代数拓扑
讲义

北京大学
数学力学系几何代数教研室

1959.8.

代数拓扑学引論

第一章 單纯复合形及其同調群

第一章. 单纯复合形及其同调群.

本章中我们提出本书中所研究的几何对象——单纯复合形及其可剖空间，並从几何性质的考虑，利用群的术語，对於每一个可剖空间的一个固定的剖分，即对于每一个单纯复合形，引进它的同調群。同調群集中地反映出单纯复合形的許多重要的几何性质。它的拓扑不变性的証明则留待下一章。

§1. 单纯复合形. 可剖空间.

单纯形是最基本的而且也是最簡单的几何对象。欧几里得空间中有限个有规则地互相鄰接的单纯形组成单纯复合形；单纯复合形的点所形成的欧几里得空间的子空间叫作可剖空间。实质上我们只用欧几里得空间的拓扑性质；用欧几里得空间的度量性质时也只用它们所反映的拓扑性质。例如在提到点在欧几里得空间中的球形鄰域时，实质上我只用到点在欧几里得空间中的鄰域。

1. 单纯形.

定义 1. 設 $a_0, a_1, \cdots, a_q$ 是 n 维欧几里得空间 R^n 中的 $q+1$ 个无关点。命

$$x = \lambda^0 a_0 + \lambda^1 a_1 + \cdots + \lambda^q a_q, \tag{1}$$

其中实数 $\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^q$ 满足下列两组条件：

$$\lambda^0 + \lambda^1 + \cdots + \lambda^q = 1; \tag{2}$$

$$\lambda^0 \geq 0, \lambda^1 \geq 0, \cdots, \lambda^q \geq 0. \tag{3}$$

R^n 中这样的点 x 的集合叫作一个 q 维单纯形，記作 $(a_0, a_1, \cdots, a_q)$ 或 S^q。点 $a_0, a_1, \cdots, a_q$ 叫作 S^q 的顶点。

先看 R^n 中的满足式(1)与(2)的点 x 的集合。它形成 R^n 中的一个 q 维的超平面（参看附录 I 中习题 3 与 6）。其次，q 维单纯形是这 q 维超平面的一个子集。零维单纯形 S^0 是一个点 a_0。一维单纯形 S^1 是以不同的两点 a_0 与 a_1 为端点的闭线段。二维单纯形 S^2 是以不共线的三点 a_0, a_1, a_2 为顶点的闭三角形。三维单纯形是以不共面的四点 a_0, a_1, a_2, a_3 为顶点的闭四面体。

命题1. 由式(1)与(2)所决定的q维超平面的每一点x唯一地决定了这组实数$\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^q$。因而这组实数形成点$x$的在这超平面中的一种坐标，叫作重心坐标。

証. 設点x还可由另二式

$$x = \mu^0 a_0 + \mu^1 a_1 + \cdots + \mu^q a_q, \quad (4)$$

$$\mu^0 + \mu^1 + \cdots + \mu^q = 1 \quad (5)$$

决定. 从式(4)减去式(1)，与从式(5)减去式(2)，分别得

$$(\mu^0 - \lambda^0) a_0 + (\mu^1 - \lambda^1) a_1 + \cdots + (\mu^q - \lambda^q) a_q = 0,$$

$$(\mu^0 - \lambda^0) + (\mu^1 - \lambda^1) + \cdots + (\mu^q - \lambda^q) = 0.$$

但点$a_0, a_1, \cdots, a_q$无关，故$\mu^i = \lambda^i$，$i = 0, 1, \cdots, q$. 証完。

满足式(2)与(3)的$\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^q$也叫作点$x$在$q$维单纯形$\underline{s}^q$中的重心坐标；我们也写$\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^q)$. 物理意义如下：如果在点$a_i$处有$\lambda^i (\geq 0)$单位的质点，而且式(2)成立，则这组质点的重心就是点x. 例如，以

$$\lambda^0 = \lambda^1 = \cdots = \lambda^q = 1/(q+1)$$

为重心坐标的点x就是$\underline{s}^q$的中心(或重心)；特别地，点$x = \frac{1}{2}(a_0 + a_1)$是線段$\underline{s}^1 = (a_0, a_1)$的中点。

命题2. n维欧几里得空间R^n中的q维单纯形$\underline{s}^q$唯一地决定它的頂点。換句話説，如果R^n中的两个单纯形$\underline{s}^q$与$\underline{s}_1^p$重合，则它的頂点一对一地重合，因此$p = q$.

