\text{mm},z_B=-18\text{mm}$$

根据非对称纯弯曲正应力公式,得(注意 $I_{yz}=0$)

$$\sigma=\frac{M_y(zI_z-yI_{yz})-M_z(yI_y-zI_{yz})}{I_yI_z-I_{yz}^2}=\frac{M_y}{I_y}z-\frac{M_z}{I_z}y$$

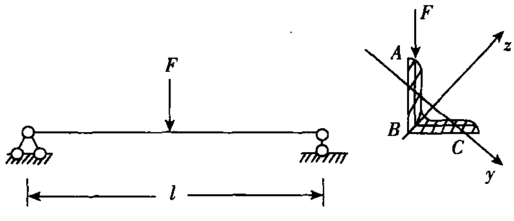
点 A 正应力(最大压应力)

$$\sigma_A=-\frac{1\ 508\text{N}\cdot\text{m}}{73.3\times 10^{-8}\text{m}^4}\times 45\times 10^{-3}\text{m}+\frac{4\ 144\text{N}\cdot\text{m}}{866.2\times 10^{-8}\text{m}^4}\times(-80\times 10^{-3}\text{m})$$
$$=-131\text{MPa}$$

点 B 正应力(最大拉应力)

$$\sigma_B=-\frac{1\ 508\text{N}\cdot\text{m}}{73.3\times 10^{-8}\text{m}^4}\times(-18\times 10^{-3}\text{m})+\frac{4\ 144\text{N}\cdot\text{m}}{866.2\times 10^{-8}\text{m}^4}\times 80\times 10^{-3}\text{m}$$
$$=75.3\text{MPa}$$

1-2　习题 1-2 图示跨长为 $l=4\text{m}$ 的简支梁,由 200mm×200mm×20mm 的等边角钢制成,在梁跨中点受集中力 $F=25\text{kN}$ 作用。试求最大弯矩截面上 A,B 和 C 点处的正应力。



习题 1-2 图

【解题过程】　查教材中,附录Ⅲ型钢规格表,得截面几何性质

$$I_y=1\ 180.04\text{cm}^4,\quad I_z=4\ 554.55\text{cm}^4,\quad I_{yz}=0$$

$$z_0=56.9\text{mm},\quad b=200\text{mm}$$

显然跨中截面上弯矩最大,该截面上弯矩为

$$M_y=M_z=-\frac{1}{4}Fl\cos 45°=-\frac{1}{4}\times(25\times 10^3\text{N})(4\text{m})\cos 45°=-17\ 678\text{N}\cdot\text{m}$$

根据广义弯曲正应力公式,得

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y$$

点 A 的正应力

$$y_A = -b\sin 45° = -141.4\text{m}, \quad z_A = b\cos 45° - \sqrt{2}z_0 = 61\text{mm}$$

$$\sigma_A = -\frac{17\ 678\text{N}\cdot\text{m}}{1\ 180.04\times10^{-8}\text{m}^4}\times(61\times10^{-3}\text{m}) + \frac{17\ 678\text{N}\cdot\text{m}}{4\ 554.55\times10^{-8}\text{m}^4}\times(-141.4\times10^{-3}\text{m})$$
$$= -146.3\text{MPa}$$

点 B 的正应力

$$y_B = 0, \quad z_B = -\sqrt{2}z_0 = -80.5\text{mm}$$

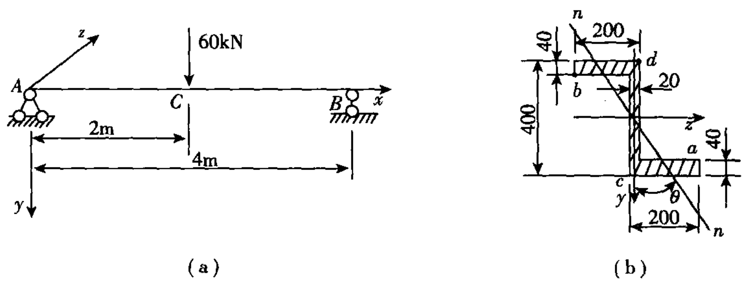
$$\sigma_B = -\frac{17\ 678\text{N}\cdot\text{m}}{1\ 180.04\times10^{-8}\text{m}^4}\times(-80.5\times10^{-3}\text{m}) = 120.6\text{MPa}$$

