Gaodeng Shuxue

高等数学
思维与解题方法

Siwei Yu Jieti Fangfa

主　编　赵迁贵　张兴永
副主编　章美月　张慧星　王萃琦

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

高等数学思维与解题方法

主　编　赵迁贵　张兴永
副主编　章美月　张慧星　王萃琦

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书是在原讲义的基础上改编而成的，包括高等数学全部教学内容，并介绍高等数学中的几种通用思维方法，着重讲解高等数学解题方法与技巧，对于培养和提高学生的数学基础会起到积极的作用。

本书精选的典型例题覆盖了高等数学通常考试题型，它是大中专院校学生和报考研究生的读者复习高等数学的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学思维与解题方法/赵迁贵，张兴永主编.
—徐州:中国矿业大学出版社，2010.2
ISBN 978-7-5646-0608-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①赵…②张… Ⅲ.①高等数学—解题 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 027935 号

书　　名 高等数学思维与解题方法
主　　编 赵迁贵　张兴永
责任编辑 潘俊成
出版发行 中国矿业大学出版社
(江苏省徐州市解放南路　邮编 221008)
营销热线 (0516)83885307　83884995
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail:**cumtpvip@cumtp.com
排　　版 徐州中矿大印发科技有限公司排版中心
印　　刷 徐州中矿大印发科技有限公司
经　　销 新华书店
开　　本 787×960　1/16　**印张** 18　**字数** 353 千字
版次印次 2010 年 2 月第 1 版　2010 年 2 月第 1 次印刷
定　　价 25.00 元
(图书出现印装质量问题，本社负责调换)

前　言

21世纪，国际之间的竞争是经济实力的竞争，科学技术的竞争，也是各类人才的竞争；我国的高等教育将实施大众化教育，我们的教育思想、教学方法、教学手段必须与之适应现代化教育，着力提高教学质量与水平，促进学生个性发展，培养高素质人才。

数学如今已经越来越被人们认为是在科学发展中具有高度重要性的学科。实际上，数学研究极大地开阔了人类思维的领域。随着科学技术的发展，人们越来越深刻地认识到，没有数学就难于创造出当代的科学成就。

“高等数学”是高等院校十分重要的基础理论必修课之一，由于它覆盖面广，应用广泛，对学生的素质培养有较大的影响而受到广泛的重视，其内容也是全国硕士研究生入学数学考试的基本内容。该课程具有学时长、内容多、理论性强、难度大、解题技巧性灵活多样等特点，是衡量大学生数学水平的重要标志，学好该门课程能够使大学生逻辑思维和推理能力得到训练，分析和解决问题的能力得到提高，解题技巧和计算水平得到加强，从而为后续课程的学习奠定坚实的数学基础。为此，我们在2000年以来开设的选修课“高等数学思维与解题方法”的基础上，编写了《高等数学思维与解题方法》一书，旨在为培养具有扎实的数学基础同时又具有较强创新意识与创新能力的高素质人才起到积极的作用。

由于编者水平所限，本书难免存在不妥之处，恳请读者批评指正。

作者
2010年1月

目　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一篇　高等数学的思维方法简介

数学是严密的科学.数学是由概念、性质、定理、公式等,按照一定的逻辑规则组成的严密的知识体系,有很强的系统性.因此,在高等数学的学习中,一定要循序渐进,打好基础,完整地、系统地掌握基本概念、基本理论和基本运算,其中包括思维方法与解题方法两方面.掌握了数学的思维方法就掌握了分析问题的能力,这是数学的生命和灵魂,而数学的解题方法是解决问题的技巧和能力,需要动手、动笔去演练,去应用.两方面有机结合起来,就能把知识转化为能力,就能把科学转化为力量.掌握了高等数学思维与解题方法,学好高等数学就不是一件难事,数学也就不再是枯燥乏味的符号.为此,本章介绍高等数学常用的思维方法.