証. 只需証明頂点的特征：1)如果$\underline{s}^q$的点x不是頂点，则x是以$\underline{s}^q$的某两点为端点的線段的中点；2)如果x是頂点，则x不是这样的一条線段的中点。

1)設式(1)中的x不是$\underline{s}^q$的頂点，于是点x至少有两个重心坐标不为零；設是$\lambda^i > 0$，$\lambda^j > 0$，$i \neq j$。設ε是小于λ^i与λ^j的任意正数. 命

$$u_0 = x + \varepsilon(a_i - a_j), \qquad u_1 = x - \varepsilon(a_i - a_j).$$

这两点显然属于$\underline{s}^q$. 而且

$$x = \frac{1}{2}(u_0 + u_1).$$

2)考虑$\underline{s}^q$的頂点a_q. 用反証法，設v_0与v_1是$\underline{s}^q$的不同的两点：

$$v_h = \lambda_h^0 a_0 + \lambda_h^1 a_1 + \cdots + \lambda_h^q a_q, \quad h=0,1;$$

而且 $a_k = \frac{1}{2}(v_0 + v_1)$。既然 v_0 与 v_1 不同，因而决非同一个顶点，故必有两个肩标 $i \neq j$，使得 $\lambda^i > 0$，$\lambda^j > 0$。根据假設，

$$a_k = \tfrac{1}{2}(\lambda_0^0 + \lambda_1^0) a_0 + \tfrac{1}{2}(\lambda_0^1 + \lambda_1^1) a_1 + \cdots + \tfrac{1}{2}(\lambda_0^q + \lambda_1^q) a_q,$$

这里 $\lambda_0^i + \lambda_1^i > 0$，$\lambda_0^j + \lambda_1^j > 0$；但另一方面

$$a_k = 0a_0 + 0a_1 + \cdots + 1a_k + \cdots + 0a_q.$$

这与命题1矛盾。証完。

設 $\underline{S}^q = (a_0, a_1, \cdots, a_q)$ 是 R^n 中的一个 q 维单纯形。設点 a_{i_0}，$a_{i_1}, \cdots, a_{i_r}$ 是 $\underline{S}^q$ 的顶点中的任意 $r+1$ 个，$0 \leq r \leq q$；它们是无关点，因而 R^n 中有 r 维单纯形 $\underline{S}_1^r = (a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_r})$。$\underline{S}_1^r$ 叫作 $\underline{S}^q$ 的一个 r 维面，記作

$$\underline{S}_1^r < \underline{S}^q.$$

設 $a_{i_{r+1}}, \cdots, a_{i_q}$ 为 $\underline{S}^q$ 的顶点，但非 $\underline{S}^r$ 的顶点，则在式(1)到式(3)中命

$$\lambda^{i_{r+1}} = \cdots = \lambda^{i_q} = 0 \qquad (6)$$

时，就得到 $\underline{S}_1^r$ 的任意点 x。所以点集 $\underline{S}_1^r \subset \underline{S}^q$，而在 $\underline{S}_1^r$ 在 $\underline{S}^q$ 中是由方程组(6)决定的。反之，任意一组(6)型的方程决定 $\underline{S}^q$ 的一个 r 维面。$\underline{S}^q$ 的零维面就是顶点，一维面也叫作棱，q 维面就是 $\underline{S}^q$ 自身。$\underline{S}^q$ 的维数小于 q 的面叫作 $\underline{S}^q$ 的真面。

設 $\underline{S}^q$ 是 R^n 的一个 q 维单纯形。$\underline{S}^q$ 的、重心坐标都是正数的点叫作 $\underline{S}^q$ 的内点；$\underline{S}^q$ 的其它点叫作 $\underline{S}^q$ 的边沿点。$\underline{S}^q$ 的内点的集合叫作一个 q 维开单纯形。$\underline{S}^q$ 的边沿点的集合叫作 $\underline{S}^q$ 的边沿；它显然是 $\underline{S}^q$ 的全体 $q-1$ 维面（看作点集）的和集，記作 S^{q-1}。（理由，这里的点集与 $q-1$ 维球同胚；而且我们总用 S^n 表示 n 维球。注意，零维球是两个点。）

根据点集論的知識，不难验証下述命題：

(i) 從 q 维单纯形 $\underline{S}^q$ 所得到的 q 维开单纯形在 R^n 中的闭包就是 $\underline{S}^q$。$\underline{S}^q$ 既然是 R^n 中的一个有界闭集，$\underline{S}^q$ 是列紧的（Compact）。S^{q-1} 是 $\underline{S}^q$ 中的闭子集；因而 $\underline{S}^q - S^{q-1}$ 是 $\underline{S}^q$ 中的一个开子集。

$\underline{S}^q$ 的顶点也叫作从 $\underline{S}^q$ 所得到的 q 维开单纯形的顶点。从命

题1与(i)中的第一个断言，每个q维开单纯形也唯一地决定它的顶点。

从而单纯形的概念我们要引进两个单纯形的规则的相处这个重要概念，以便下一节中应用。設$\underline{s}$与$\underline{t}$是欧几里得空间中两个单纯形。如果$\underline{s}\cap\underline{t}$是空集或是$\underline{s}$与$\underline{t}$的一个公共面，就說$\underline{s}$与$\underline{t}$规则地相处。容易証明下述命题。

(ii) 如果$\underline{s}$与$\underline{t}$分别为欧几里得空间R^n中的单纯形$\underline{u}$与$\underline{v}$的一个面，而且$\underline{u}\cap\underline{v}\subset\underline{s}\cap\underline{t}$（因而$\underline{u}\cap\underline{v}=\underline{s}\cap\underline{t}$），则$\underline{u}$与$\underline{v}$规则地相处的充要条件是$\underline{s}$与$\underline{t}$规则地相处。

