数学

学法剖析

XUE FA POU XI

姜萍 ◎ 编著

辽宁大学出版社

数学

学法剖析

姜萍 编著

辽宁大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学学法剖析/姜萍编著. 一沈阳:辽宁大学出版社,2009.4
ISBN 978-7-5610-5280-8

I.数… II.姜… III.数学方法—研究 IV.01-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第051922号

出 版 者:辽宁大学出版社
　　(地址:沈阳市皇姑区崇山中路66号　邮政编码:110036)
印 刷 者:铁岭市铁西彩色印刷厂
发 行 者:辽宁大学出版社
开　　本:850×1168　1/16
印　　张:12.5
字　　数:300千字
出版时间:2009年4月第1版
印刷时间:2009年4月第1次印刷
责任编辑:胡家诗
封面设计:王奕文
责任校对:春　成

书　号:ISBN 978-7-5610-5280-8
定　价:32.00元

联系电话:024-86864613
邮购热线:024-86830665
网　　址:http://press. lnu. edu. cn
电子邮件:lnupress@vip. 163. com

前　言

有一定教学经历的教师都知道，学习数学，对于许多学生是难点，特别是文科学生更难上加难，平时和期末考试达到及格分数很不容易。有的学生谈到学数学就眉头紧锁："课上能听懂，作业也能完成，就是遇到新题目或考试时不知道如何解题，成绩一直上不来!""数学太枯燥无味了，怎么学成绩也上不来，索性不学了！"如此等等，是什么让学生对数学这么害怕?

根据调查分析和自己三十多年教学中的精心探索，得出的结论是:有的学生怕数学是由于教师的教法和学生的学法不当所致。长期以来，有些教师习惯于老一套的"一言堂"教学方式，不分对象的提问、讲述、作练习册，缺乏典型例题的剖析，方法上的引导，思路上的点拨。考试结束了的试卷分析时，老师就题论题，学生学会这套题，但没有形成举一反三的能力，不会独立思考，解题不知如何入手，满脑子是公式、定理、但就不知道如何去用，思维被锁住了，这样怎么能培养学生数学能力呢?

为此，作者回顾总结自己多年的教学经验，探索如何以教法带学法的教学思路，编写了这本《数学学法剖析》，历经近三年的艰辛，本书今天终于与广大教师和学生见面了。

本书主要是以国家教育部最新制定的《中等职业学校数学教学大纲(试行)》和《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——高中起点升本、专科》、人民教育出版社新教材为依据，并吸收了高考试题研究的最新成果。总结多年指导高考实践的基础上，为高中起点升本、专科(高职)编写的一本数学学法指导书。书中每章节分为三个板块，一、重难点剖析，学方法;二、典例分析，学技巧;三、基础练习和提高。各个板块都列出了切合学习要点的典型例题，从例题出发深入浅出解释学习要点，讲述教学方法和学法，集中解决疑难问题，帮助学生深入理解教材内容，培养学生"举一反三"的能力。

本书根据新大纲的要求，强化了理论联系实际的内容和实际应用题的选择，每题都有详解，然后又对方法予以归纳和进行规律小结，便于自学。概况起来主要有以下几个特点:(1)按新大纲要求编著，思想新，形式新，即"双新";(2)精选教材中重难点剖析，在有梯度的例题分析中揭示数学思想和方法，即"精";(3)以教材内容为载体，以教法带学法为主线，以引导学生理解、掌握和运用教材中所体现的数学思想和方法为主要目的，统筹安排本书的内容，即"法"。

作者认为，一个数学教师教学的成功，主要在于指导学生遇到具体数学题目时有办

法、有思路、会思维。是否能培养学生掌握并能灵活运用数学思想和方法，并且具有解决生产和生活中的实际问题的能力。这是一个数学教师对社会和人才培养的最大贡献。至于"兴趣"固然是影响学生学好数学，提高成绩的一个重要前提。调查数据表明，绝大多数学生在开始学数学时，都有兴趣，他们愿意学好数学，但一段时间后遇到不会解决的难题，成绩就上不来时，教师指导若不及时，就会使学生丧失信心，以至"弃学"。因此，引起学生学好数学的"兴趣"，主要还是教法和学法的问题。

本书在编写过程中，借鉴了许多有价值的高考资料和一些专家的优秀成果，在此作者一并深感谢意！

由于编者水平有限，难免有不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2009年3月

目　录

第一章　集合与简单逻辑

§1.1　集合及其表示方法

聚焦

1、集合概念的理解，集合表示方法把握与运用；

2、与初中教材紧密衔接，以大量结合学生生活和学习的实例引入，认识分类讨论问题的思想方法；

3、注重培养认识事物能力，训练数学语言的表达，说理科学，态度严谨。

一、重难点剖析，学方法

讲点一：集合的概念

详释：一般地，把一些能够确定的不同的对象看成一个整体，就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合(或集)。构成集合的每个对象叫做这个集合的元素(或成员)。

学习这一概念必须掌握以下几点：

(1)"对象"的范围是很广泛的，例如，一个数字，一个人，一张桌子，一种颜色，一本书等都可以看成集合的"对象"(即元素)，但"对象"必须是确定的不同的；

(2)集合是一个"整体"；

(3)集合通常用英语大写的字母 A、B、C…表示，元素通常用英语小写的字母 a、b、c……来表示。

【例 1】下列各选项中的对象不能构成集合的是(　)

A、我校学生中的女生；

B、大于 2 小于 10 的偶数；

C、银州区内的自行车；

D、与坐标原点非常接近的点。

解析：因为 D 中的对象含糊不清，所谓"非常接近"没有明确的客观标准。故选 D。

【例 2】指出下列集合中的元素(　)