第一节　基本概念法

在包括物质时空的大自然与抽象空间、精神世界的"大自然"中,往宏观方向与微观方向分出的层次都是无限的,因此任何一桩事物,任何一套理论都只能建立在一套相对的基础与相对的基本概念上.但凡一桩事物,在人脑里必有一个反映,这个反映出的形象叫做该事物的概念,人们常常用比喻、解释、描述的语言来叙述这个概念.

数学是一门精确的学科,自然,所用到的概念都需要准确化,定义就起到这一作用.

高等数学的概念是从大量的实际问题中根据其共同的本质而抽象出来的,从数学上给出定义.例如,函数、极限、连续的概念都是从大量的实际问题中根据其共同的本质而抽象出来而定义的.又如,研究函数因变量对自变量的平均变化率和瞬时变化率而引入的导数(导数概念)定义,进而研究函数的导数,又有中值定理及其导数的重要应用.由全体原函数的概念又得到不定积分的概念等.可以说,高等数学的概念是高等数学大厦的支柱.概念的本质包括概念的内涵与外延.所谓概念的内涵是指所反映的客观事物的特有属性;概念的外延是指所反映的那一类事物.理解概念,是指对该概念的内涵是什么,外延有哪些都应十分清楚.只有概念清楚,才能理解各种解题方法.

【例 1-1-1】　如果用极限式 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$ 来定义函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连

续，必然包括以下条件：函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义；极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限值等于函数值：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

这里，首先要以函数、极限和邻域概念作为基础，然后用特殊的极限来定义函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

同样，用极限式 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ 来定义函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

用极限式 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$ 来定义函数 $f(P)(P \in D \subset R^n)$ 在点 P_0 处连续.

【例 1-1-2】 如果用极限式 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 来定义 $f(x)$ 在点 x 处可导，必然包括以下条件：函数 $f(x)$ 在点 x 的邻域内有定义；极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 存在；记为：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

这里，同样要以 Δx 为自变量的特定形式的新函数 $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 与极限概念作为基础，然后用特殊的极限来定义函数 $f(x)$ 在点 x 处可导.

由此归纳，还可得到二阶导数、三阶导数，…，n 阶导数的定义：

$$f''(x), f'''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$$

用极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}$ 来定义函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处对 x 的偏导数，即：

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

用极限 $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$ 来定义函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处对 y 的偏导数，即：

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

【例 1-1-3】 定积分的定义是在讨论曲边梯形面积和变速直线运动的路程等问题时，抽象得到一个特定乘积和式的极限：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

来定义函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的定积分，必然包括以下条件：函数 $f(x)$ 在

闭区间$[a,b]$上有界，$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$，$\lambda=\max(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)$，且极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$存在.

同样，可以定义函数$f(x,y)$在闭区域D上的二重积分：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

以及函数$f(x,y)$在曲线L上对弧长的曲线积分：

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_1)\Delta s_i$$

注意到以上的各种各样定义都是针对事物是存在的，不随人们的定义而转移，因此被定义的客观事物就是检验其定义是否确切的唯一标准.

【例 1-1-4】 证明：偶函数的导函数是奇函数，奇函数的导函数是偶函数.

本题含有奇函数、偶函数、导函数三个概念，此外仅以偶函数为例进行证明.

证明　设$y=f(x)$为偶函数，定义域关于原点对称，且$f(-x)=f(x)$（偶函数的概念），那么：

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\qquad\text{（导函数的概念）}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{h}\qquad\text{（偶函数的概念）}\\&=-\lim_{-h\to 0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h}\qquad\text{（代数恒等变换）}\\&=-f'(-x)\qquad\text{（导函数的概念）}\end{aligned}$$

即$f'(-x)=-f'(x)$，显然新的函数$f'(x)$的定义域关于原点对称，故$f'(x)$为奇函数.

注：如果由复合函数求导法则（满足条件）也可以证明，其实对式子两边求导：

$$[f(-x)]'=[f(x)]'$$

得到：

$$f'(-x)(-x)'=f'(x)$$

$$f'(-x)(-1)=f'(x)$$

这就是：

$$f'(-x)=-f'(x)$$

当$f(x)$为奇函数时，同理可证$f'(x)$是偶函数.