命题3. 一个单纯形的两个面规则地相处。

証：設$\underline{s}$与$\underline{t}$是一个单纯形$\underline{u}$的两个面。$\underline{s}$与$\underline{t}$在$\underline{u}$中各由一组(6)型的方程决定。这两组方程决定。这两组方程联合起来，或者仍形成在$\underline{u}$中的一组(6)型的方程，或者形成在$\underline{u}$中的一组矛盾方程。如果是后者，则$\underline{s}\cap\underline{t}$是空集；如果是前者，则$\underline{s}\cap\underline{t}$是$\underline{s}$与$\underline{t}$的一个公共面。于是$\underline{s}$与$\underline{t}$规则地相处。証完。

2. 自然的q维单纯形。对于每一个q，在$q+1$维欧几里得空间R^{q+1}中取一个规格化正交基$e_0, e_1, \cdots, e_q$。我们把R^{q+1}中的q维单纯形$\underline{t}^q=(e_0, e_1, \cdots, e_q)$叫作一个自然的$q$维单纯型。$\underline{t}^q$的任意点是

$$y=\lambda^0 e_0+\lambda^1 e_1+\cdots+\lambda^q e_q,$$

其中$\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^q$还满足式(2)与(3)。因为$e_0, e_1, \cdots, e_q$是规格化正交基，$(\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^q)$是$y$在$R^{q+1}$中的、对于这个基的欧几里得坐标；另一方面，根据重心坐标的定义，$(\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^q)$又是$y$在$\underline{t}^q$中的重心坐标。故对于$R^{q+1}$中的$\underline{t}^q$而言，$\underline{t}^q$的点的这两种坐标一致。

我们通常把$\underline{t}^q$中的以$\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^q$为重心坐标的点記作$\lambda$：$\lambda=(\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^q)$。根据$R^{q+1}$中的度量（附录I §5），在$R^n$中，$\underline{t}^q$的两个点$\lambda$与$\mu$间的距离是

$$\rho(\lambda, \mu)=\{(\lambda^0-\mu^0)^2+(\lambda^1-\mu^1)^2+\cdots+(\lambda^q-\mu^q)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

把$\rho(\lambda, \mu)$看作是这两点在$\underline{t}^q$中的距离，就得到$\underline{t}^q$中的一个

度量叫作 $\underline{t}^q$ 的自然度量。

现在討論由式(1)到(3)所定义的 $\underline{S}^q$ 与自然单纯形 $\underline{t}^q$ 间的关係。先给定它们的顶点间的自然对应

$$f_0: e_i \to a_i, \quad i=0,1,\cdots q.$$

其次，把式(1)看作是

$$x = f(\lambda).$$

这里 λ 看作是 $\underline{t}^q$ 的任一点，则得到映射

$$f: \underline{t}^q \to \underline{S}^q.$$

映射 f 叫作 f_0 在 $\underline{t}^q$ 上的线性扩张。点 $\lambda \in \underline{t}^q$ 与在映射 f 下的像点 x 有相同的重心坐标 $(\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^q)$；在这意义下 f 是保持重心坐标的映射．映射 f 是一一的（根据命题1），而且连续（根据 $\underline{t}^q$ 的自然度量以及点 x 是 $\underline{t}^q$ 中的点 λ 的坐标 $\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^q$ 的线性函数）。又因为 $\underline{t}^q$ 是列紧的，f 所以是一个拓扑映射。于是我们有：

(i) R^n 中任意一个 q 维单纯形 $\underline{S}^q$ 与自然的 q 维单纯形 $\underline{t}^q$ 在保持重心坐标的拓扑映射下同胚。因此，任意两个 q 维单纯形在保持重心坐标的拓扑映射下同胚。

值得再提出保持重心坐标的拓扑映射的另一个性质。考虑 $\underline{t}^q$ 的一个 r 维面 $\underline{t}^r = (e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_r})$．$f_0$ 限制在 $\underline{t}_1^r$ 的顶点上是一个对应

$$f_0': e_{i_j} \to a_{i_j}, \quad j=0,1,\cdots,r.$$

命 $\underline{S}_1^r = (a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_r})$。则有 f_0' 在 $\underline{t}_1^r$ 上的线性扩张

$$f': \underline{t}_1^r \to \underline{S}^r.$$

显然有

(ii) f 限制在 $\underline{t}_1^r$ 上的映射 $f|\underline{t}_1^r$ 就是 f'。

3. 单纯复合形．可剖空间．

定义2．設K是一个以 n 维欧几里得空间 R^n 中的单纯形为元素的有限集合。如果K满足下列两个条件，则它叫作一个单纯复合形，或者在不会引起混淆时，简单地叫作一个复合形：

1) 如果单纯形$\underline{s}$属于K，则$\underline{s}$的任意面也属于K；
2) K的任意两个单纯形规则地相处。

复合形的零维单纯形叫作**复合形的顶点**。复合形的諸单纯形的维数的最大值叫作**复合形的维数**。如果复合形$L \subset$复合形K，则L叫作K的一个**子复合形**。

定义3. 設K是n维欧几里得空间中的一个复合形。K的全体单纯形的全体点所形成的空间叫作一个**可剖空间**，記作$|K|$。K叫作$|K|$的一个**单纯剖分**或**三角剖分**或者在不会引起混淆时，簡单地叫作$|K|$的一个**剖分**。