A、高中一年二班的全体同学；

B、平方等于 1 的数；

C、平行四边形的全体；

D、银州区内的所有的企业。

解析：

A 的元素是高中一年二班的同学；

B 的元素是 1 和 -1；

C 的元素是平行四边形；

D 的元素是银州区内的企业。

讲点二：集合中元素的特性

详释：(1)确定性：是指作为集合的元素，必须是能够确定的。这就是说，任何一个对象要么属于这个集合，要么不属于这个集合，二者必居其一，且只属于其一，不能模棱两可。例如，"所有接近零的数"就不能构成集合，因为"接近零"是个模糊的概念，没有确定的标准。

(2)互异性：是指对于给定的集合，集合中的元素是互异的.这就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象，相同的对象归于同一个集合时，只能算作集合的一个元素.例如，由 $x^2-6x+9=0$ 的解构成的集合可记作$\{3\}$，而不能记为$\{3,3\}$。

(3)无序性：是指集合中的元素可以任意排列顺序，即集合只与它的成员有关，而与成员的顺序无关。例如，$A=\{1,2,3\}$　$B=\{3,1,2\}$则 A、B 表示同一个集合。

【例 3】下列命题正确的个数为(　)

(1)三个很小的数可以构成集合；

(2)$\{b、c、d、a\}$与$\{d、e、c、b\}$是两个不同的集合；

(3) $2,|-\frac{1}{2}|,\frac{4}{3},\frac{36}{27}$,0.5 这些数组成的集合有 5 个元素；

(4)梯形的全体可构成集合。

A，0 个；B，2 个；C，1 个；D，4 个。

解析：(1)不符合集合中元素的确定性；(2)根据集合中元素的无序性可知，它们是同一个

集合；(3) $|-\frac{1}{2}| = 0.5$，$\frac{36}{27} = \frac{4}{3}$，所以集合中有 3 个元素；(4)是集合，有无限个元素；因此，(1)(2)(3)不正确，只有(4)正确，故选 C。

【例 4】已知 $x^2 \in \{1,0,x\}$，求实数 x 的值.

解析：由 $x^2 \in \{1,0,x\}$，根据集合中元素的确定性知 x^2 必与$\{1,0,x\}$的一个元素相等，又由集合中元素的互异性，x^2 只能与$\{1,0,x\}$中一个元素相等。所以，

(1) $x^2 = 1$，则 $x = \pm 1$，

当 $x = 1$ 时，集合为$\{1,0,1\}$（舍去），

当 $x = -1$ 时，集合为$\{1,0,-1\}$，符合题意.；

(2) $x^2 = 0$，则 $x = 0$，此时集合的解集为$\{1,0,0\}$（舍去）；

(3) $x^2 = x$，则 $x = 1$ 或 0，（舍去）.

综上(1)(2)(3)，$x = -1$.

讲点三：元素与集合的关系

详释：(1)元素与集合的关系只有“属于($\in$)”或“不属于($\notin$)”两种。元素 $a \in A$ 或 $a \notin A$ 取决于 a 与 A 是否是集合 A 的元素，这两种情况只有一种成立；

(2)符号“$\in$”“$\notin$”表示元素与集合之间的关系，一般不能用来表示集合与集合之间的关系；

(3) 集合与元素是两个不同的概念. 例如，b 与$\{b\}$是不同的，b 表示一个元素，$\{b\}$表示由一个元素 b 构成的集合，一般$\{b\}$称为单元素集合.

【例 5】用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空:

(1) $\sqrt{2}$ ____ Z；　　$(-1)^0$ ____ N^+；

(2) $2\sqrt{3}$ ____ $\{x \mid x<\sqrt{11}\}$；$\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ____ $\{x \mid x\leqslant 2+\sqrt{3}\}$；

(3) (a,b) ____ $\{a,b\}$；(-1,1) ____ $\{y \mid y=x^2\}$.

解析：主要是看元素是否满足集合所表示的条件，有时要对元素进行变形.

(1)依次应填 $\notin$，$\in$；

(2) 因为 $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$，$(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=7+2\sqrt{10}<7+2\sqrt{12}=(2+\sqrt{3})^2$，所以 $\sqrt{2}+\sqrt{5}<2+\sqrt{3}$，所以，依次应填，$\notin$，$\in$.

(3) (a,b)代表一个点，而$\{a,b\}$是以 a,b 为元素的集合；$\{y \mid y = x^2\}$中元素为数，(-1,1)代表一个点，所以，依次应填 $\notin$，$\notin$.

讲点四：列举法

用列举法表示集合，就是把集合的元素一一列举出来，并写在花括号“{ }”内。用列举法表示集合时，必须注意以下几点：

(1)元素与元素之间必须用“，”隔开；

(2)集合的元素必须是确定的，互异的，形、数、物均可，无序的；

(3)对于含较多元素的集合，如果元素呈现一定的规律，在不至于发生误解的情况下，也可以列出几个元素作为代表，其他元素用省略号表示。例如，所有正奇数组成的无限集可以记作$\{1,3,5,7,\cdots\}$；

(4)列举法表示集合具有直观、明确的特点，但不是所有的集合都能用列举法表示出来的。如“不等式 x－1 大于 3 的解集”，就不能把它的元素一一列举出来或列举出来有足够代表性能反映出其规律的元素。

【例 6】用列举法表示下列集合

(1)15 的质因数的全体构成的集合；

(2)方程 $x^2-4=0$ 的解的集合；

(3)由大于 -4 且小于 10 的偶数所组成的集合；

(4)由 $\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}+\frac{|abc|}{abc}$ 的值组成的集合；

(5) $\{(x,y) \mid \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases}\}$；