【例 1-1-5】 证明：周期函数的导函数亦为周期函数.

证明　设$f(x)$是以T（$T>0$为常数）为周期的周期函数，即$\forall x,x+T\in D(f)$

$$f(x+T)=f(x)\qquad\text{（周期函数的定义）}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\qquad\text{（导函数的概念）}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h+T)-f(x+T)}{h}\qquad（周期函数的定义）$$

$$=f'(x+T)\qquad（导函数的概念）$$

由于 $f'(x)=f'(x+T)$，故 $f'(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

【例 1-1-6】 微分方程的定义是在形式上用归纳描述的方法来表达的.

凡是表示未知函数、未知函数的导数与自变量的方程叫做微分方程. 微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数叫做微分方程的阶. 这样之后 n 阶微分方程的一般形式为：

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

一阶线性微分方程的一般形式为：

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

当 $Q(x)\equiv 0$ 时，即称 $y'+P(x)y=0$ 为一阶齐次线性微分方程.

当 $Q(x)\neq 0$ 时，即称 $y'+P(x)y=Q(x)$ 为一阶非齐次线性微分方程.

二阶线性微分方程的一般形式为：

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$$

二阶常系数线性微分方程的一般形式为：

$$y''+py'+qy=f(y)$$

当 $f(x)\equiv 0$ 时，即称 $y''+py'+qy=0$ 为二阶常系数齐次线性微分方程.

当 $f(x)\neq 0$ 时，即称 $y''+py'+qy=f(x)$ 为二阶常系数非齐次线性微分方程.

n 阶常系数线性微分方程的一般形式为：

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x)$$

当 $f(x)\equiv 0$ 时，即称 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$ 为 n 阶常系数齐次线性微分方程.

当 $f(x)\neq 0$ 时，即称 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x)$ 为 n 阶常系数非齐次线性微分方程.

第二节　对称性方法

对称，在几何图形中，有点对称（如奇函数的图像关于原点对称等）、线对称（如偶函数的图像关于 y 轴对称等）、面对称（如曲面 Σ 由方程 $F(x,y,z)=0$ 表示，且恒有 $F(x,y,-z)=0$，则曲面 Σ 关于 xOy 坐标面对称等）. 球面，则既是关于点对称的，又是关于线对称的，还是关于面对称的，因此，一切立体图形中，最完美的是球形，一切平面图形中，最完美的是圆形.

关于点、线、面的这种几何对称性，不仅给我们以最美好的享受，更重要的是，这种几何对称性总体现出函数中"变量"的某种对称性，而后者对我们论证与计算将带来极大方便.

对称，在数学中的形式上的对称，如公式的对称性、运算符号的对称性与运算法则的对称性等，同样给予人们最完美的享受，譬如：

函数的全微分　$\mathrm{d}u(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$

函数乘积的微分　$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$

两函数乘积的 n 阶导数的莱布尼兹公式与二项式公式具有良好的对称性

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$$

$$[uv]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

泰勒公式也具有良好的对称性：

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)}(x-x_0)^{n+1}\ (\xi 在 x_0 与 x 之间)$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}x_0}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中，$f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$.

集合运算的德·莫根律：

$$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C,(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$$

或

$$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

这种形式的对称性，不仅给我们带来了计算的方便，而且给我们的思维以启迪，使我们产生联想，从而可促进创造性思维的萌生.

一、利用函数奇偶性和对称性求导

【例 1-2-1】 利用偶函数的导函数是奇函数，奇函数的导函数是偶函数，就会得到关于高阶导数的结果. 偶数阶导数不改变函数的奇偶性，而奇数阶导数改变函数的奇偶性.