点 C 的正应力

$$y_C = b\sin 45° = 141.4\text{m}, \quad z_C = b\cos 45° - \sqrt{2}z_0 = 61\text{mm}$$

$$\sigma_C = -\frac{17\ 678\text{N}\cdot\text{m}}{1\ 180.04\text{m}\times10^{-8}\text{m}^4}\times(61\times10^{-3}\text{m}) + \frac{17\ 678\text{N}\cdot\text{m}}{4\ 554.55\times10^{-8}\text{m}^4}\times(141.4\times10^{-3}\text{m})$$
$$= -36.5\text{MPa}$$

1-3　Z 形截面简支梁在跨中受一集中力作用,如习题 1-3 图所示。已知该截面对通过截面形心的一对相互垂直的轴 y,z 的惯性矩和惯性积分别为 $I_z = 5.75\times10^{-4}\text{m}^4$,$I_y = 1.83\times10^{-4}\text{m}^4$ 和 $I_{yz} = 2.59\times10^{-4}\text{m}^4$。试求梁的最大正应力。



习题 1-3 图

【解题过程】　跨中 C 截面上弯矩为

$$M_y = 0, \quad M_z = -\frac{1}{4}Fl = -\frac{1}{4}(60\text{kN})(4\text{m}) = -60\text{kN}\cdot\text{m}$$

C 截面上中性轴 $n-n$ 与 y 轴的夹角 θ

$$\tan\theta = \frac{M_zI_y + M_yI_{yz}}{M_yI_z + M_zI_{yz}} = \frac{I_y}{I_{yz}} = \frac{1.83\times10^{-4}\text{m}^4}{2.59\times10^{-4}\text{m}^4} = 0.707$$

$$\theta = 35.24°$$

中性轴 $n-n$ 位置如习题 1-5 图(b)所示。可见,截面上 a,b,c,d 点的正应力都可能是最大,但只需

计算 a,c 两点的应力。广义弯曲正应力公式(注意 $M_y=0$)

$$\sigma=-\frac{M_z(yI_y-zI_{yz})}{I_yI_z-I_{yz}^2}$$

则 a,c 二点上的应力

$$\sigma_a=-\frac{-60\times10^3\text{N}\cdot\text{m}[(0.16\text{m})(1.83\times10^{-4}\text{m}^4)-(0.19\text{m})(2.59\times10^{-4}\text{m}^4)]}{(1.83\times10^{-4}\text{m}^4)(5.75\times10^{-4}\text{m}^4)-(2.59\times10^{-4}\text{m}^4)^2}$$
$$=-31.3\text{MPa}$$

$$\sigma_c=-\frac{-60\times10^3\text{N}\cdot\text{m}[(0.2\text{m})(1.83\times10^{-4}\text{m}^4)-(0.01\text{m})(2.59\times10^{-4}\text{m}^4)]}{(1.83\times10^{-4}\text{m}^4)(5.75\times10^{-4}\text{m}^4)-(2.59\times10^{-4}\text{m}^4)^2}$$
$$=-61.6\text{MPa}$$

所以梁横截面上的最大正应力为

$$\sigma_{\max}=\sigma_c=61.6\text{MPa}$$

1－4　由两种材料制成的矩形截面组合梁,如习题 1－4 图(a)所示。在对称纯弯曲时横截面上的弯矩为 M,其中性轴位置由图(a)中的 y_n 定出,试证明:

(1)中性轴位置 y_n 为

$$y_n=\frac{E_1A_1y_{C1}+E_2A_2y_{C2}}{E_1A_1+E_2A_2}$$

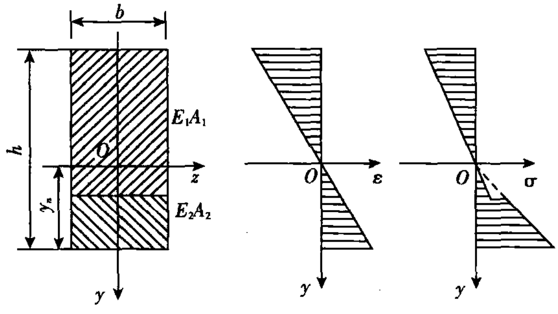
(2)中性层曲率为

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{E_1I_{z1}+E_2I_{z2}}$$

(3)弯曲正应力为

$$\sigma_i=\frac{ME_iy}{E_1I_{z1}+E_2I_{z2}}\quad(i=1,2)$$

上述各式中,$E_1,E_2;A_1,A_2;y_{C1},y_{C2};I_{z1},I_{z2}$分别为材料 1 和材料 2 的弹性模量、截面面积、截面形心到横截面底边的距离、截面对中性轴的惯性矩。y 为所求点的坐标。



