

斜、弯桥跨分析的 广义梁格法

郑振飞 吴庆雄 著



人民交通出版社

斜、弯桥跨分析的广义梁格法

Xie Wan Qiaokua Fenxi de Guangyi Lianggefa

郑振飞 吴庆雄 著

人民交通出版社

内 容 提 要

本书为作者近年来教学与科研的成果。荷载横向分布是桥梁设计中一个十分重要的问题,它取决于主梁与横梁的相对刚度比。而作为荷载横向分布计算中广泛应用的刚性横梁法,是假定横梁刚度为无穷大,因而它只是梁格分析法的一个特例。本文提出的广义梁格分析法是在分析斜、弯桥跨结构中,从横梁本身出发,将多梁式斜、弯桥跨结构中的横梁看作弹性支承在主梁上的多跨连续梁,主梁与横梁形成互为弹性支承的格构,在计算中充分考虑其弯扭耦合的特点和横梁本身的变形,用结构力学的位移法,求得横梁内力和主梁荷载横向分布,并进一步推广到各种体系常、变截面桥梁中。同时,在实际工程中为了应用方便,对本方法进行简化,列出表格,以供使用。

本书可供土建类有关专业函授生、本科生、硕士研究生、工程技术人员以及教师参考与使用。

图书在版编目(CIP)数据

斜、弯桥跨分析的广义梁格法/郑振飞,吴庆雄著.-北京:人民交通出版社,1998.10
ISBN 7-114-03107-6
I. 斜… II. ①郑… ②吴… III. ①斜桥-桥跨-结构分析
②曲线桥-桥跨-结构分析 IV. U448.4
中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 21562 号

斜、弯桥跨分析的广义梁格法

郑振飞 吴庆雄 著

插图设计:高静芳 责任印制:孙树田

人民交通出版社出版发行

(100013 北京和平里东街 10 号)

各地新华书店经销

北京鑫正大印刷厂印刷

开本:787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张:13.25 字数 328 千

1998 年 9 月第 1 版

1998 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

印数:0001-1052 册 定价:28.00 元

ISBN 7-114-03107-6
U·02226

序

近年来,随着我国经济的高速发展,交通事业建设如波涛汹涌,出现了蓬勃发展的景象。全国高速公路、大型立交工程、城市高架桥如雨后春笋遍地开花,从而在线路上出现了大量的斜、弯桥梁,吸引了我国众多学者、专家和工程师们对此类结构的计算理论与设计方法进行了多方面的研究,硕果累累。

本书作者长期从事桥梁结构理论的研究,颇有心得。他们从加强桥梁结构整体性、加强横向联系并改善主梁之间的荷载横向的分配性能出发,提出了“广义梁格分析方法”,推广了 Leonhart-Homberg 梁格理论在斜、弯桥梁中的应用,广义梁格法不仅适用于斜、弯桥的内力分析,同样也包络了直桥的内力分析。作者在专著中深入地探讨了下述问题;即分析了直、斜、弯桥梁的主梁内力横向分布问题,分析了直、斜、弯桥梁的横梁内力问题,分析了各种体系的常、变截面桥梁的内力横向分布问题和提出了广义梁格法的表格计算。

虽然,有限元方法和计算机技术的迅猛发展已为数值方法展示了一个极为广阔的景象,但是,近似的实用计算方法仍是工程界所欢迎的切实可行的常用手段,特别是对设计工程师而言,概念上比较直观,应用比较简易。至今,在美国 AASHTO 规范、英国 BS 5400 规范以及日本的相应规范中都对“荷载分布”作出明确的定义,并建议在桥梁设计中应用。因而,作者提出的对直、斜、弯桥的分析方法在我国桥规修订时可供参考。