如果函数 $f(x)$ 为偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，则两边求导得到：

$$f^{(2n)}(-x)(-1)^{2n}=f^{(2n)}(x),$$

所以有：

$$f^{(2n)}(-x)=f^{(2n)}(x)$$

这表明偶函数偶数阶导数仍然是偶函数，奇偶性不改变. 而：

$$f^{(2n+1)}(-x)(-1)^{2n+1}=f^{(2n+1)}(x)$$

所以：

$$f^{(2n+1)}(-x)=-f^{(2n+1)}(x)$$

这表明偶函数奇数阶导数却是奇函数，奇偶性改变.

如果函数 $f(x)$ 为奇函数，完全类似结果.由此结论易知：

若设函数 $F(x)=\frac{1}{2}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})$，则 $F^{(101)}(0)=0$，

若设函数 $G(x)=\frac{1}{2}(e^{\sin x}-e^{-\sin x})$，则 $G^{(101)}(0)=0$.

【例 1-2-2】 利用多元函数的对称性求偏导数.

若对函数 $f(x,y,z)$，恒有 $f(x,z,y)=f(x,y,z)$，则称 $f(x,y,z)$ 关于变量 y 与 z 是对称的，类似可定义函数关于变量 x 与 y（或 x 与 z）的对称性.一句话，若在函数中将某两个变量位置交换后其函数值不变，则称该函数关于这两个变量是对称的，如：

$f(x,y,z)=x\tan(y^2+z^2)$ 关于 y 与 z 对称；

$g(x,y,z)=\sqrt{xy}\sin(z+x^3y^3)$ 关于 x 与 y 对称；

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 则关于自变量两两对称.

求偏导数时，可以利用函数的对称性简化计算.例如求 $r_{xx}+r_{yy}+r_{zz}$.

$$r_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},\ r_{xx}=\frac{r-xr_x}{r^2}=\frac{r-\frac{x^2}{r}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}$$

于是利用函数的对称性得到：

$$r_{yy}=\frac{r^2-y^2}{r^3},\ r_{zz}=\frac{r^2-z^2}{r^3}$$

从而有：

$$r_{xx}+r_{yy}+r_{zz}=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}=\frac{3r^2-r^2}{r^3}=\frac{2}{r}$$

二、利用函数奇偶性与区域对称性计算各种积分

1. 利用函数的奇偶性计算对称区间上的定积分 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]\ (a>0)$ 上连续，则有：

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时}\\ 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时}\end{cases}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

【例 1-2-3】 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，$g(x)$ 满足 $g(x)+g(-x)=A$（A 为常数），$f(x)$ 为偶函数，证明 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=A\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$，并计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$.

证明 因为 $f(x)$ 为偶函数 $f(-x)=f(x)$，$g(x)+g(-x)=A$，所以有：

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x&=\int_{0}^{a}[f(x)g(x)+f(-x)g(-x)]\mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{a}f(x)[g(x)+g(-x)]\mathrm{d}x\\&=A\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

设 $f(x)=|\sin x|$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 是偶函数.

$g(x)=\arctan \mathrm{e}^{x}$，令 $G(x)=\arctan \mathrm{e}^{x}+\arctan \mathrm{e}^{-x}$，则有：

$$G'(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{2+\mathrm{e}^{2x}}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2+\mathrm{e}^{-2x}}=\frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}-\frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}=0$$

$G(x)=C$，而 $G(0)=\frac{\pi}{2}$，所以：

$$\arctan \mathrm{e}^{x}+\arctan \mathrm{e}^{-x}=\frac{\pi}{2}$$

于是：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=A\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\mathrm{d}x\ \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

2. 利用函数的奇偶性计算对称区域上的二重积分和曲线积分

（1）设二重积分 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，当区域 D 关于 x 轴对称时，即 $D=D_1+D_2$，D_1 与 D_2 关于 x 轴对称，则有：

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}2\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{当 } f(x,y) \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数时}\\ 0, & \text{当 } f(x,y) \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数时}\end{cases}$$

当区域 D 关于 y 轴对称时，即 $D=D_1+D_2$，D_1 与 D_2 关于 y 轴对称，则：

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}2\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{当 } f(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数时}\\ 0, & \text{当 } f(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数时}\end{cases}$$