一个可剖空间显然有不同的单纯剖分。

例. 設$\underline{s}^r$是R^n中一个单纯形。它的全体面或全体真面各形成一个复合形，分别叫作它的**闭包复合形**或**边沿复合形**，記作$Cl\,\underline{s}^r$或$Bd\,\underline{s}^r = \dot{\underline{s}}^r$。为簡单起見，$Cl\,\underline{s}^r$有时候也記作$\underline{s}^r$。显然$\dot{\underline{s}}^r$是$Cl\,\underline{s}^r$的一个子复合形，$|Cl\,\underline{s}^r| = \underline{s}^r$，$|\dot{\underline{s}}^r| = S^{r-1}$（見§1·1中（1）前）。

設K是一个复合形。K的全体维数$\leq r$的单纯形所成K的一个子复合形，叫作K的r**维骨架**，記作K^r。設$\underline{s}^r$是K的一个单纯形。K中以$\underline{s}^r$为面的全体单纯形以及它们的面形成K的一个子复合形，叫作$\underline{s}^r$在K中的**闭星形**，記作$St_K\,\underline{s}^r$或$St\,\underline{s}^r$。

R^n既然是一个度量空间，它的子空间$|K|$也是一个度量空间；$|K|$既然是有限个列紧集之和，它所以也是列紧的。

設K与L是两个复合形，而

$$f: |K| \longrightarrow |L|$$

是把可剖空间$|K|$映到可剖空间$|L|$的一个连续映射。如果$|L|$的每一个点是$|K|$的一个点的f像，我们就説f是一个**满映射**。此后为簡便起见，我们也説f是把复合形K映到复合形L的连续映射，記作

$$f: K \rightarrow L;$$

而且如果$|K|$与$|L|$同胚，我们也説K与L同胚。

4. 组合复合形．自然实现．从单纯复合形的定义我们想到，要给出一个单纯复合形，只要给出它的顶点以及给出如何聚集它的顶点来决定它的諸单纯形。这种想法引导我们引进组合复合形的概念。

定义4．設$\mathcal{K}$是一个非空的有限集合，而且其中还指定了若干非空子集。如果指定的子集满足下列两个条件，則$\mathcal{K}$叫作一个组合的复合形：

1) 一个指定的子集的每一个非空子集还是一个指定的子集；

2) $\mathcal{K}$的每一个元素所成的子集是一个指定的子集。

設$\mathcal{K}$是一个组合复合形。它的含有$q+1$个元素的一个指定的子集叫作一个q维的组合单纯形，而这$q+1$个元素叫作它们所决定的组合单纯形的顶点。如同在討論单纯复合形时一样，我们还可定义组合单纯形的面，组合复合形的顶点与维数。

欧几里得空间R^m中的一个n维单纯复合形K显然唯一地决定了一个n维组合复合形$\mathcal{K}$。我们就說K是$\mathcal{K}$在R^m中的一个几何实现。反之，给定了任一个组合复合形，它是否必定有一个几何实现？如果有，同一个组合复合形的不同的几何实现，从拓扑观点看来，有什么关係？以下的关于这些问题的討論，可以看作§1.2中的(i)的推广，以及§1.2中的(i)与(ii)的应用。

設$\mathcal{K}$是一个组合复合形，具有$r+1$个顶点$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$（$\mathcal{K}$的全体顶点，非$\mathcal{K}$的一个组合单纯形的顶点！）。設$\Delta^r=(e_0, e_1, \cdots, e_r)$是$r+1$维欧几里得空间$R^{r+1}$中的具有自然度量的自然的$r$维单纯形（見§1.2）。建立下列对应

$$\alpha_i \longrightarrow e_i.$$

如果$\mathcal{K}$的一个组合单纯形記作$(\alpha_{i_0}, \alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_q})$，則把$R^{r+1}$中的单纯形$(e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_q})$叫作它在这对应下的像．把$\mathcal{K}$的全体组合单纯形的像記作$N$．根据定义4与命题3，$N$是一个单纯复合形，叫作$\mathcal{K}$在$R^{r+1}$中的自然实现．$\Delta^r$的自然度量给出可剖空间$|N|$的一个度量，叫作$|N|$的，对应于$\mathcal{K}$的自然度量。还容易看出，自然单纯形$\Delta^r$的一点

$$\lambda^0 e_0+\lambda^1 e_1+\cdots+\lambda^r e_r=(\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^r)=\lambda$$

属于$|N|$的充要条件是：如果这点的非零坐标是$\lambda^{i_0}, \lambda^{i_1}, \cdots, \lambda^{i_q}$，则$\mathcal{K}$含有组合单纯形$(\alpha_{i_0}, \alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_q})$。

命题4. 設$\mathcal{K}$是一个组合复合形，N是它的自然实现，K是它的任一个几何实现。可剖空间$|N|$同胚；因而$\mathcal{K}$的任意两个几何实现同胚。