(6) $\{(x,y) \mid 0\leqslant x<2,\ 0\leqslant y<2,\ x,y\in Z\}$

解析：(1) $\{3,5\}$；

(2) $\{-2,2\}$；(3) $\{-2,0,2,4,6,8\}$

(4)若 a,b,c 全为正数时，原式值为 4；若 a,b,c 全为负数时，原式值为 -4；若 a,b,c 为两正一负或两负一正时，原式值为 0；故原式值组成的集合为$\{-4,0,4\}$；

(5)集合的代表元素为(x,y)，是一对有序数对，方程组 $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$，故集合为$\{(1,2)\}$；

(6)集合为$\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

讲点五：特征性质描述法

把集合中的元素的共同特征描述出来，写在

花括号内表示集合的方法叫做特征性质描述法。

(1)特征性质描述法的一般形式为$\{x\in I\mid P(x)\}$,其中"x"为该集合的代表元素,I是x的范围,"P(x)"是集合中元素X的共同特征,竖线不能省略;

(2)理解和应用集合的特征性质描述法的关键是特征性质P(x):如果在集合I中,属于集合A的任意一个元素X都具有性质P(x),而不属于A的元素都不具有性质P(x),则性质P(x)叫做集合A的一个特征性质,则集合A可以描述为$\{x\in I\mid P(x)\}$它表示集合A是由集合I中具有性质P(x)的所有元素构成的;

(3)用描述法表示集合时,在花括号内可以用文字描述,也可以用数学式子描述。例如,平行四边形的全体所构成的集合可以描述为{平行四边形},方程$x^2-1=0$的解可以描述为$\{x\in R\mid x^2-1=0\}$

【例7】用特征性质描述法表示下列集合

(1)所有偶数的集合;

(2)集合$D=\{1,3,5,7,9\}$;

(3)直角坐标系中第二象限内所有点的坐标组成的集合;

(4)二次函数$y=x^2-9$的因变量组成的集合.

解析:(1){x | x是偶数}

(2)$D=\{x\mid x=2k+1,k\in N,\ 0\leqslant k\leqslant 4\}$;

(3)由直角坐标系中第二象限内的特征可得该集合为$\{(x,y)\mid x<0$ 且 $y>0\}$;

(4)$\{y\in R\mid y\geqslant -9\}$.

【例8】用另一种方法表示下列集合:

(1)$\{1,3\}$;

(2)$\{x\in N\mid 4<x<8\}$

(3)$\{\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{6},\frac{5}{7}\}$

(4)由所有周长等于16cm的平行四边形组成的集合。

解析:(1)$\{x\mid (x-1)(x-3)=0\}$;

(2)$\{5,6,7\}$;

(3)观察集合中元素的结构,可以发现:分子为$n,n\in N^+,n\leqslant 5$,故该集合可以用描述法表示为$\{x\mid x=\frac{n}{n+2},n\in N^+$ 且 $n\leqslant 5\}$

(4){x | x是周长等于16cm的平行四边形}。

二、典例分析,学技巧。

【例1】已知$-3\in\{a-3,2a-1,a^2+1\}$,求a的值。

解析:要明确元素与集合的关系,采取分类讨论的方法。

(1)若$-3=a-3$,则$a=0$,此时-3所在的集合为$\{-3,-1,1\}$,符合题意;

(2)若$-3=2a-1$,则$a=-1$此时-3所在的集合$\{-4,-3,2\}$,符合题意。

综合(1)(2)知,当$-3\in\{a-3,2a-1,a^2+1\}$时,a的值为0或-1。

【例2】由$1,3m,m^2$所组成的集合中,m不能取的值所组成的集合中的元的个数为____

解析:根据集合元素的"互异性"去解。

(1)由$3m=1$,得$m=\frac{1}{3}$;

(2)由$m^2=1$,得$m=\pm 1$;

(3)由$m^2=3m$,得$m=0$或$m=3$。

综上(1)(2)(3)知,m不能取的值的集合为$\{1,-1,0,\frac{1}{3},3\}$

答案:5个。

【例3】用适当的方法表示下列集合。

(1)由所有小于20的既是奇数又是质数的数组成的集合:

(2)下图1-1-1中阴影部分的点(含边界)的坐标的集合

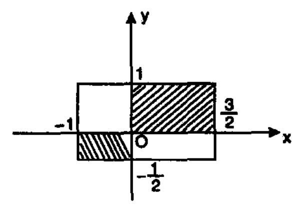

图1-1-1

解析:(1)因为只有2是偶质数,小于20,奇质数有3,5,7,11,13,17,19,故所求的集合是$\{3,5,7,11,13,17,19\}$;

(2)设所求集合为A,由图1-1-1可得

$A=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1$ 且 $xy\geqslant 0\}$

※此题的代表元素为(X,Y)是点的坐标形式,然后分析横坐标,纵坐标应满足的条件,最后用描点法表示。

【例 4】设 A,B 为两个非空实数集合，定义集合 $A+B=\{a+b|\ a\in A,b\in B\}$，若 $A=\{0,2,3\}$，$B=\{1,2,6\}$，则 A＋B 中元素的个数为____。

解析：定义新运算这是一种新的命题方式。本题必须搞清集合 A＋B 的代表元素 a+b 的含义，且要注意元素的“互异性”。

用列举法表示为 $A+B=\{1,2,3,4,5,6,8,9\}$

答案：8 个。

＜基础练习＞

一、选择

1、下列各选项中的对象能构成集合的是(　)

A、接近 1 的数的全体；

B、高中一年学生中年龄比较小的全体；

C、小于 π 的正整数的全体；

D、本书中的难题。

2、下列各式中正确的是(　)

A、$\sin 45^{\circ}\in N$；　B、$3.14\notin Z$；

C、$-\sqrt{2\frac{1}{4}}\notin Q$；　D、$(-1,1)\in\{y|\ y=x^2\}$；

E、$3\in\{x\ |x=n^2+1,n\in N\}$。

3、下列表示同一个集合的是(　)