作者在这方面开展的理论联系实际的研究,积累了不少有价值的成果与经验,现在将它编写出版,对完善桥梁结构设计理论有所裨益,是值得欢迎的。

范立础

同济大学土木工程学院教授
中土桥梁与结构工程学会理事长

目 录

第一章 概述	1
§ 1-1 概述	1
§ 1-1 本书内容简介	3
第二章 广义梁格法的计算原理	5
§ 2-1 广义梁格法的计算力学模型及原理	5
§ 2-2 弹簧常数的计算	14
§ 2-3 主梁内力横向分布的计算	15
§ 2-4 《斜梁结构分析》中广义弹性支承连续梁的讨论	17
第三章 广义梁格法在弯梁桥中的应用	20
§ 3-1 弯梁桥实用空间理论的原理	20
§ 3-2 弯梁桥的弹簧常数和内力的计算	21
§ 3-3 弯梁桥模型试验	23
§ 3-4 弯梁桥的算例及分析	26
§ 3-5 弯梁桥恒载的计算	31
§ 3-6 弯梁桥径向水平荷载的计算	34
第四章 广义梁格法在斜梁桥中的应用	38
§ 4-1 斜梁桥主梁影响面相似性的讨论	38
§ 4-2 斜梁桥的弹簧常数和内力的计算	39
§ 4-3 斜梁桥模型试验	42
§ 4-4 斜梁桥的算例及分析	44
第五章 横梁内力的计算	51
§ 5-1 横梁内力的计算力学模型及原理	51
§ 5-2 横梁计算中几个问题的讨论	52
§ 5-3 算例及分析	57
§ 5-4 横梁内力影响面的讨论	68
第六章 各种体系的常、变截面桥梁的横向分布的计算	74
§ 6-1 广义梁格法计算各种体系的常、变截面桥梁的横向分布的原理	74
§ 6-2 主梁为变截面的简支梁桥	75

§ 6-3 各种体系的常、变截面桥梁	80
第七章 广义梁格法的表格计算	83
§ 7-1 弯梁桥的主梁内力横向分布的表格计算	83
§ 7-2 斜梁桥的主梁内力横向分布的表格计算	87
§ 7-3 弯梁桥的横梁内力横向分布的表格计算	93
§ 7-4 斜梁桥的横梁内力横向分布的表格计算	95
附录一 弯、斜梁桥主梁和横梁内力横向分布影响线计算程序	97
附录二 弯梁桥主梁内力横向分布影响线表	111
附录三 斜梁桥主梁内力横向分布影响线表	127
附录四 弯梁桥横梁内力横向分布影响线表	173
参考文献	205

第一章 概 述

§ 1-1 概 述

近年来,随着我国现代化建设的快速发展,交通运输业蓬勃兴起,高速公路、城市立交桥和高架桥日益增多,促进了大量斜、弯桥梁的出现。

斜、弯梁桥不仅能很好地适应地形地物的限制,而且由于其结构线条平顺、流畅、明快,给人以美的享受,同时,为了改善道路的线形及适应城市的街道条件,往往采用斜弯桥跨越更为合理。因此,斜、弯桥越来越受到我国桥梁工程师和设计人员的青睐。而大量的斜、弯桥梁中,T梁(肋梁式结构)由于构造简单,制作方便,而且能满足城市高架桥及立交桥中需要尽量减小桥梁建筑高度的要求,因而在我国仍有广阔的前景。

由于斜、弯梁桥的广泛应用,许多学者对这些结构的计算理论和计算方法进行了一系列探索,并发表了许多文献,其中绝大多数都涉及到有关主梁内力计算研究的成果。然而在斜、弯梁桥中,横梁对于加强结构的整体性、加强主梁横向联系、改善主梁之间的荷载横向分配性能有不可忽视的作用。因此,除了要求横梁刚度大以外,还要求把横梁作为主要构件来考虑和计算,特别是从横梁分析入手,用横梁分析法简化梁桥空间计算就是一种可取的思路。但到目前为止,这方面的文献极少,即使在为数有限的有关文献中,也是沿用各主梁荷载横向分布数值,然后把横梁当作静定结构来计算。这些方法对宽跨比较小的桥梁结构引起的误差不太大,但对宽跨比较大的桥梁则显然不适用。

早在 60 年代初,国外一些桥梁专家和学者就开始了斜、弯梁桥的研究并付诸于工程实践。近年来,我国的一些桥梁专家和学者也开始对斜、弯梁桥的计算理论进行有益的探索。归纳起来,通常可以分为解析法、半解析法和数值法。其中关于弯梁桥的计算理论和分析方法可参照文献^[10],在此不再赘述。但该文献中讨论的弯梁基本微分方程及其解法可以分析某些弯梁的结构问题,而实际工程中弯梁桥结构型式是多种多样的,对于宽跨比 B/L 较小且横向联系刚性较强的窄弯梁桥按整体截面弯梁计算在工程尚属容许,但对于多梁式弯梁桥或宽跨比 B/L 较大的弯梁桥按单根梁计算则会导致较大的误差。而对于斜梁桥来说,斜梁与正梁基本微分方程是相同的,但由于斜支承的存在使得支承处的边界条件不易精确满足,因此,一般也不采用基本微分方程进行精确求解。