証. 設K在欧几里得空间R^m中而且它的顶点是$a_0, a_1, \cdots, a_n$，其中a_i与$\mathcal{K}$的顶点α_i对应。根据几何实现的定义，即通过$\mathcal{K}$，在N的顶点e_i与K的顶点a_i之间有一个自然的对应

$$f_0: e_i \to \alpha_i \to a_i.$$

因为N是t^n的闭包复合形$Cl\,t^n$的一个子复合形，仿照§1.2中(i)的証明命

$$x = f(\lambda) = \lambda^0 a_0 + \lambda^1 a_1 + \cdots + \lambda^n a_n,$$

这里的$\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^n)$限制在$|N|$上（不是在整个的$t^n$上）。因而$x \in |K|$。如同在§1.2中一样，$f$叫作$f_0$在$N$上的線性扩充。

从§1.2中(i)与(ii)，我们就可以猜想到

$$f: |N| \longrightarrow |K|$$

是一个拓扑映射，即$|N|$与$|K|$同胚。猜想的根據是：§1.2中的(i)保証f把N的每一个单纯形保持重心坐标不变地映成K上的对应单纯形，而且§1.2中的(ii)保証f在N的两个单纯形以及它们的公共面上有合乎理想的结合。我们简单地說，f是成塊地保持重心坐标不变的拓扑映射。现在回到正式証明。

首先，因为$|N|$的自然度量以及f是$|N|$中的点x的坐标$\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^n$的線性函数，它显然连续。因为$|N|$是列紧的，故只需要証明$f$是满映射与一一映射。

其次証f是满映射。設$t^q = (e_{i_0}, e_{i_1}, \cdots, e_{i_q}) \in N$，而且它的对应单纯形（通过$\mathcal{K}$）是$s^q = (a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_q}) \in K$。显然

$$f|t^q: t^q \longrightarrow s^q$$

就是§1.2 (i)中的满拓扑映射。又因为N的单纯形与K的单纯形（通过$\mathcal{K}$）成一一对应，故f是满映射。

最后証f是一一对应。設

$$\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^n), \quad \mu = (\mu^0, \mu^1, \cdots, \mu^n)$$

是$|N|$的两个点，並且$f(\lambda)=f(\mu)$。命

$$\lambda^{i_0}, \lambda^{i_1}, \cdots, \lambda^{i_h}; \qquad \mu^{j_0}, \mu^{j_1}, \cdots, \mu^{j_k}$$

分别是点λ与点μ的全体不为零的坐标，並且是按照在点λ与点μ的坐标中出现的次序写出的。点λ与点μ分别是N的单纯形

$$\underline{t}_1^h=(e_{i_0}e_{i_1}, \cdots, e_{i_h}), \quad \underline{t}_2^k=(e_{j_0}\cdots e_{j_1}, \cdots, e_{j_k})$$

的内点；根据§1.2(i)，$f(\lambda)$与$f(\mu)$分别是K上的对应单纯形

$$\underline{s}_1^h=(a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_h}), \quad \underline{s}_2^k=(e_{j_0}, e_{j_1}, \cdots, e_{j_k})$$

的内点。既然K的$\underline{s}_1^h$与$\underline{s}_2^k$规则地相处，而且它们有一个公共内点，所以它们是同一个单纯形：$\underline{s}_1^h=\underline{s}_2^k$；因而有

$$(i_0, i_1, \cdots, i_h)=(j_0, j_1, \cdots, j_k).$$

因而$\underline{t}_1^h=\underline{t}_2^k$。又因为$f$限制在一个单纯形上是一一的，所以$\lambda=\mu$。証完。

如果两个单纯复合形是同一个组合复合形的几何实现，则它们叫作同构的单纯复合形。

5. 最低维欧几里得空间中的几何实现。如果组合复合形具有$n+1$个顶点，则它的自然实现N是在$n+1$维的欧几里得空间中，现在我们要証明下述的更为深刻的定理。

定理1. n维的组合复合形$\mathfrak{K}$有在$2n+1$维的欧几里得空间R^{2n+1}中的几何实现K；而且K的顶点可以是R^{2n+1}中任意一组佔有最广位置的点。

証. 設$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$是$\mathfrak{K}$的全体顶点。根据附录I中定理2，能在$R^{2n+1}$中取点$a_0, a_1, \cdots, a_n$使得它们在$R^{2n+1}$中佔有最广位置。命$\alpha_i$与$a_i$对应。

現在，如果$\underline{s}^g=(\alpha_{i_0}, \alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_g})$是$\mathfrak{K}$的任一$g$维组合单纯形，则$g\leq n$。$\underline{s}^g$的顶点的对应点$a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_n}$在$R^{2n+1}$中所以无关，因而$R^{2n+1}$中有一个$g$维单纯形$\underline{s}^g=(a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_n})$。我们証明$R^{2n+1}$中全体这些单纯形$\underline{s}^g$形成一个单纯复合形$K$。首先，因为组合复合形的条件1)与2)，$K$满足单纯复合形的条件1)。其次，設$\underline{s}_1^h$与$\underline{s}_2^k$是$\mathfrak{K}$的任意两个组合单纯形，$\underline{s}_1^h$与$\underline{s}_2^k$是它们的，在$K$中的对应单纯形。設$\underline{s}_1^h$与$\underline{s}_2^k$共有$l+1$个不同