A、$E=\{(3,2)\}$，$F=\{(2,3)\}$；

B、$E=\phi$，$F=\{0\}$；

C、$E=\{-1,4\}$，$F=\{4,-1\}$

D、$E=\{y|y=x-1,x\in R\}$，$F=\{y|y=x-1,x\in N\}$

4、下列命题中表述错误的是(　)

A、方程 $(x-1)^2(2x+1)^3=0$ 的解集中有 5 个元素；

B、$\{(x,y)|y=\sqrt{-x}\ ,x\in N\}$不是空集；

C、集合$\{x\in N|0\leqslant x\leqslant 1\}$用列举法可以表示为$\{0,1\}$；

D、集合$\{\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{8},\frac{7}{16},\frac{9}{32},\frac{11}{64},\}$用描述法可表示为$\{x|x=\frac{2n-1}{2^n},n\in N^+$ 且 $n\leqslant 6\}$.

5、下列说法正确的个数为(　)

(1)$\phi=\{\phi\}$；(2)集合$\{x|y=\sqrt{2x-3}\ \}$的元素为函数 $y=\sqrt{2x-3}$ 的定义域的中所有实数；(3)$1+\sqrt{2}\ \pi$ 不属于集合 $B=\{x|x=a+b\sqrt{2}$，a、$b\in Q\}$；(4)方程组 $\begin{cases}2x-3y=14\\3x+2y=8\end{cases}$ 的解集用描述法可以表示为$\{(x,y)|\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}\}$，(5)由直线 $y=x+2$ 上所有点的坐标组成的集合可以用描述法表示为$\{(x,y)|y=x+2\}$.

A，1 个；B，2 个；C，3 个；D，4 个。

二、填空

1、用“$\in$”或“$\notin$”填空：

(1)若 $A=\{(x,y)|xy>0\}$则(2,3)____A，(-2,3)____A；

(2)若 $B=\{x\ |\ x=2k+1,K\in N\}$，则 3_____B，-3__B；

(3)2003___{方程 $x^2-2004x+2003=0$}的解；

(4)若 $C=\{1,x,x^2-x\}$，则 2____C，5___C；

(5)已知集合 $A=\{-1,0,2,3,7\}$，$B=\{x|x(x-3)(x+5)=0\}$，若集合 K 为由 A、B 的公共元素组成的集合，则－5___K，0____K。

2、集合$\{x|10<x<20$ 且 x 是 6 的倍数$\}$的元素是_____。

3、集合 $F=\{x|3<x<k,x\in N\}$，若 F 中恰有 4 个元素，则 k=_____。

4、已知 $A=\{2,-1,0,1,-2,-3\}$，$B=\{y|y=|x|,x\in A\}$则集合 B=____。

5、用另一种方法表示集合

(1) 集合$\{x|(2x+3)(x+1)(x-2)(x^2+1)=0,x\in Z\}$也可以表示为_________；

(2)$\{x|x^2-x-6=0\}$又可以用列举法表示为____ $\{y|y=x^2-x-6\}$又可以表示为_____；

(3)集合$\{2,3,4,5,6\}$又可以表示为_____；

(4)由数字 1,-3,5,-7,…,-47,49 构成的集合，可以用描述法表示为_____；

(5)集合$\{-\frac{1}{2},\frac{2}{3},-\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots\frac{98}{99},-\frac{99}{100}\}$又可以表示为_____。

三、解答

1、已知集合 $A=\{a|\frac{6}{5-a}\in N^+$ 且 $a\in Z\}$求 A 中的元素。

2、已知集合 $D=\{x|ax^2+2x+1=0\ \ a\in R,x\in R\}$

(1) 如果 D 中只有一个元素时,求 a 的值;

(2) 如果 D 中至多只有一个元素时,求 a 的取值范围。

<综合提高>

1、下列命题:

(1)已知 $A=\{x|x\leqslant 3\sqrt{2},\ x\in R\}$, $a=\sqrt{17}$, $b=2\sqrt{3}$,则有 $a\in A$ 且 $B\notin A$;

(2) $\{(x,y)|x+y=1,xy=-2,\ x,y\in R\}=\{(-1,2)\}$;

(3)集合 $\{x|x^2+3x+2=0,\ x\in N^+\}$ 为 ϕ;

(4)集合 $\{1,-3,5,-7,9,-11\cdots\}$ 可以用描述法表示为 $\{x\mid x=(-1)^{n-1}\cdot(2n+1),\ n\in N\}$

(5)集合 $M=\{y|y=t^2+1,\ t\in R\}$, $N=\{t|(y-1)^2+1,\ y\in R\}$, M 与 N 表示的是同一集合;

(6)集合 $\{x|\frac{12}{5-x}\in N,x\in z\}$,用列举法可以表示为 $\{-7,-1,2,3,4\}$。

其中错误的是

A,(1)、(2)、(3);

B,(2)、(3)、(4)、(6);

C,(1)、(2)、(4)、(6);

D,(1)、(2)、(3)、(4)、(6)。

2、已知平面内的点 A(1,2)、B(0,3),集合 $E=\{(x,y)|2x-y=0\}$, $F=\{(x,y)|x+2y=5\}$, $H=\{(x,y)|2x+3y=9\}$则 A、B 与 E、F、H 的关系是( )

(1) $A\in E,B\in F$; (2) $A\in F,B\in E$;

(3) $A\in H,B\in H$; (4) $A\in F,B\notin F$。

3、设集合 $M=\{x^2-x,2x\}$,则实数 x 的取值范围是________.

4、已知方程 $cx+d=3$ 的解集是无限集,则 c=______,d=______.