有限元法、有限差分法、有限条法等数值法,不失为分析斜、弯桥梁时较精确的方法。但由于需要计算机求解大型联立方程所需费用较昂贵,同时对结构的总体性能较难把握,对最不利荷载位置也较难确定,从而使得在实用上尤其是初步设计时有诸多不便。

因而,许多桥梁学者和桥梁工作者设法探讨实用的计算方法,这很自然想到把直梁桥的实用空间理论推广到斜、弯桥跨的分析中。这样就把斜、弯桥梁的空间分析近似地分解为纵桥向和横桥向来分别处理,使得分析工作大大简化。这时,斜、弯桥跨的空间工作特性可通过内力或荷载的横向分布系数来体现。而利用内力或荷载的横向分布系数分析桥梁结构,实质是在一定的误差范围内寻求一个近似的内力影响面来代替精确的影响面。这

个近似的影响面通常要求在纵桥向和横桥向均具备各自相似的影响线图形,而理论计算和模型试验结果都表明斜、弯桥跨能满足这一计算方法的前提。

归纳斜、弯梁桥横向分布的实用计算方法,具代表性且有较大价值的有如下三类:

1. 梁系理论:它是直梁桥 Hundry—Jarger 法的推广。此法是将结构沿纵向划分为各个主梁单元,横梁的抗弯刚度均摊于桥面板上,主梁之间的连接用桥面板切口处的赘余力表示,采用力法求解。广为应用的是刚结梁法,主要有席振坤的铰结梁(板)法(斜)^[8]和刚结梁法(弯)^[7],项贻强的弹性支承连续梁法(斜、弯)^[9]和岛田氏的曲线格子梁^[3]等。这些理论,其模型均视纵梁为主要构件,而把横梁的刚度均摊于主梁上,忽略了斜、弯桥梁中横梁产生的重要作用,其计算荷载用半波正弦荷载来代替实际的集中荷载,也会产生误差,从而使得梁系法只适用于宽跨比 B/L 较小的桥梁。

2. 板系理论:它是直梁桥 Guyon—Massonnet 法的推广。现有的文献仅限于弯梁桥。此法是将桥梁结构的主梁与横梁的刚度分别在桥的纵横向均摊为正交异性板,以板的挠曲微分方程为基础求解,主要有姚玲森的 $G-M$ 法(弯)等。 $G-M$ 法的优点在于它较真实地反映了实际结构的受力情况,但是,由于此方法推导十分繁琐使得板法理论仅限于弯梁桥,同时,其计算参数太多而计算图表尚未问世,使得应用不便。

3. 梁格理论:它是直梁桥 Leonhardt—Homberg 法的推广。此法是假定梁桥结构为主梁与横梁处于弹性支承关系上的格构,利用结点的挠度和扭角关系找出结点力,进而求得横向分布规律。

广泛应用梁格理论的方法,一是刚性横梁法,它是梁格法的特例。它是假设桥梁横向刚度较大,其挠曲变形相对主梁来说可略去不计,如姚玲森的刚性横梁法(弯)^[5];刑志成的刚性横梁法(斜、弯)^[6];胡肇滋的修正偏压法(弯)^[13]等。由于此法考虑斜、弯桥梁的弯扭耦合作用且计算较简便而得到广泛应用。但是,由于假定横梁刚度无限大使之无法计算宽跨比较大的桥梁,只适用于宽跨比 B/L 较小的桥梁。