的顶点$C_0, C_1, \cdots, C_l$。因为$h \leq n$，$k \leq n$，所以$l \leq 2n+1$。因此这$l+1$个顶点在R^{2n+1}中无关，决定R^{2n+1}中一个单纯形$\underline{S}_3^l = (C_0, C_1, \cdots, C_l)$。$\underline{S}_3^l$未必属于K；但$\underline{S}_1^h$与$\underline{S}_2^k$都是$\underline{S}_3^l$的面，所以规则地相处（命题3），即K满足单纯复合形的条件2）。于是K是一个单纯复合形，显然就在R^{2n+1}中的一个几何实现。証完。

这条定理是說，任意一个n维的单纯复合形有在R^{2n+1}中的一个几何实现。它並未說某些特殊的n维的单纯复合形不能在低于R^{2n+1}中有几何实现。讨論n维的单纯复合形能在低于2n+1维的欧几里得空间有几何实现的必要条件，就是一个广泛而有意义的问题。例如1维的单纯复合形总有在R^3中的几何实现，而在某种条件下才有在R^2中的几何实现。

6. <u>关于可剖空间的限制</u>。为着說明可剖空间在几何图形中所占的範围，我们引进一个较广的概念：弯曲的单纯复合形与弯曲的可剖空间，而把以前所說的可剖空间叫作<u>平直的可剖空间</u>。

如果一个拓扑空间Π与一个平直的可剖空间P同胚，则叫Π叫作一个<u>弯曲的可剖空间</u>。設K是P的一个单纯剖分，$\underline{S}^q$是K的任一个q维单纯形，Π的子空间$\underline{\sigma}^q$，在这同胚下与$\underline{S}^q$对应的，就叫作一个q维的<u>弯曲单纯形</u>。全体$\underline{\sigma}^q$叫作一个<u>弯曲的单纯复合形</u>；我们說它是Π的一个<u>单纯剖分</u>。如果同胚是$f: |K| \to \Pi$，有时候为明确起見，把Π的这个剖分記作(f, K)剖分。例如Π是欧几里得空间R^{n+1}中以原点为中心的单位球S^n；取$\underline{S}^{n+1}$为R^{n+1}中以原点为中心的一个n+1维单纯形，取它的边缘复合形$\dot{\underline{S}}^{n+1}$为K；取f为以原点为中心射影。$S^n$就从$\dot{\underline{S}}^{n+1}$得到一个剖分。

拓扑学的目的是研究几何图形的拓扑性质。从拓扑的观点看来，Π与P是无区别的。所以如果只限于討論平直的可剖空间的拓扑性质，实际上也就討論了弯曲可剖空间的拓扑性质。

平直的可剖空间P的单纯剖分K的另一个限制是：在定义2中单纯复合形K是<u>有限</u>集合。如果只把"有限集合"改为"有限的或可数的无穷的集合"而把所得到的单纯复合形分别

叫作有限的或无穷的单纯复合形，则单纯复合形的范围就有实质上的扩大。但我们根据下列考虑，本书中仍只限于有限的平直的（或弯曲的）单纯复合形以及它们所决定的可剖空间。第一，这种的可剖空间已经包括几何学及分析学中常常出现的空间，例如射影空间Riemann面等。第二，这种可剖空间比较易于通过单纯复合形来直观理解，而直观理解是掌握代数拓扑学中的理論与方法的主要途径。第三，这种可剖空间的代数拓扑学是更广义的空间的代数拓扑学的模型，初学者必须从前者入手，然后再进而到更广义的空间。

此后凡提到单纯复合形与可剖空间，如果无相反的声明，都是指平直的。

7. 单纯复合形的例子．作为单纯复合形的具体例子，我们只在§1.3中提到过一个q维单纯形$\underline{s}^q$的闭包复合形$Cl\underline{s}^q$与边缘复合形$Bd\underline{s}^q$或$\dot{\underline{s}}^q$。§4中的图3到图10给出另四个单纯复合形的例子．（这些图中的箭头对于现在来說，是不必要的。）严格地說，只有图4中的复合形才是平直的单纯复合形，图3中的是弯曲的单纯复合形，而其它图中的既不是平直的单纯复合形，又不是弯曲的单纯复合形，而其它图中的既不是平直的单纯复合形，又不是弯曲的单纯复合形．但我们可以把这些图的每一个理解为给出一个组合的复合形，把这组合复合形的任一几何实现理解为这图所给出的平直的单纯复合形，即这图所给出的单纯复合形。例如图3到图5给出同一个组合的复合形$\mathcal{K}$，$\mathcal{K}$的一个几何实现是图3所给出的单纯复合形K；$\mathcal{K}$还有其它的几何实现，例如$\mathcal{K}$的自然实现。