习题 1－4 图

【解题过程】　梁受对称纯弯曲,横截面上的弯矩为 M。这里平面假设和单轴应力假设均成立,所以沿梁的截面高度,应变按线性规律变化,如习题 1－4 图(b)所示。

$$\varepsilon=\frac{y}{\rho}$$

利用单轴应力状态下的胡克定律,两种材料内的弯曲正应力分别为

$$\begin{cases}\sigma_1=E_1\dfrac{y}{\rho}\\ \sigma_2=E_2\dfrac{y}{\rho}\end{cases}\tag{1}$$

正应力沿截面高度的变化规律如习题1-4图(c)所示。

由横截面上应力的合成等于内力的静力学关系,即得

$$\int_{A_1}\sigma_1\mathrm{d}A_1+\int_{A_2}\sigma_2\mathrm{d}A_2=F_N=0\tag{2}$$

$$\int_{A_1}y\sigma_1\mathrm{d}A_1+\int_{A_2}y\sigma_2\mathrm{d}A_2=M\tag{3}$$

将(1)式代入(2)式,得 $E_1\int_{A_1}y\mathrm{d}A_1+E_2\int_{A_2}y\mathrm{d}A_2=0$

即 $E_1A_1(y_{C1}-y_n)+E_2A_2(y_{C2}-y_n)=0$

所以中性轴的位置为 $y_n=\dfrac{E_1A_1y_{C1}+E_2A_2y_{C2}}{E_1A_1+E_2A_2}$

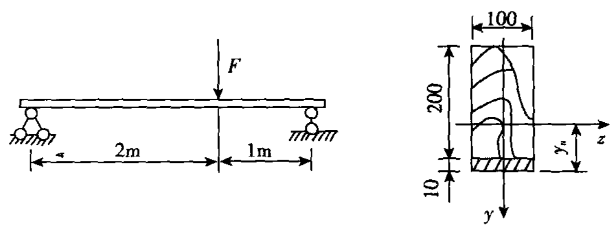
将(1)式代入(3)式,得 $\dfrac{E_1}{\rho}\int_{A_1}y^2\mathrm{d}A_1+\dfrac{E_2}{\rho}\int_{A_2}y^2\mathrm{d}A_2=M$

即 $\dfrac{E_1I_{z1}}{\rho}+\dfrac{E_2I_{z2}}{\rho}=M$

所以中性层的曲率为 $\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{M}{E_1I_{z1}+E_2I_{z2}}$

将上式代入(1)式,得弯曲正应力为 $\sigma_i=\dfrac{ME_iy}{E_1I_{z1}+E_2I_{z2}}(i=1,2)$

1-5 一用钢板加固的木梁承受集中荷载 $F=30\text{kN}$,如习题1-5图所示。钢和木材的弹性模量分别为 $E_s=200\text{GPa}$ 及 $E_w=10\text{GPa}$,试求危险截面上钢和木材部分的最大弯曲正应力。



习题1-5图

【解题过程】 梁的危险截面为集中力 F 作用处,其弯矩为

$$M_{\max}=\frac{1}{3}F\times(2\text{m})$$

$$=\frac{1}{3}\times(30\text{kN})(2\text{m})$$

$$=20\text{kN}\cdot\text{m}$$

利用习题 1-6 的计算结果，确定中性轴的位置

$$y_n=\frac{E_wA_1y_{C1}+E_sA_2y_{C2}}{E_wA_1+E_sA_2}$$

$$=\frac{(10\times10^9\text{Pa})(0.1\times0.2\text{m}^2)(0.11\text{m})+(200\times10^9\text{Pa})(0.1\times0.01\text{m}^2)(0.005\text{m})}{(10\times10^9\text{Pa})(0.1\times0.2\text{m}^2)+(200\times10^9\text{Pa})(0.1\times0.01\text{m}^2)}$$

$$=57.5\times10^{-3}\text{m}$$

$$=57.5\text{mm}$$

截面的几何性质

$$I_{z1}=\frac{1}{12}\times(0.1\text{m})(0.2\text{m})^3+(0.1\text{m}\times0.2\text{m})(0.11\text{m}-0.0575\text{m})^2$$

$$=1.218\times10^{-4}\text{m}^4$$

$$I_{z2}=\frac{1}{12}\times(0.1\text{m})(0.01\text{m})^3+(0.1\text{m}\times0.01\text{m})(0.0575\text{m}-0.005\text{m})^2$$

