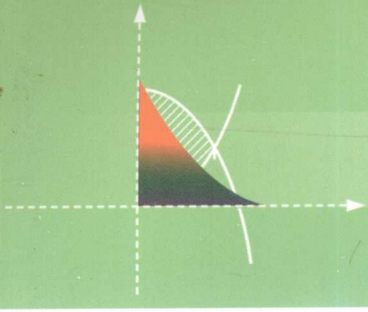

高等院校理工·经管类专业教材

# 线性代数

XIANXINGDAISHU

何志芳 朱平天 主编

东南大学出版社
Southeast University Press

高等院校理工·经管类专业教材

# 线性代数

何志芳　朱平天　主编
王志华　肖艳艳　段红星　编

东南大学出版社
·南京·

## 内容提要

本书是以教育部工科类、经济管理类本科教学基础课程教学基本要求为依据编写的通用教材。

本书内容分为:行列式、矩阵及其初等变换与解线性方程组、矩阵的运算、向量的线性相关性与线性方程组的解的结构、特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换等七章。各章均配有一定数量的习题,书末附有习题参考答案。

根据多年的教学经验,本书将矩阵的初等变换这一简单实用且强有力的工具贯穿使用于全书,既便于教又便于学,是本书的一个特色。

本书可作为高等院校理工、经管各类专业的线性代数课程的试用教材或教学参考书。


**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数/何志芳,朱平天主编.—南京:东南大学出版社,2010.9

ISBN 978-7-5641-2375-8

Ⅰ.①线… Ⅱ.①何…②朱… Ⅲ.①线性代数 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第157272号

| | |
|---|---|
| 出版发行 | 东南大学出版社 |
| 社　　址 | 南京市四牌楼2号(邮编:210096) |
| 出 版 人 | 江　汉 |
| 经　　销 | 江苏省新华书店 |
| 印　　刷 | 兴化市印刷厂 |
| 开　　本 | 700mm×1000mm　1/16 |
| 印　　张 | 11 |
| 字　　数 | 220千 |
| 版　　次 | 2010年9月第1版　2010年9月第1次印刷 |
| 书　　号 | ISBN 978-7-5641-2375-8 |
| 印　　数 | 1-3 000册 |
| 定　　价 | 19.80元 |

本社图书若有印装质量问题,请直接与读者服务部联系。电话(传真):025-83792328

# 前　言

本书内容分为：行列式、矩阵及其初等变换与解线性方程组、矩阵的运算、向量的线性相关性与线性方程组的解的结构、特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换等七章。各章均配有一定数量的习题，书末附有习题参考答案。

本书可作为高等院校理工、经管各类专业的线性代数课程的试用教材或教学参考书。

南京师范大学何志芳副教授、朱平天教授给出了本书的整体思路、知识体系、各章节的目录、主要知识点的分布与衔接等。南京师范大学泰州学院王志华、肖艳艳、段红星老师编写了各章节。其中第一章、第四章由肖艳艳老师执笔，第二章、第三章由段红星老师执笔，第五章、第六章、第七章由王志华老师执笔，全书由何志芳、朱平天负责统稿。

书稿完成后，2009 年在南京师范大学泰州学院经过一轮试用，在此期间各任课教师提出了不少宝贵意见，在此一并表示衷心感谢！

本书将矩阵的初等变换这一简单实用且强有力的工具贯穿使用于全书，既便于教又便于学，希望能形成特色。但限于编者的水平，书中肯定会有不少疏漏和不当之处，恳请广大读者不吝赐教。

编　者

2010 年 6 月

# 目 录

# 第一章　行　列　式

行列式的概念源于线性方程组的求解问题，行列式是研究线性代数的重要工具，它在自然科学的许多领域有着广泛的应用. 本章主要介绍行列式的定义、性质、计算方法与简单应用.

## §1　二阶、三阶行列式

考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \tag{1}$$

我们用消元法来解这个方程组. 用 $a_{22}$ 乘第一个方程，再用 $a_{12}$ 乘第二个方程，然后两式相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

类似地，可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则可求得方程组(1)的解为：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

这是方程组(1)的公式解. 为了便于记忆，我们引入二阶行列式的概念. 令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{3}$$

并将这样规定的 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为**二阶行列式**. 根据这个规定，(2)式中的分母即为二阶行列式 $D$，而分子也可写成二阶行列式. 记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

则当 $D \neq 0$ 时，方程组(1) 的解(2) 可表示为：$x_1 = \dfrac{D_1}{D}$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D}$.

我们把二阶行列式(3)的横排称为**行**，竖排称为**列**. 数 $a_{ij}$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$ 称为行列式(3) 的**元素**. 元素 $a_{ij}$ 的第一个下标 $i$ 指示该元素所在的行，称为**行标**，第二个下标 $j$ 指示它所在的列，称为**列标**. 例如元素 $a_{21}$ 位于行列式的第二行第一列.