§1.4中命题4証明了，一个组合的复合形$\mathcal{K}$的任意两个几何实现同胚，我们也知道一个可剖空间有不同的单纯剖分．代数拓扑学的主要目的之一就是要先討論单纯复合形K的性质（例如下一节所討論的K的同調群），然后（例如在下一章中）証明这性质是可剖空间$|K|$以及同胚于$|K|$的弯曲的可剖空间的拓扑性质．我们现在要說明欧几里得空间R^{n+1}中的单位球

$$S^n:\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2=1$$

的另一个单纯剖分K．

S^n与$n+1$维单纯形$\underline{S}^{n+1}$的边缘复合形$\dot{\underline{S}}^{n+1}$的可剖空间$|\dot{\underline{S}}^{n+1}|$同胚．例如在$n=2$时，如果$\underline{S}^3$是以欧几里得空间$R^3$的原点为重心的，内接于$S^2$的正四面形，经过中心射影把$\dot{\underline{S}}^3$影射到$S^2$上去，我们就得到$S^2$的一个弯曲的单纯剖分，叫作$S^2$的四面形剖分．如果用以$R^3$的原点为中心的、内接于$S^2$的正八面形（图2）替代正四面形$\underline{S}^3$，则我们得到$S^2$的另一个弯曲的单纯剖分，叫作$S^2$的八面形剖分．从$n=2$推广到$n$，$S^n$也有四面形剖分与八面形剖分．前者是我们比较熟悉的；我们现在要証明的S^n的另一个单纯剖分K就是后者．

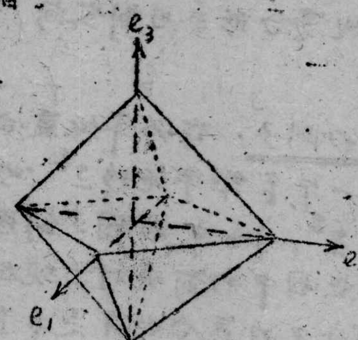

图1．

設$e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}$是$R^{n+1}$中的一个规格化的正交基．考虑

$$\varepsilon_1 e_1,\ \varepsilon_2 e_2,\ \cdots,\ \varepsilon_{n+1} e_{n+1},\quad \varepsilon_i=\pm 1, \tag{7}$$

把$\varepsilon_i e_i$瞭解为从原点画出的向量$\varepsilon_i e_i$的终止．这$n+1$个点决R^{n+1}中的一个n维单纯形．式(7)中的正负号一共有2^{n+1}个不同的组合，所以式(7)也给出同样多的n维单纯形．两个这样的单纯形的交集或者是一个公共面，由它们的公共顶点所决定的；或者是空集．在后者的情形下，一个单纯形的在式(7)中的正负号必与另一个单纯形的完全相反．不难看出，这2^{n+1}个n维单形以及它们的全体面形成R^{n+1}中的一个平直的单纯复合形K'，而且中心射影是$|K'|$到S^n的一个同胚．K'的在S^n上的同胚像就是我们的S^n的八面形剖分．

这个八面剖分有对称性质：这个剖分对于原点是对称的；这就是說，经过对径点交换之后，即经过下列映射

$$x_1' = -x_1,\ x_2' = -x_2, \cdots, x_{n+1}' = -x_{n+1}$$

之后，这剖分中的每一个单纯形还映成这剖分中的一个单纯形。这性质于将来有用（见本节习题9及§4中习题5）。

習題

1. 設 $b_0, b_1, \cdots, b_r$ 都是一个 r 维单纯形 S^r 的点，而且 $\mu^0, \mu^1, \cdots, \mu^r$ 都是非负的实数，其和 $=1$。試証点

$$b = \mu^0 b_0 + \mu^1 b_1 + \cdots + \mu^r b_r$$

也是 S^r 的点。

2. 用习题1中的記号与假設，但现在再設 $\mu^i > 0$。試証：如果 b 是 S^r 的一个顶点 a_0，则每一个点 $b_i = a_0$。

3. 設 K 是一个单纯复合形，$b_0, b_1, \cdots, b_r$ 都是 $|K|$ 的点，而且 $\mu^0, \mu^1, \cdots, \mu^r$ 都是正实数，其和 $=1$。試証：点

$$b = \mu^0 b_0 + \mu^1 b_1, \cdots, \mu^r b_r$$

是 $|K|$ 的点，当而且只当点 $b_0, b_1, \cdots, b_r$ 都是K的同一个单纯形的点。

4. 中学立体几何学里提到过五个正多面形。正多面形的特征是每个面都有 a 条棱，每个顶点处都有 b 条棱；或者是每个面都有 a 个顶点，每个顶点处都有 b 个面。其中的一个，四面形，是二维的单纯复合形。試把其它四个正多面形剖分为二维单纯复合形，並标出 $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$。

5. 顶点 A_i B_j 与棱 A_iB_j 形成一个一维复合形 K，$i, j = 1, 2, 3$。

設 A, B, C, D 是三维单纯形的顶点，E与F分别是棱 AB 与 CD 的中点。六个顶点 A, B, C, D, E, F 与九条棱 $AE, EB, AC, AD, BC, BD, CE, FD, EF$ 形成一个一维复合形 H。