5、已知集合 $M=\{x,x^2,y^2-1\}$, $N=\{0,|x|,y\}$,且 M、N 有完全相同的元素,求 x、y 的值。

6、已知集合 $E=\{x\mid x^2+ax+b=x,\ x\in R\}$ $F=\{x\mid (x-1)^2+a(x-1)+b=x+1\}$

当 $E=\{2\}$时,求集合 F。

§1.2 集合之间的关系

聚焦

1、子集概念和集合的包含关系的理解,元素与子集、属于与包含之间的区别,以及"$\in$"、"$\subseteq$"两类符号的不同含义和运用;

2、从大量的实例和学生熟悉的现实情境中引出新的概念,揭示集合之间的包含关系,通过教学实例引导学生进一步认识分类讨论和数形结合的数学思想方法;

3、培养学生全面理解准确表达概念和运用符号语言表示集合包含关系的能力,树立严谨的科学态度。

一、重难点剖析,学方法

讲点一: 子集与真子集

详释: 1、子集

一般地,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,则集合 A 叫做集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$,读作"A 包含于 B"或"B 包含 A"。

(1)依这一定义,有两类特例:

①任何一个集合 A 都是它本身的子集,即 $A \subseteq A$;

②规定空集是任一集合 A 的子集, 即有 $\phi \subseteq A$.

(2)集合 A 是集合 B 的子集,包含 3 个含义:①A 是 B 的一部分;②A 与 B 有完全相同的元素;③A 为 ϕ.在子集的定义中,不能仅理解为 A 是 B 的"部分元素"组成的集合,而 $A=\phi$ 是指 A 不含任何元素;A=B,则 A 中包含 B 中所有的元素,此时都说 A 是 B 的子集.

(3)"A 是 B 的子集"用符号语言可以表达为:若任意 $x \in A \Rightarrow x \in B$, 则 $A \subseteq B$.

(4)若集合 A 不是集合 B 的子集,记作"$A \not\subseteq B$"或"$B \not\supseteq A$"读作"A 不包含于 B"或"B 不包含 A"。

2、真子集

详释: 如果集合 A 是集合 B 的子集,并且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A,则集合 A 叫做集合 B 的真子集,记作 $A \subsetneqq B$ 或 $B \supsetneqq A$,读作"A 真包含于 B"或"B 真包含 A".

(1)显然,如果集合 A 是集合 B 的真子集必须满足两个条件:①A 是 B 的子集,即 $A \subseteq B$;②至少存在一个元素 $x \in B$,但 $x \notin A$。若 A 不是 B 的子集,则 A 一定不是 B 的子集。

(2)空集作为一种特殊的集合,是任何非空集合的真子集,而空集本身无真子集。

两个集合 A、B 存在的子集和真子集的关系,可以用维恩(Venn)图形象地表达,一些特殊集合之间的这种关系还可以借助数轴来揭示。

【例 1】判断下列关系是否正确:

(1)$\phi \in \{0\}$; (2)$\phi \in \{\phi\}$;

(3)若 $\phi \subsetneqq A$,则 $A \neq \phi$;

(4)$\{2\} \subsetneqq \{x|x<6\}$;

(5)已知 A{x|x 是正方形},B = {x|x 是平行四边形},则 $A \subseteq B$;

(6)已知 $E = \{(x,y)|\frac{y}{1-x^2}=1\}$,

$F = \{(x,y)\ |y=1-x^2\}$,则有 $F \subseteq E$。

解析:(1)ϕ 是不含任何元素的集合,{0}只含一个元素 0 的集合,不是属于关系;

(2)ϕ 是一个集合,又是{ϕ}的一个元素,不仅 $\phi \in \{\phi\}$是正确的且 $\phi \subseteq \{\phi\}$也是正确的;

(3)因为空集 ϕ 是任何非空集合的真子集,所以关系正确的;

(4)正确;

(5)正方形是特殊的平行四边形,结论正确,且 $A \subsetneqq B$ 也正确;

(6)由 E 中 $\frac{y}{1-x^2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 \neq 0 \\ y=1-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow y=1-x^2$ $(x \neq \pm 1)$,可得 $E \subsetneqq F$,故原结论不正确.

【例 2】写出满足条件的相应集合:

(1)满足条件$\{1\} \subsetneqq A \subseteq \{1,2,3\}$的所有集合 A 是__________.

(2)满足 $\phi \subsetneqq B \subseteq \{a,b,c,d\}$的集合 B 有____

________.

(3)集合$\{1,2,\{1,2\}\}$的子集有________;

(4)若 $M\subseteq N,M\subseteq H,N=\{0,1,2,3\},H=\{0,2,4,5\}$,则满足上述条件的集合 M 为________。

解析:(1) 首先要理解子集与真子集的含义,$\{1\}\subsetneqq A$ 指出 A 中除含元素 1 外,还应含有其他元素;$A\subseteq\{1,2,3\}$ 指出 A 中含有除元素 1 外的其他元素应在 2,3 中选择。因此符合条件的 A 有:$\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}$共 3 个。

(2)由 $\phi\subsetneqq B$ 知,集合 B 为非空集合;又由 $B\subseteq\{a,b,c,d\}$知,B 为集合$\{a,b,c,d\}$的所有非空子集,故满足条件的集合 B 有:$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}$共 15 个非空子集。

(3)$\{1,2\}$是双元素集合,其作为集合$\{1,2,\{1,2\}\}$ 的一个元素,其子集为:$\phi,\{1\},\{2\},\{\{1,2\}\},\{1,2\},\{1,\{1,2\}\},\{2,\{1,2\}\},\{1,2,\{1,2\}\}$,共 8 个。

(4)由 $M\subseteq N,M\subseteq H$,即 M 既是 N 的子集又是 H 的子集,说明 M 是由 N、H 的共有元素构成的集合,同时 ϕ 是 M、N、H 的子集,故满足条件的 M 有:$\phi,\{0\},\{2\}$和$\{0,2\}$共 4 个。

※方法规律:一般地,如果一个有限集的元素个数为 n,则其子集个数为 2^n,真子集的个数为 2^n-1.