**例 1** 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 = 14 \end{cases}.$$

**解** 由于 $D = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$，又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 14 & 2 \end{vmatrix} = 44,\ D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 66,$$

因此 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{44}{22} = 2$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{66}{22} = 3$.

对三元线性方程组有相仿的结论. 设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases},$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为**三阶行列式**. 二阶、三阶行列式所表示的数可形象地用对角线法则来记忆，见图 1.1 与 1.2.

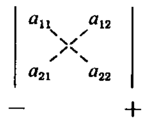

图 1.1

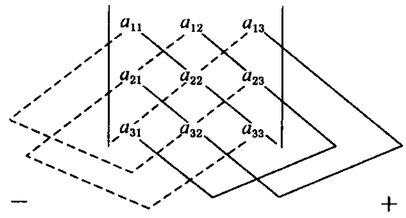

图 1.2

**例 2** 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

**解** 依据对角线法则,可得

$$\begin{aligned} D &= 2\times 0\times(-2)+(-1)\times 1\times 4+3\times(-3)\times 1 \\ &\quad -3\times 0\times 4-(-1)\times(-3)\times(-2)-2\times 1\times 1 \\ &= 0+(-4)+(-9)-0-(-6)-2=-9. \end{aligned}$$

另外,我们有,若三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则上述三元线性方程组的解为:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

本章要把这个结果推广到 $n$ 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

上. 为此,我们要给出 $n$ 阶行列式的定义,并讨论它的性质与计算.

## §2 排列及其逆序数

为了定义 $n$ 阶行列式,我们引入排列的概念,并讨论排列的一些性质.

**定义 1** 由 1, 2, …, $n$ 组成的一个有序数组称为一个 **$n$ 级排列**.

例如,4132 是一个 4 级排列,3421 也是一个 4 级排列, 而 24135 是一个 5 级排列.

易见,$n$ 级排列的总数为 $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1=n!$.

**定义 2** 在一个排列中,如果某两个数满足前面的数大于后面的数,则称这两个数组成一个**逆序**.

例如,在排列 4132 中,逆序有 41, 43, 42, 32. 而排列 24135 中的逆序有 21, 41, 43.

**定义 3** 一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**.

一般,我们可记一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$. 于是, $\tau(4132)=4$, $\tau(24135)=3$.

由定义 3 可知,若记 $\tau_{j_s}$ 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中位于 $j_s$ 之前且比 $j_s$ 大的数的个数,则 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)=\tau_{j_1}+\tau_{j_2}+\cdots+\tau_{j_n}$. 例如 $\tau(4132)=\tau_4+\tau_1+\tau_3+\tau_2=0+1+1+2=4$.

**定义 4** 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**,逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

因而,排列 4132 为偶排列,排列 24135 为奇排列. 对排列 $12\cdots n$,由于其中各数按从小到大的自然顺序排列,因此称为**自然排列**. 易见,自然排列是一个逆序数为零的偶排列.

我们把互换一个排列中某两个数的位置,而其余的数不动的变换称为一个**对换**. 例如对偶排列 4132 中 3 与 4 实施对换,就可以得到排列 3142,而这个排列是个奇排列. 一般地,我们有

**定理 1** 对换改变排列的奇偶性.

**证** 先证对换排列中相邻两个数的情形.

设排列为 $a_1a_2\cdots a_sabb_1b_2\cdots b_t$,对换 $a$ 与 $b$ 后的排列为 $a_1a_2\cdots a_sb'a'b_1b_2\cdots b_t$,其中 $a'=a$, $b'=b$. 并以 $\tau_i$ 表示排列中位于数 $i$ 之前且比 $i$ 大的数的个数. 则

$$\tau(a_1a_2\cdots a_sabb_1b_2\cdots b_t)=\tau_{a_1}+\tau_{a_2}+\cdots+\tau_{a_s}+\tau_a+\tau_b+\tau_{b_1}+\tau_{b_2}+\cdots+\tau_{b_t},$$

该和记为 $l_1$.

$$\tau(a_1a_2\cdots a_sb'a'b_1b_2\cdots b_t)=\tau_{a_1}+\tau_{a_2}+\cdots+\tau_{a_s}+\tau_{b'}+\tau_{a'}+\tau_{b_1}+\tau_{b_2}+\cdots+\tau_{b_t},$$

该和记为 $l_2$.

若 $a<b$,则 $\tau_{a'}=\tau_a+1$, $\tau_{b'}=\tau_b$. 从而 $l_2=l_1+1$.

若 $b<a$,则 $\tau_{a'}=\tau_a$, $\tau_{b'}=\tau_b-1$. 从而 $l_2=l_1-1$.