【例 1-2-4】 设 D 为闭区域 $x^2+y^2\leqslant1$，计算 $\iint\limits_{D}(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 $\iint\limits_D (x+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D (x^2+2xy+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 0 = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}$$

(2) 设对弧长的(一型)曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$，函数 $f(x,y)$ 在积分弧段 L 上连续，当 L 关于 x 轴对称时，即 $D=L_1+L_2$，L_1 与 L_2 关于 x 轴对称，则有：

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \begin{cases} 2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s, & \text{当 } f(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数时} \\ 0, & \text{当 } f(x,y) \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数时} \end{cases}$$

3. 利用函数的奇偶数性计算对称区域上的三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

设函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上连续，$\Omega=\Omega_上+\Omega_下$，$\Omega_上$ 与 $\Omega_下$ 关于 xOy 平面对称，则有：

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega_上} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, & \text{当 } f(x,y,z) \text{ 关于 } z \text{ 为偶函数时} \\ 0, & \text{当 } f(x,y,z) \text{ 关于 } z \text{ 为奇函数时} \end{cases}$$

注：当空间区域 Ω 关于 $yOz(zOx)$ 坐标平面对称，也有类似的结果.

【例 1-2-5】 设 Ω 为闭区域 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，计算 $\iiint\limits_\Omega (x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

解 $\iiint\limits_\Omega (x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$= \iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2\iiint\limits_\Omega (xy+xz+yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{4\pi}{5}$$

4. 利用函数的奇偶性计算对称区域上的曲面积分

(1) 设对面积的(一型)曲面积分 $\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$，函数 $f(x,y,z)$ 在积分曲面 Σ 上连续，曲面 Σ 关于 xOy 平面对称，则有：

$$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \begin{cases} 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S, & \text{当 } f(x,y,z) \text{ 关于 } z \text{ 为偶函数时} \\ 0, & \text{当 } f(x,y,z) \text{ 关于 } z \text{ 为奇函数时} \end{cases}$$

注：当积分曲面 Σ 关于 $yOz(zOx)$ 坐标平面对称，也有类似的结果.

(2) 设对坐标(x,y)的(二型)曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，函数$R(x,y,z)$在有向积分曲面$\Sigma$上连续，曲面$\Sigma$关于$xOy$平面对称，且有向曲面的方向也是关于$xOy$平面对称，则对坐标$(x,y)$的曲面积分有：

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}2\iint\limits_{\Sigma_1} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{当 } R(x,y,z) \text{ 关于 } z \text{ 为奇函数时}\\ 0, & \text{当 } R(x,y,z) \text{ 关于 } z \text{ 为偶函数时}\end{cases}$$

例如，设Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧在$x\geqslant 0,y\geqslant 0$的部分，则

$$\iint\limits_{\Sigma} xyz^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

因为这里$f(x,y,z)=xyz^2$关于z为偶函数. 若Σ_1是球面$x^2+y^2+z^2=1$的$z\geqslant 0$的部分，则：

$$\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为这里$f(x,y,z)=xyz$关于z为奇函数.

注：当有向曲面Σ关于yOz坐标平面对称，对坐标(y,z)的曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$有类似的结果.

当有向曲面Σ关于zOx坐标平面对称，对坐标(z,x)的曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$也有类似的结果.