$$=2.764\times10^{-6}\text{m}^4$$

$$E_wI_{z1}+E_sI_{z2}=(10\times10^9\text{Pa})(1.218\times10^{-4}\text{m}^4)+(200\times10^9\text{Pa})(2.764\times10^{-6}\text{m}^4)$$

$$=1.771\times10^6\text{N}\cdot\text{m}^2$$

钢材部分的最大弯曲正应力

$$\sigma_{\text{smax}}=\frac{M_{\max}E_sy_n}{E_wI_{z1}+E_sI_{z2}}$$

$$=\frac{(20\times10^3\text{N}\cdot\text{m})(200\times10^9\text{Pa})(57.5\times10^{-3}\text{m})}{1.771\times10^6\text{N}\cdot\text{m}^2}$$

$$=130\text{MPa}$$

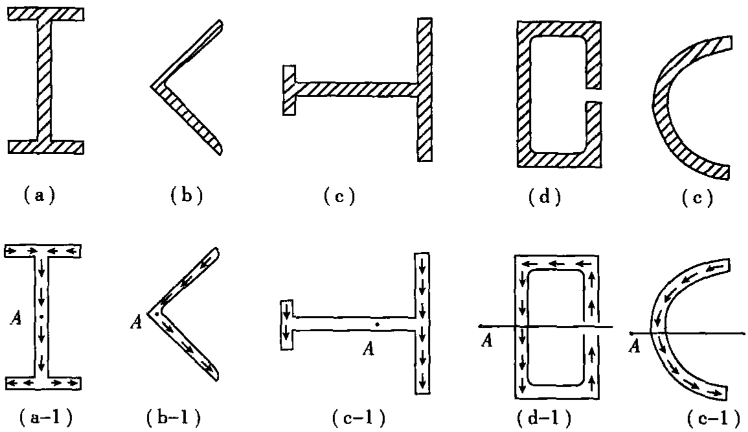
木材部分的最大弯曲正应力

$$\sigma_{\text{wmax}}=\frac{M_{\max}E_w(0.21\text{m}-y_n)}{E_wI_{z1}+E_sI_{z1}}$$

$$=\frac{(20\times10^3\text{N}\cdot\text{m})(10\times10^9\text{Pa})(0.21\text{m}-57.5\times10^{-3}\text{m})}{1.771\times10^6\text{N}\cdot\text{m}^2}$$

$$=17.2\text{MPa}$$

1-6　试判断习题 1-6 图(a)～(e)所示各截面的弯曲中心的大致位置。若图示横截面上的剪力 F_S 指向向下，试画出这些截面上的切应力的指向。



习题 1 -6 图

【**解题过程**】 弯曲中心为截面内切应力所构成的合力的作用点,故弯曲中心 A 必位于:

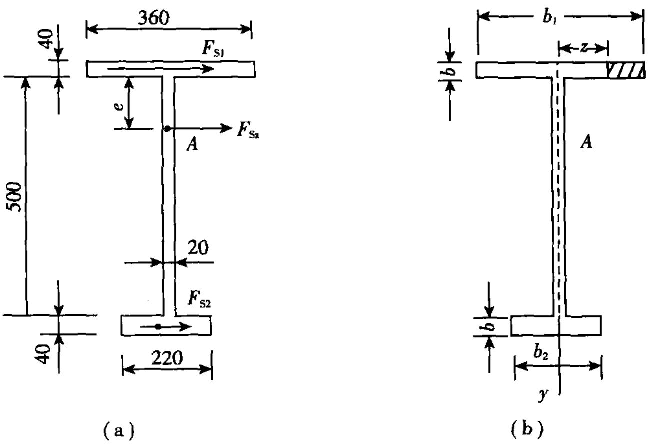
(1)横截面的对称轴上,或截面的反对称点处。

(2)横截面具有两根对称轴,两对称轴的交点。

(3)由两个狭长矩形组成的截面,两狭长矩形中线的交点。

习题 1 -6 图(a),(b),(c),(d),(e)各截面的切应力方向和弯曲中心 A 的大致位置如习题 1 -8 图(a -1),(b -1),(c -1),(d -1),(e -1)所示。

1 -7　试确定习题 1 -7 图(a)所示薄壁截面的弯曲中心 A 的位置。



习题 1 -7 图

【**解题过程**】 设点 A 为弯曲中心。

上翼缘的切应力

$$\tau_1=\frac{F_{Sz}S_y^*}{I_yb}=\frac{F_{Sz}\cdot b\left(\frac{b_1}{2}-z\right)\frac{1}{2}\left(\frac{b_1}{2}+z\right)}{I_y\cdot b}=\frac{F_{Sz}\left(\frac{1}{4}b_1^2-z^2\right)}{2I_y}$$