讲点二:集合的相等

详释:1、一般地,如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,反过来,集合 B 的每一个元素也都是集合 A 的元素,那么我们就说集合 A 等于集合 B,记作 $A=B$,读作"A 等于 B".

由子集的含义可得等价定义,若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则 $A=B$.用 Venn 图表示为如图 1-2-1

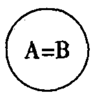

图 1-2-1

2、由集合相等的定义,可得证明两个集合相等的方法,即欲证 $A=B$,只需证明 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 都成立即可。

3、$A=B$ 只要 A、B 所含元素完全相同,排列顺序可不同。

【例 3】判断下列各组中集合间的关系:

(1)已知 $M=\{x|x=2n+1,n\in z\},N=\{y|y=4n\pm1,n\in z\}$,则 M____N;

(2)已知 $E=\{0,1\},F=\{x|x\subseteq E\},H=\{x|x\in E,x\in N^+\}$,则 F____H;

(3)已知集合 $A=\{(x,y)|x+y<0,xy>0\},B=\{(x,y)|x<0,y<0\}$,则 A____B;

(4)$P=\{z|z=y^2+2y+4,y\in R\}$,
$Q=\{y|y=x^2-4x+7,x\in R\}$,则 P____Q.

解析:(1) 方法一 (列举法)$M=\{\cdots,-1,1,3,5,7,\cdots\},N=\{\cdots,-1,1,3,5,7\cdots\}$,所以 $M=N$.

方法二(分类讨论法)设 $x\in M$,即 $x=2n+1,n\in z$,①当 $n=2k$ 时,$x=4k+1\in N$,②当 $n=2k-1$ 时,$x=4k-1\in N$,所以 $M\subseteq N$;设 $y\in N$,即 $y=4n\pm1,n\in z$,① 当 $y=4n+1$ 时,$y=4n+1=2\times2n+1\in M$,②当 $y=4n-1$ 时,$y=4n-1=[2\times(2n-1)+1]\in M$,所以 $N\subseteq M$.

综上,$M\subseteq N$ 且 $N\subseteq M$,故 $M=N$.

(2)集合 F 中的元素是集合 E 的子集,H 中的元素是集合 E 中的正整数,即 1,所以 $F=\{\phi,\{0\},\{1\},\{0,1\}\},H=\{1\}$所以 $H\subseteq F$ 或 $F\supseteq H$.

(3) $\begin{cases}x+y<0\\xy>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\y<0\end{cases}$

故 $A=B$.

(4)$z=y^2+2y+4=(y+1)^2+3\geqslant3$,所以 $P=\{z|z\geqslant3\}$;又 $y=x^2-4x+7=(x-2)^2+3\geqslant3$,所以 $Q=\{y|y\geqslant3\}$,即有 $P=Q$.

【例 4】设集合 $A=\{a,a+d,a+2d\},B=\{a,ab,ab^2\}$,其中 $a\neq0$,且 $A=B$,求 b 的值。

解析:根据集合相等的定义,可知集合 A、B 的元素完全相同,故可分两种情况进行讨论:

$$(1)\begin{cases}a+d=ab\\a+2d=ab^2\end{cases}\text{ 或 }(2)\begin{cases}a+d=ab^2\\a+2d=ab\end{cases}$$

先解(1),方程组可化为$\begin{cases}2a+2d=2ab & ①\\a+2d=ab^2 & ②\end{cases}$

将①-②式得 $b^2-2b+1=0$ 解得 $b=1$. 将 $b=1$ 代入集合 B 中,得 $B=\{1,1,1\}$这与集合中元素的互异性矛盾,故将 $b=1$ 舍去 。

再解(2),原方程组可化为 $\begin{cases}a(b^2-1)=d & ③\\a(b-1)=2d & ④\end{cases}$

由于 $b\neq1$,将$\frac{③}{④}$可得 $b+1=\frac{1}{2}$,所以 $b=-\frac{1}{2}$,从而 $a=-\frac{4}{3}d$,将其代入集合 A、B 中检验,满足题

设条件,所以 $b=-\frac{1}{2}$.

※方法规律:(1)用分类讨论方法解题是解集合问题常用方法,分类时必须考虑周全,不能缺少某种情况;

(2)对于研究集合相等的问题必须满足元素的互异性,同时对于结果必须认真检验,看是否符合已知条件。

二、典例分析,学技巧

【例 1】设集合 $P=\{x|-2\le x\le 5\}$,$Q=\{x|n+1\le x\le 2n-1\}$,若 $Q\subseteq P$,求实数 n 的取值范围.

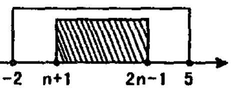

图 1-2-2

解析:由 $Q\subseteq P$,若 $Q\neq\phi$,则有 $n+1\ge -2$ 且 $2n-1\le 5$,如图 1-2-2 另有 $Q=\phi$ 情况。

下面分 $Q=\phi$ 和 $Q\neq\phi$ 两种情况进行分类讨论:

(1)当 $Q=\phi$ 时,$n+1>2n-1$,解得 $n<2$;

(2)当 $Q\neq\phi$ 时,

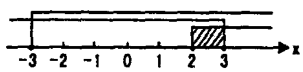

图 1-2-3

有 $\begin{cases} n+1\ge -2 \\ 2n-1\le 5 \\ n+1\le 2n-1 \end{cases}$

解得 $2\le n\le 3$,综上(1)(2)得 $n\le 3$.