【例 1-2-6】 如果Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$外侧，Σ_1为球面$x^2+y^2+z^2=1$外侧的$z\geqslant 0$的部分，则

(1) $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 其中：

$\iint\limits_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，因为有向曲面$\Sigma$关于$xOy$平面对称，被积函数$R=z^2$关于$z$为偶函数；

$\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，因为有向曲面$\Sigma$关于$yOz$平面对称，被积函数$P=x^2$关于$x$为偶函数；

$\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$，因为有向曲面$\Sigma$关于$zOx$平面对称，被积函数$Q=y^2$关于

y 为偶函数.

$$(2)\ \iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iint_{\Sigma_1} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= 3\iint_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r = 6\pi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r = 4\pi$$

第三节　归纳类比法

归纳和类比思维方法是人类赖以发现真理的基本的、重要的思维方法. 归纳是在通过多种手段(观察、实验、分析等)对许多个别事物的经验认识的基础上，发现其规律，总结出原理或定理. 归纳是从观察到一类事物的部分对象具有某一属性，而得出该类事物都具有这一属性的推理方法. 或者说，归纳思维就是要从众多的事物和现象中找出共性和本质的东西，进行抽象化思维. 从数学的发展可以看出，许多新的概念、定理、法则的形成，都经历过积累经验的过程，进行大量观察、计算然后归纳出其共性和本质的东西.

在高等数学中，许多重要结果的得出，都用到了归纳思维. 例如，求某一函数的 n 阶导数，通常的方法是求出其一阶、二阶(有时还要求出其三阶、四阶)导数，再归纳出 n 阶导数的表达式.

类比是根据两个(或多个)对象内部属性、关系的某些方面相似，而推出它们在其他方面也可能相似的推理. 例如在平面解析几何中，两点的距离是：$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，在空间解析几何中，两点的距离是：$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$. 又如在平面解析几何中圆的方程是：$x^2+y^2=R^2$，在空间解析几何中球面的方程是：$x^2+y^2+z^2=R^2$.

这些都用到了类比思维. 在学习多元函数的微分学和积分学时，应注意与已经学习过的一元函数的微积分相应的概念、理论、方法进行类比.

实践证明：在学习过程中，将新内容与自己已经熟悉的知识进行类比，不但易于接受、理解掌握新知识，更重要的是培养和锻炼了自己的类比思维，有利于开发自己的创造力.

归纳和类比思维方法是数学方法论中最基本的方法之一，用好了可以获得新发现，取得新成果，甚至可以完成重要的发现与发明.

【例 1-3-1】 在形式上进行类比，用拉格朗日定理证明不等式是根据拉格朗日定理结论的形式：

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \qquad (\xi \text{在} a \text{与} b \text{之间})$$

对于 $f'(\xi)$放大缩小证明，如 $m<f'(x)<M$，则有：

$$m(b-a)<f(b)-f(a)<M(b-a)$$

$$m(b-a)>f(b)-f(a)>M(b-a)$$

用类比的思想可得到：

$$f'(b)-f'(a)=f''(\eta)(b-a) \qquad (\eta \text{在} a \text{与} b \text{之间})$$

$$f(b,y)-f(a,y)=f'_x(\xi)(b-a) \qquad (\xi \text{在} a \text{与} b \text{之间})$$

用类比的思想可总结出如下的解题方法.

【例 1-3-2】　证明：$\dfrac{\frac{1}{n^{p+1}}}{(p+1)^2}\ln n<n^{\frac{1}{p}}-n^{n^{\frac{1}{p+1}}}-\dfrac{1}{n^{p+1}}<\dfrac{n^{\frac{1}{p}}}{p^2}\ln n,n>,p\geqslant 1$

证明　跟踪类比知结论中 $n^{\frac{1}{p}}-n^{\frac{1}{p+1}}$相当于拉格朗日定理中的 $f(b)-f(a)$；从而寻得 $f(x)$之形为 $f(x)=n^{\frac{1}{x}}$，进而可定出 $b=p,a=p+1$，显然，$f(x)=n^{\frac{1}{x}}$在$[p,p+1]$上满足拉格朗日定理条件，故至少存在一点 $\xi\in(p,p+1)$，使：

$$f(p)-f(p+1)=n^{\frac{1}{p}}-n^{\frac{1}{p+1}}=f'(\xi)[p-(p+1)]=n^{\frac{1}{\xi}}\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)(-1)\ln n$$