上翼缘的切应力的合力

$$F_{S1}=2\int_0^{\frac{b_1}{2}}\tau_1 b\mathrm{d}z=\frac{F_{Sz}}{I_y}\int_0^{\frac{b_1}{2}}b\left(\frac{1}{4}b_1^2-z^2\right)\mathrm{d}z=\frac{F_{Sz}bb_1^3}{12I_y}$$

下翼缘的切应力及切应力的合力为

$$\tau_2=\frac{F_{Sz}\left(\frac{1}{4}b_2^2-z^2\right)}{2I_y},F_{S2}=\frac{F_{Sz}bb_2^3}{12I_y}$$

考虑 F_{S1} 和 F_{S2} 对点 A 的矩，得

$$F_{S1}\times(20+e)=F_{S2}\times(520-e)$$

即

$$b_1^3\times(20+e)=b_2^3\times(520-e)$$

$$360^3\times(20+e)=220^3\times(520-e)$$

解得

$$e=80\mathrm{mm}$$

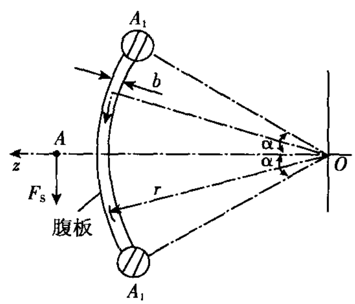
***1-8**　梁的横截面如习题 1-8 图示，假设腹板很薄，其面积与翼缘的面积 A_1 相比可忽略不计。试求截面弯曲中心 A 的位置。

【解题过程】　因腹板很薄，其面积与翼缘面积相比可忽略不计，则截面 A_1 对中性轴的静矩为

$$S_z^*=A_1(r\sin\alpha)$$

横截面对中性轴的惯性矩为　$I_z=2A_1(r\sin\alpha)^2$

由于翼缘内的切应力远小于腹板内的切应力，故翼缘内的切应力可忽略不计，即剪力全部由腹板承受。



习题 1-8 图

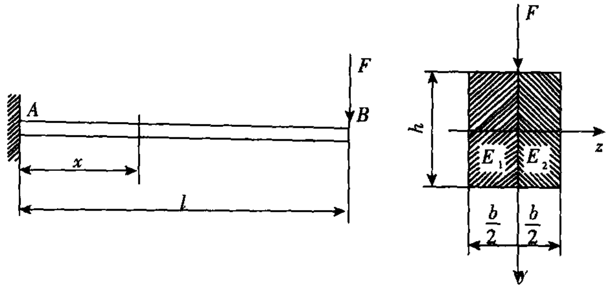
腹板内的切应力　$\tau=\frac{F_SS_z^*}{I_zb}=\frac{F_S}{2br\sin\alpha}$

考虑剪力和切应力的合力对点 O 之矩应平衡，得

$$F_S\cdot\overline{OA}=\tau\times2r\alpha b\times r$$

解得弯曲中心 A 的位置　$e=\overline{OA}=\frac{\alpha r}{\sin\alpha}$

1-9　由两根不同材料的矩形截面 $\frac{b}{2}\times h$ 杆粘结而成的悬臂梁，如图所示。两材料的弹性模量分别为 E_1 和 E_2，且 $E_1>E_2$。若集中荷载 F 作用在梁的纵对称面（即粘合面）内，试求材料 1 和 2 截面上所承受的剪力 F_{S1} 和 F_{S2}，并确定弯曲中心 A 的位置。



思考题 1 -9 图

【解题过程】

梁的两部分变形曲率 ρ 相同,设 x 处截面梁的两部分弯矩为 M_1、M_2,则有

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M_1}{E_1 I}=\frac{M_2}{E_2 I}$$

得

$$\frac{M_1}{E_1}=\frac{M_2}{E_2}$$

两边对 x 求导有

$$\frac{\mathrm{d}M_1}{E_1\,\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}M_2}{E_2\mathrm{d}x}$$