試証平面上或球面上既不能画出复合形 K，也不能画出复合形 H。

提示. 假設已知平面上 Jordan 曲線定理。

6. 图10中的射影平面是从一个圆域得到的。試从一个长方形域得到，並給出它的一个单纯剖分。

7. 在定义 mobius 带的图6中的长方形的两边 AB 上，設有点 $E_1, E_2, \cdots, E_{n-1}$，把边 AB 分成 n 条相等線段 $AE_1, E_1E_2, \cdots, E_{n-1}B$；而且在叠合長方形域成 möbius 带时，左边的点 E_i 与右边的点 E_i 重合。如果把得到的 möbius 带沿着图6中的横線段 $E_1E_{n-1}, E_2E_{n-2}, \cdots$ 剪开时，möbius 带变成什么？

8. 試說明图10中射影平面消去三角形 $a_4a_5a_6$ 的内点是一个 möbius 带。

9. 設在欧几里得空間 R^4 中有3直角坐标系，点的坐标用 x_1, x_2, x_3, x_4 表示。在子空間 R^3 $(x_4=0)$ 中取一个 möbius 带，並用直線段連接 $(0,0,0,1)$ 与 möbius 带的每一个边缘点。試說明这样就得到 R^4 中的一个射影平面。

10. 設 $\underline{S}^5=(a_1, a_2, a_3, a_4 a_5 a_6)$ 是一个五维单纯形，而且 K^2 是四维球 $S^4=|\dot{\underline{S}}^5|$ 的单纯剖分 $K=\dot{\underline{S}}^5$ 的二维骨架。試說明 K^2 是两个如同图10中剖分了的射影平面所構成的。

11. 試根据長方形是两条線段的乘积，說明环面是两个单位圓周的乘积。試给出三个单位圓周的乘积的一个单純剖分。

12. 設 V 是欧几里得空间 R^3 中的以原点 O 为中心的实心球。叠合 V 的边缘球 S^2 的对径点，就从 V 得到三维的射影空间 P^3。試给出 P^3 的一个单纯剖分。

提示：利用 S^2 的八面形剖分。用棱的中心把一条棱分成两条；用三角形的中心把一个三角形分成六个等。

如果 V 的半径是 π，则 P^3 的点恰代表 R^3 的保持原点不变的全体刚体运动。說明如下。原点 O 代表恒同运动。取定 R^3 的一个定向。如果 $A \neq O$ 是 P^3 的一点，而且 OA 的長度是 θ（当然 $0<\theta \leq \pi$），则 A 点代表 R^3 的下述的这样的一个刚体运动：这运动以直線 OA 为旋转轴，它的旋转角是 θ，它的旋转方向与向量 $\overrightarrow{OA}$ 恰形成 R^3 的取定的定向。S^2 的对径点显然代表同一个刚体运动。

§2. 同調群.

单纯复合形是几何对象，群是代数对象。从单纯复合形过渡到它的同調群的关键是单纯形的定向与边缘运标这两个概念。因而同調群集中地反映出单纯复合形的、有关边缘的几何性质。

讀者在讀本节时，必须熟练附录Ⅱ中的有关部分。

1. 有向单纯形．关联係数．一个 q 维单纯形 $\underline{S}^q$ 的 $q+1$ 个顶点 $a_0, a_1, \cdots, a_q$ 有 $(q+1)!$ 个不同次序的排列．在 $q>0$ 时，这些排列分成两組：同一組的任意两个排列相差偶数个对换，不同組的一个排列相差奇数个对换。这两組叫作 $\underline{S}^q$ 的两个定向。指定了一个定向的单纯形就叫作一个有向单纯形，而有区别起见，$\underline{S}^q$ 就叫作无向单纯形。例如顶点的下述次序

$$a_0, a_1, a_2, \cdots a_q; \quad a_1, a_0, a_2, \cdots, a_q$$

就规定了这两个定向，相应的两个有向单纯形分别用

$$a_0 a_1 a_2 \cdots a_q, \qquad a_1 a_0 a_2 \cdots a_q$$

表示（注意：a_i 与 a_{i+1} 之间无逗号！）；如果把一个記作 S^q，则另一个記作 $-S^q$（注意：S^q 下无横槓！）：

$$a_0 a_1 a_2 \cdots a_q = -a_1 a_0 a_2 \cdots a_q;$$

而且把它们叫作定向相反的有向单纯形。

零维无向单纯形 $\underline{S}^0=(a_0)$ 的一个顶点只有一个排列．为着叙述统一起见，我们也定义两个定向，但这里是用＋号与－号定义的；这两个有向单纯形是 $+a_0$ 与 $-a_0$。

一维有向单纯形 $S^1=a_0a_1$ 与 $-S^1=a_1a_0$ 是定向相反的有向線段；二维有向单纯形 $S^2=a_0a_1a_2$ 与 $-S^2=a_1a_0a_2$ 是定向相反的有向三角形。

无向单纯形 $\underline{S}^q=(a_0, a_1, \cdots, a_q)$ 有 $q+1$ 个 $q-1$ 维面 $\underline{S}_i^{q-1}=(a_0, \cdots, \hat{a}_i, \cdots, a_q)$，这里的記号表示只有 a_i 不是 $\underline{S}_i^{q-1}$ 的顶点．$\underline{S}_i^{q-1}$ 叫的 $\underline{S}^q$ 的、与顶点 a_i 相对的 $q-1$ 维面．如果 $S^q=\varepsilon a_0 a_1 \cdots a_q$，$\varepsilon=\pm1$，则有向单纯形