※方法规律:这里运用了数形结合和分类讨论的方法,对于 $Q\subseteq P$ 的子集问题,必须注意讨论 Q 是否为 ϕ 的情况。

【例 2】由三个实数构成的集合 $A=\{m,\frac{n}{m},1\}$,也可以表示为集合 $B=\{m^2,m+n,0\}$,求 $m^{2006}+n^{2006}$ 的值.

解析:由集合相等的含义和集合元素的确定性知,$A=B$,即 $\{m,\frac{n}{m},1\}=\{m^2,m+n,0\}$ ①,从而有 $0\in\{m,\frac{n}{m},1\}$,又因为 $m\neq 0$,所以只有 $\frac{n}{m}=0$,$n=0$ 代入①式得 $\{m,0,1\}=\{m^2,m,0\}$ ②

由②式可得 $m^2=1$,即 $m=\pm 1$

当 $m=1$ 时,则有 $\{1,0,1\}=\{1,1,0\}$ 这与集合中元素的互异性不符,故舍去 $m=1$;

当 $m=-1$ 时,则有 $\{-1,0,1\}=\{1,1,0\}$ 即 $m=-1$ 符合题意。

将 $m=-1,n=0$ 代入求式 $m^{2006}+n^{2006}=1$.

※本例是在深刻理解集合相等的含义和集合中元素的特征基础上完成的。

<基础练习>

1、判断下列各组中两集合间的关系:

(1)设 $M=\{a,b\}$,$N=\{x|x\in M\}$,则集合 M、N 的关系是 M___N;

(2)设 $x,y\in R$,集合 $P=\{(x,y)|y=x\}$,$Q=\{(x,y)|\frac{y}{x}=1\}$,则 P____Q;

(3)$A=\{x|x^3-x=0\}$,$B=\{x|x=\frac{1+(-1)^n}{2},n\in z\}$,则集合 A____B.

2、集合 $\{(0,1),(-1,1)\}$ 的所有子集是__________.

3、集合 $H=\{x|0\le x<5$ 且 $x\in N\}$ 的真子集的个数为________.

4、设 $C=\{0,1\}$,$D=\{x|\phi\subsetneqq x\subseteq C\}$,则 $D=$________________.

5、已知 $E=\{x\in R|x<-1$ 或 $x>5\}$,$F=\{x\in R|m\le x<m+4\}$,若 $E\supsetneqq F$,求实数 m 的取值范围.

6、已知集合 $M=\{y,z\}$,$N=\{3,2y\}$,且 $M=N$,求实数 y、z 的值.

<综合提高>

1、下列命题正确的是( )

(1)已知 M、N 为两个集合，$M\not\subseteq N \Leftrightarrow$ 存在 $x\in M$，使得 $x\notin N$；

(2) 已知集合 $A=\{x|x=2n-1,n\in N\}$，$B=\{x|x=2n+1,n\in N\}$，则 $A=B$；

(3) 已知集合 $P=\{x|x=\frac{n}{2}+\frac{1}{4},n\in z\}$，$Q=\{x|x=\frac{n}{4}+\frac{1}{2},n\in z\}$，则 $P\supsetneqq Q$.

2、已知 $A=\{2,3\}$，$B=\{2,5,a^2-3a+5\}$，$C=\{1,3,a^2-6a+10\}$，若 $A\subseteq B$ 且 $A\subseteq C$，则 a 的值为_____.

3、已知方程组 $\begin{cases}2x+y+6=0\\x-y+3=0\end{cases}$ 的解集为 $\{(m,n)\}$，若 $\{m+n\}$ 是方程 $x^2+(m+n)x+d=0$ 的解集的一个真子集，则这一方程的解集的另一个真子集是_____.

4、设集合 $C=\{x|x^2+4x=0\}$，$D=\{x|x^2+2(h+1)x+h^2-1=0,h\in R\}$，若 $D\subseteq C$，求实数 h 的值。

§1.3 集合的运算

聚焦

1、理解交集、并集、补集概念和符号之间的区别与联系，并能准确进行集合间的运算；

2、合作学习数学思想和 Venn 图等数形结合方法的运用是突破数学难重点的关键；

3、通过使用符号等集合语言，使学生感受集合语言在描述客观现实和数学问题的作用，逐步学会用数学思维方式去认识世界，培养实事求是科学态度。

一、重难点剖析，学方法

讲点一：交集

详释：(1)一般地，对于两个给定的集合 A、B，由属于 A 又属于 B 的所有元素构成的集合，叫做 A、B 的交集，记作 $A\cap B$，读作“A 交 B”。

(2)交集是两个集合的公共集，其符号语言表示为：$A\cap B=\{x|x\in A 且 x\in B\}$，Venn 图表示为：如图 1-3-1

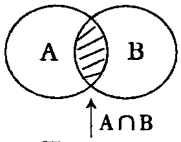

图 1-3-1

(3)定义中的“所有”包含两层含义：①凡是 $A\cap B$ 中的元素都是两集合 A 与 B 的公共元素；②集合 A 与 B 中的所有公共元素都在 $A\cap B$ 中。另外，并不是任何两个集合总有公共元素，当两个集合 A 与 B 没有公共元素时，不能说集合 A 与 B 没有交集，而是 $A\cap B=\phi$。

$A\cap B=\phi$ 是指：(1)A、B 至少有一个是空集；(2)A、B 均不是空集，但 A 与 B 无公共元素。

(4)由交集的定义可知，对于任意两个集合 A、B，都有如下性质：

(1)$A\cap B=B\cap A$； (2)$A\cap A=A$；

(3)$A\cap\phi=\phi\cap A=\phi$； (4)$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$.

(5)$A\subseteq B$ 与 $A\cap B=A$，$B\subseteq A$ 与 $A\cap B=B$ 都是等价命题.