于是 $n^{\frac{1}{p}}-n^{\frac{1}{p+1}}=\dfrac{1}{\xi^2}n^{\frac{1}{\xi}}\ln n,\xi\in(p,p+1)$，而

$$\frac{1}{(p+1)^2}n^{\frac{1}{p+1}}\ln n<\frac{1}{\xi^2}\cdot n^{\frac{1}{\xi}}\ln n<\frac{1}{p^2}\cdot n^{\frac{1}{p}}\ln n$$

所以：

$$\frac{\frac{1}{n^{p+1}}}{(p+1)^2}\ln n<n^{\frac{1}{p}}-n^{\frac{1}{p+1}}<\frac{n^{\frac{1}{p}}}{p^1}\ln n$$

注：因为 $n>1$，可知 $\ln n>0$.

注意　数学归纳法是一种从个别到一般的证明方法，它可用来证明具有无限个对象，而这无限个对象又与自然数形成一一对应的命题，它的证明过程有两步：

第一步，验证 $n\geqslant k_0$ 时命题成立，这是一种对个别的验证与归纳的过程，进而产生一种猜想：这个命题是否对一切自然数成立？于是导致第二步的证明.

第二步是对共性或者一般性成立的证明，它的基本思想是：设 $n=k$ 时命题成立，证明 $n=k+1$ 时命题成立.

为什么第二步证明后，就可以断定命题对无限多个对象都是正确的呢？这是因为第二步中的自然数具有任意性，从而保证了第二步可作无限次的反复，因此，如果数学归纳法只有第一步，它就属于一种不完全的归纳，就不能保证命题

对无限个结论是正确的.

【例 1-3-3】 设 $c>0$,数列 $x_1=\sqrt{c}$,$x_2=\sqrt{c+\sqrt{c}}$,$x_3=\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}}$ …求数列极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$

解 这里数列是用递推公式 $x_{n+1}=\sqrt{c+x_n}$ 给出,必须首先证明本数列极限存在.

(i) 用数学归纳法证明数列 x_n 单调增加.

第一步 显然 $x_2=\sqrt{c+\sqrt{c}}>\sqrt{c}=x_1$,

第二步 设 $n=k$ 时命题成立,即设 $x_k>x_{k-1}$ 成立,证明 $n=k+1$ 时命题成立,而:

$$x_{k+1}=\sqrt{c+x_k}>\sqrt{c+x_{k-1}}=x_k$$

故数列 x_n 单调增加.

(ii) 用数学归纳法证明数列有上界.

第一步 $x_2=\sqrt{c+\sqrt{c}}<\sqrt{c+2\sqrt{c}+1}=\sqrt{c}+1$.

第二步 设 $n=k$ 时命题成立,即设 $x_k=\sqrt{c+x_{k-1}}<\sqrt{c}+1$ 成立,证明 $n=k+1$时命题成立,而 $x_{k+1}=\sqrt{c+x_k}<\sqrt{c+\sqrt{c}+1}<\sqrt{c+2\sqrt{c}+1}=\sqrt{c}+1$.

故数列 x_n 有上界,即对于任意的自然数 n,数列 $x_n<\sqrt{c}+1$.

根据单调有界数列必有极限准则,所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,设其极限为 A,即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$,则由递推公式 $x_{n+1}=\sqrt{c+x_n}$ 两边取极限得到:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{c+x_n}$$

$A=\sqrt{c+A}$,$A^2-A-C=0$,$A=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4c}}{2}$.

由于数列 $x_n>0$,取正舍负 $A=\dfrac{1-\sqrt{1+4c}}{2}<0$,得到 $A=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

第四节 逆向思维法

遵循已有的思路去考虑问题的思维方式叫习惯性思维(或叫惯常思维).这种思维方式保证了思维过程的连续性,它促使人类知识得以稳步增长,各种知识得以日趋完善.逆向思维是指从已有思路的反方向去考虑问题的思维方式,故又称反向思维,它对解放思想、开阔思路、解决某些难题、开创新的方向,往往能起到积极的作用.它反映了思维过程的间断性和突变性,逆向思维常能帮助人们克

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com