由 $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=F_S$ 有

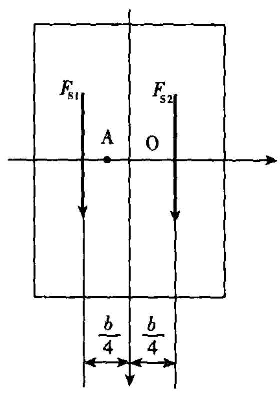
$$\frac{F_{S1}}{E_1}=\frac{F_{S2}}{E_2}$$

联立

$$F_{S1}+F_{S2}=F$$

解得

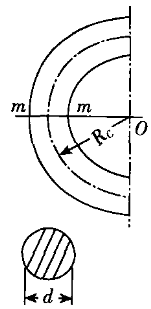
$$F_{S1}=\frac{E_1 F}{E_1+E_2},F_{S2}=\frac{E_2 F}{E_1+E_2}$$



由 $F_{S1}\left(\frac{b}{4}-e\right)=F_{S2}\left(\frac{b}{4}+e\right)$得

$$e=\frac{b(F_{S1}-F_{S2})}{4(F_{S1}+F_{S2})}=\frac{b(E_1-E_2)}{4(E_1+E_2)}$$

1 -10　习题 1 - 10 图示一半径为 $R_C=40\text{mm}$ 的钢制曲杆,杆的横截面为圆形,其直径 $d=20\text{mm}$。曲杆横截面 $m-m$ 上的弯矩 $M=-60\text{N}\cdot\text{m}$。试按计算$\bar{y}$的精确公式和近似公式分别求出曲杆横截面 $m-m$ 上的最大弯曲正应力 $\sigma_{\max}$,并与按直梁应力公式计算的结果相比较。



习题 1-10 图

【解题过程】 (1)按$\bar{y}$的精确公式求解

由于横截面为圆形,故$\bar{y}$的计算公式为

$$\bar{y}=R_C-\frac{d^2}{8R_C\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{d}{2R_C}\right)^2}\right]}$$

由此公式,得

$$\bar{y}=40\text{mm}-\frac{(20\text{mm})^2}{8\times40\text{mm}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{20\text{mm}}{2\times40\text{mm}}\right)^2}\right]}=0.635\text{mm}$$

横截面对中性轴的静矩

$$S=A\bar{y}=\frac{1}{4}\pi d^2\bar{y}=\frac{1}{4}\times\pi\times(20\text{mm})^2\times0.635\text{mm}=199.5\text{mm}^3$$

由已知的 $M=-60\text{N}\cdot\text{m}$ 可知,最大拉应力在曲杆内侧,故

$$y=\frac{d}{2}-\bar{y}=\frac{20\text{mm}}{2}-0.635\text{mm}=9.365\text{mm}$$

$$\rho(y)=R_C-\frac{d}{2}=40\text{mm}-\frac{20\text{mm}}{2}=30\text{mm}$$

所以最大拉应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{My}{S\rho(y)}=\frac{(60\text{N}\cdot\text{m})(9.365\times10^{-3}\text{m})}{(199.5\times10^{-9}\text{m}^3)(30\times10^{-3}\text{m})}=93.9\text{MPa} \tag{1}$$

(2)按$\bar{y}$的近似公式求解

对圆形截面,$\bar{y}$的近似公式为　$\bar{y}=\dfrac{d^2}{16R_C}$

由此公式,得　$\bar{y}=\dfrac{(20\text{mm})^2}{16\times(40\text{mm})}=0.625\text{mm}$

横截面对中性轴的静矩

$$S=A\bar{y}=\frac{1}{4}\pi d^2\bar{y}=\frac{1}{4}\times\pi\times(20\text{mm})^2\times0.625\text{mm}=196.3\text{mm}^3$$

所以最大拉应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{My}{S\rho(y)}=\frac{M\left(\frac{d}{2}-\bar{y}\right)}{S\left(R_C-\frac{d}{2}\right)}=\frac{(60\text{N}\cdot\text{m})[(10-0.625)\times10^{-3}\text{m}]}{(196.3\times10^{-9}\text{m}^3)(40\times10^{-3}\text{m}-10\times10^{-3}\text{m})}$$

$$=95.5\text{MPa} \tag{2}$$

(3)按直梁公式求解

$$\sigma_{\max}=\frac{M}{W_z}=\frac{32M}{\pi d^3}=\frac{32\times60\text{N}\cdot\text{m}}{\pi\times(20\times10^{-3}\text{m})^3}=76.4\text{MPa} \tag{3}$$

比较式(1),(2)可知,按$\bar{y}$的近似公式求解,误差仅为

$$\left|\frac{93.9-95.5}{93.9}\right|\times100\%=1.7\%<5\%$$