(6)$A\cap B$ 的各种情形，可以用 Venn 图1-3-2 表示为

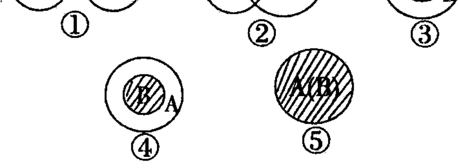

图 1-3-2

①A、B 相离，无公共元素，$A\cap B=\phi$；

②A、B 相交，有公共元素，但互不包含；

③$A \subsetneqq B$，$A \cap B = A$；

④$B \subsetneqq A$，$A \cap B = B$；

⑤$A = B$，$A \cap B = A = B$.

【例 1】(1) 已知集合 $M = \{x|x+2=0\}$，$N = \{x|x^2-x-8=0\}$，求 $M \cap N$；

(2) 已知集合 $M = \{(x,y)|y=x+2, x \in R\}$，$N = \{(x,y)|y=x^2-2x-8, x \in R\}$，求 $M \cap N$；

(3) 已知集合 $M = \{y|y=x+2, x \in R\}$，$N = \{y|y=x^2-2x-8, x \in R\}$，求 $M \cap N$.

解析：(1) 集合 $M = \{-2\}$，$N = \{-2, 4\}$，则 $M \cap N = \{-2\}$；

(2) 这里的集合 M、N 为点集，M 是直线 $y=x+2$ 上所有点的集合，N 是抛物线 $y=x^2-2x-8$ 上所有点的集合，则 $M \cap N$ 是直线 $y=x+2$ 和抛物线 $y=x^2-2x-8$ 的交点的集合.

即方程组 $\begin{cases} y=x+2 \\ y=x^2-2x-8 \end{cases}$ 的解集。

解该方程组，得 $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=5 \\ y=7 \end{cases}$

所以 $M \cap N = \{(-2,0),(5,7)\}$

(3) 集合 M、N 分别为一次函数 $y=x+2$ 和二次函数 $y=x^2-2x-8$ 的值域。当 $x \in R$ 时，$y=x+2$ 的值是任意实数，所以 $M = R$；当 $x \in R$ 时，$y=x^2-2x-8=(x-1)^2-9 \geqslant -9$，所以 $N = \{y|y \geqslant -9\}$，所以 $M \cap N = \{y|y \geqslant -9\}$.

※解此题时，必须准确理解集合的含义，该例三个小题都用描述法表示，但代表元素的形式不同，所以集合的含义不同。

讲点二：并集

详释：(1) 一般地，对于两个给定的集合 A、B，由两个集合的所有元素构成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$，读作"A 并 B"。符号语言表示为：$A \cup B = \{x|x \in A$ 或 $x \in B\}$，图形语言表示为：1-3-3 所示的阴影部分。

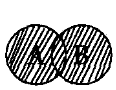

图 1-3-3

(2) 并集的符号语言表示中的"$x \in A$ 或 $x \in B$"包括下列三种情况：

①$x \in A$，但 $x \notin B$；②$x \in B$，但 $x \notin A$；

③$x \in A$ 且 $x \in B$，由于 A、B 的公共元素在 $A \cup B$ 中只允许出现一次，因此我们说 $A \cup B$ 是由所有至少属于 A、B 两者之一的元素构成集合。

(3) 由并集的定义可知，对于任意两个集合 A、B，都有如下性质：

①$A \cup B = B \cup A$；②$A \cup A = A$；③$A \cup \phi = \phi \cup A = A$；④若 $A \subseteq B$，则 $A \cup B = B$；若 $B \subseteq A$，则 $A \cup B = A$；⑤$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$，$A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.

【例 2】设集合 $E = \{x|1<x<m\}$，$F = \{x|5 \leqslant x \leqslant 9\}$，求 $E \cup F$.

解析：由于 m 是待定常数，故需要先对 E 进行分类讨论，然后再求 $E \cup F$.

(1) 当 $m<1$ 或 $m=1$ 时，则 $E = \phi$，如图 1-3-2

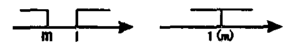

图1-3-2

这时 $E \cup F = F$，即 $E \cup F = \{x|5 \leqslant x \leqslant 9\}$.

(2) 当 $m>1$ 时，又可分为三种情况：

①如果 $1<m<5$，则 $E \cup F = \{x|1<x<m$，或 $5 \leqslant x \leqslant 9\}$，如图 1-3-3

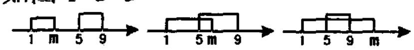

图1-3-3

②如果 $5 \leqslant m \leqslant 9$，则 $E \cup F = \{x|1<x \leqslant 9\}$

③如果 $m>9$，则 $E \cup F = \{x|1<x<m\}$.

※方法规律：求集合的并集，首先要弄清楚集合内的元素是什么，特别是遇有含字母的情况，应根据题设条件和要求，采用分类讨论和数形结合方法解之。

讲点三：全集与补集

详释：(1) 全集：在研究集合与集合之间的关系时，如果所研究的集合都是某一给定集合的子集，那么称这个给定的集合为全集，通常用 U 表示。

全集是相对概念，是对于所要研究的问题而言，它含有与所研究的集合的全部元素。

(2) 补集：如果 $A \subseteq U$，由全集 U 中不属于 A 的所有元素构成的集合，叫做 A 在 U 中的补集，记作 $\complement_U A$，读作"A 在 U 中的补集"。数学符号语言表达为：$\complement_U A = \{x|x \in U$，且 $x \notin A\}$，图形语言表达为：矩形区域表示全集，如图 1-3-4 阴影部分为 $\complement_U A$。

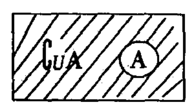

图 1-3-4

由补集定义可知，对于任意集合 A，有：$A \cup \complement_U A = U$，$A \cap \complement_U A = \phi$，$\complement_U(\complement_U A) = A$，$\complement_U U = \phi$，$\complement_U \phi = U$.