可见,$l_1$ 与 $l_2$ 的奇偶性不相同. 因此,对换排列中相邻两数改变排列的奇偶性.

再证对换排列中任意两个数的情形.

设排列为 $a_1a_2\cdots a_sab_1b_2\cdots b_tbc_1c_2\cdots c_l$. 欲对换 $a$ 与 $b$,于是将 $a$ 依次与 $b_1$, $b_2$, $\cdots b_t$, $b$ 对换,得到排列 $a_1a_2\cdots a_sb_1b_2\cdots b_tbac_1c_2\cdots c_l$,再将 $b$ 依次与 $b_t$, $\cdots$, $b_2$, $b_1$ 对换,从而实现了 $a$ 与 $b$ 的对换.

而上述过程共经 $(t+1)+t=2t+1$ 次相邻两数的对换,又 $2t+1$ 为奇数,于是,对换排列中任意两个数改变排列的奇偶性.

## §3 n 阶行列式的定义

有了之前的准备,本节就可以给出 $n$ 阶行列式的定义.

首先我们从二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

与三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

中,可以看出一些规律:

(1) 二阶行列式中每项(如 $a_{11}a_{22}$)都是两个位于不同行、不同列的元素的乘积,三阶行列式中每项(如 $a_{12}a_{23}a_{31}$, $-a_{13}a_{22}a_{31}$)都是三个位于不同行、不同列的元素的乘积.

(2) 二阶行列式是所有取自不同行、不同列的两个元素的乘积的代数和. 三阶行列式是所有取自不同行、不同列的三个元素的乘积的代数和.

(3) 当二阶行列式与三阶行列式中每项的行指标按自然顺序排列时,若列指标的排列是偶排列,则该项取正号,若列指标的排列是奇排列,则该项取负号. (如 $-a_{13}a_{22}a_{31}$ 中行排列是自然排列,而列排列 321 是奇排列,因此该项取负号. )

据此,我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2},$$

其中 $\tau(j_1 j_2)$ 为列排列 $j_1 j_2$ 的逆序数，$\sum\limits_{j_1 j_2}$ 表示对所有的 2 级排列求和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

其中 $\tau(j_1 j_2 j_3)$ 为列排列 $j_1 j_2 j_3$ 的逆序数，$\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对所有的 3 级排列求和.

由此，我们可以引出 $n$ 阶行列式的概念.

**定义 5** 我们称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为一个 **$n$ 阶行列式**，其中横排称为**行**、竖排称为**列**，数 $a_{ij}$ 称为行列式的**元素**. $n$ 阶行列式是所有取自不同行、不同列的 $n$ 个元素的乘积的代数和，因此共 $n!$ 项，每项形如

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 $n$ 级排列，$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ 是由该排列确定的符号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 $n$ 级排列求和.

**例 3** 计算上三角行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$.

**解** 根据行列式的定义，$D$ 的每项形如 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$，下面考虑 $D$ 的所有非零的项. 首先看 $D$ 的第 $n$ 行，要取得这行元素 $a_{nj_n} \neq 0$，只有 $j_n = n$. 接着看 $D$ 的第 $n-1$ 行，而这行元素 $a_{n-1,\, j_{n-1}} \neq 0$，只有取 $j_{n-1} = n-1$ 或 $n$，但由于 $D$ 中

的每项要求是取自不同行、不同列的 $n$ 个元素，所以此时只有取 $j_{n-1}=n-1$. 依次类推，不难得到 $j_{n-2}=n-2,\cdots,j_2=2,j_1=1$. 因此 $D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

同理，我们可得下三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

**引理** 对换乘积 $a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$ 中元素的次序，并不改变行排列与列排列的逆序数之和的奇偶性. 特别地，对换乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中元素的次序，并不改变行排列与列排列的逆序数之和的奇偶性.

**证** 设对换乘积 $a_{p_1q_1}\cdots a_{p_kq_k}\cdots a_{p_sq_s}\cdots a_{p_nq_n}$ 中任两个元素 $a_{p_kq_k}$ 与 $a_{p_sq_s}$，得到乘积 $a_{p_1q_1}\cdots a_{p_sq_s}\cdots a_{p_kq_k}\cdots a_{p_nq_n}$，并记

$$\tau_1=\tau(p_1\cdots p_k\cdots p_s\cdots p_n)+\tau(q_1\cdots q_k\cdots q_s\cdots q_n)=\tau_1'+\tau_1'',$$

$$\tau_2=\tau(p_1\cdots p_s\cdots p_k\cdots p_n)+\tau(q_1\cdots q_s\cdots q_k\cdots q_n)=\tau_2'+\tau_2''.$$

易见，$\tau_1'$ 与 $\tau_2'$ 的奇偶性相反，$\tau_1''$ 与 $\tau_2''$ 的奇偶性也相反. 因此，$\tau_1$ 与 $\tau_2$ 的奇偶性相同. 所以结论成立.

**定理 2** $n$ 阶行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 为行排列，$\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}$ 表示对所有的 $n$ 级排列求和.

**证** 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则根据行列式的定义有

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

我们记
$$D_1=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

任取 $D$ 中一项 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，对换乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中元素的次

序,使得其列排列为自然排列,即为排列 $12\cdots n$. 并设对换后的乘积为 $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$,显然

$$a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}=a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

又由引理可知 $$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(12\cdots n)}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)+\tau(12\cdots n)},$$

即 $$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

于是 $$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

由此可得,对 $D$ 中的任一项 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 有且仅有 $D_1$ 中的某一项 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$ 与之对应相等;反之也成立. 于是 $D=D_1$,结论成立.

## §4 行列式的性质

有了行列式的定义,理论上我们可以计算任意一个 $n$ 阶行列式,可这通常是件麻烦的事情. 因为此时需要计算 $n!$ 项,而每一项又是 $n$ 个元素的乘积,需要作 $n-1$ 次乘法,因此计算 $n!$ 项时共计需要作 $n!(n-1)$ 次乘法,当 $n$ 较大时,乘法的次数是个相当惊人的数字. 为此,我们研究行列式的性质,以简化行列式的计算.

**定义 6** 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ 记\ D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称行列式 $D^{\mathrm{T}}$ 为行列式 $D$ 的**转置行列式**.

**性质 1** 行列式与它的转置行列式相等.

**证** 记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的转置行列式为 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix}$.

又 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,于是 $d_{ij}=a_{ji}$, $i, j=1, 2, \cdots, n$. 再由行列

式的定义以及§3定理2，可得

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} d_{1j_1} d_{2j_2} \cdots d_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} \\ &= D, \end{aligned}$$

因此 $D^{\mathrm{T}} = D$.

由性质1可知，行列式中行与列具有同等的地位，对行成立的性质，对列也成立. 反之亦然.

**性质2** 互换行列式的两行(两列)，行列式变号，即

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}.$$

**证** 

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \sum_{k_1 \cdots k_i \cdots k_j \cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1 \cdots k_i \cdots k_j \cdots k_n)} a_{1k_1} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{jk_j} \cdots a_{nk_n} \\ &= \sum_{k_1 \cdots k_i \cdots k_j \cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1 \cdots k_i \cdots k_j \cdots k_n)} a_{1k_1} \cdots a_{jk_j} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{nk_n} \\ &= -\sum_{k_1 \cdots k_i \cdots k_j \cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1 \cdots k_j \cdots k_i \cdots k_n)} a_{1k_1} \cdots a_{jk_j} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{nk_n} \\ &= -\sum_{k_1 \cdots k_j \cdots k_i \cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1 \cdots k_j \cdots k_i \cdots k_n)} a_{1k_1} \cdots a_{jk_j} \cdots a_{ik_i} \cdots a_{nk_n} \\ &= \text{右边}. \end{aligned}$$

我们用 $r_i$ 表示行列式的第 $i$ 行，用 $c_j$ 表示行列式的第 $j$ 列，并将互换行列式的第 $i$ 行(或列)与第 $j$ 行(或列)记为 $r_i \leftrightarrow r_j$(或 $c_i \leftrightarrow c_j$).

**推论** 若行列式中有两行(两列)相同，则这个行列式为零.

**证** 设 $D=\begin{array}{l}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$,

则由性质 2 知,互换 $D$ 的第 $i$ 行与第 $j$ 行可得 $D=-D$. 于是 $D=0$.

**性质 3** 用一个数乘行列式的某一行(列)等于用这个数乘这个行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将行列式的第 $i$ 行(或列)乘以数 $k$,记为 $kr_i$(或 $kc_i$).

**推论 1** 若行列式中有一行(列)全为零,则这个行列式为零.

**推论 2** 若行列式中有两行(两列)对应成比例,则这个行列式为零,即

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

**性质 4** 若行列式 $D$ 中某一行(列)的元素都是两数之和,如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则这个行列式 $D$ 等于两个行列式之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**证** 由于

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (a_{ij_i} + b_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &\quad + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n}, \end{aligned}$$

于是结论成立.

**性质 5** 将行列式一行(列)的某倍加至另一行(列),行列式不变,即

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}.$$

将行列式的第 $j$ 行(或列)乘以数 $k$ 加至第 $i$ 行(或列),记为 $r_i+kr_j$(或 $c_i+kc_j$).

以上未证明的性质,请读者自己证明.

**例 4** 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

**解** 利用行列式的性质,将其化为上三角行列式.