二是弹性支承连续梁法。一般的弹性支承连续梁有两种处理方法:(1)不考虑主梁的抗扭惯矩,此时主梁对横梁的支承作用只有竖向弹性支承,这种方法仅适用于主梁抗扭刚度很小的正梁桥。(2)在《桥跨结构简化分析—荷载横向分布》^[14]中提出了直梁桥的考虑主梁抗扭惯矩的弹性支承连续梁法,此时主梁对横梁的支承作用除了竖向弹性支承外,还有弹性扭转支承,在计算中采用对弯扭分别求解并叠加的方法。但是,以上理论仅限于正梁桥。而在斜、弯桥梁中,由于弯扭耦合作用,主梁对横梁的支承作用除了竖向弹性支承和弹性扭转支承外,还必需考虑两者的耦合作用,不能对弯扭分别求解并叠加来求解,因此,这种考虑主梁抗扭惯矩的弹性支承连续梁法也无法模拟斜、弯桥的实际情况。梁格法在斜梁桥中的应用是从冈尚平氏对并排平行四边形的斜梁提出的格构梁理论(斜)^[4]开始的,由于此理论没有考虑主梁的抗扭能力才有郑孝达提出了考虑主梁抗扭的梁格法(斜)^[12]。但郑孝达的梁格法有两个限制:一是为了简化计算过程把梁格法限于受力后挠度呈直线变化中,二是在计算横梁内力时把横梁当作刚性支承的连续梁,这与斜、弯桥跨中横梁受力特性不相符合。

基于以上问题,作者提出了“广义梁格分析法”^[2]。所谓“广义梁格分析法”,又可以称为“横梁分析法”,即从横梁本身出发,将多梁式梁桥的横梁看作弹性支承在主梁上的连续梁,用结构力学的位移法(或有限差分法)对其进行受力计算以求得横梁内力和主梁荷载横向分布的规律。

广义梁格分析法实际上是推广直梁桥中 Leonhart• Homberg 的梁格理论, 但广义梁格分析法不同于刚性横梁法, 刚性横梁法是梁格理论在桥梁上运用的特例, 刚性横梁法假定横梁刚度无穷大, 横向变形为线形变形。广义梁格法也不同于正桥中的弹性支承连续梁法, 广义梁格法不仅考虑主梁的抗扭惯矩, 而且充分考虑由于弯扭耦合作用而产生的主梁的实际挠曲变形和扭转变形, 同时在计算中也充分地考虑了横梁本身的弯曲变形。因而, 广义梁格分析法是一种可通用于直、斜、弯梁桥跨的横梁内力计算和主梁内力横向分布计算的方法, 它既是一种实用简便的计算方法, 又是一种比较精确的计算方法。实质上, 这是一个用结构力学位移法简化分析杆系空间结构的方法, 由于它从横梁结构的分析入手, 所以又可以叫做“横梁分析法”。

§ 1-2 本书内容简介

本书以梁格系为力学模式, 主要阐述了广义梁格法的计算原理与应用。

在第二章——广义梁格法的计算理论中, 主要阐述了广义梁格法计算斜、弯桥梁的横向分布的计算力学模型及原理, 主要包括: 弹性支承连续梁的求解方法(结构位移法、有限差分法)、弹簧常数的计算等。同时, 由于斜、弯桥的弯扭耦合作用使得主梁的荷载横向分布与内力横向分布不相一致, 即使内力横向分布也各不相同, 为了有效计算, 本书直接从横向分布的实质出发, 提出了主梁内力横向分布的计算方法, 并对内力横向分布与常规计算方法进行分析和讨论。通过对本章的了解, 可对广义梁格法的基本思路和内力横向分布的概念有一定的了解。

为了运用广义梁格法, 在第三章——广义梁格法在弯梁桥中的应用和第四章——广义梁格法在斜梁桥中的应用中, 首先从直梁桥的实用空间理论出发, 分析了斜、弯梁桥应用实用空间理论的可行性; 其次, 从通过对斜、弯梁桥弹簧常数和内力计算的求解, 得到广义梁格法计算斜、弯梁桥的基本公式, 并通过有机玻璃模型试验验证并分析了广义梁格法计算弯梁桥的可行性和准确性; 然后, 通过算例分析了斜、弯梁桥主梁横向分布影响线的特性, 为斜、弯梁桥的简化计算提供了依据。同时, 还对弯梁桥中特殊荷载(恒载、径向荷载等)提出了用广义梁格法求解的原理, 为弯梁桥中特有的荷载计算提供了一种简单有效的方法。

在斜、弯桥梁广泛应用的今天, 横梁对于加强结构整体性, 加强主梁横向联系, 改善荷载横向分配性能及减少截面畸变等都起到不可忽视的作用。特别在斜、弯桥中由于弯扭耦合作用使得横梁的作用比直梁桥更为重要, 应该作为主要构件来考虑。在车辆荷载和桥宽不断增大的情况下, 斜、弯桥梁的横梁受力分析如果还沿袭直梁桥中的计算方法显得已不合适, 因此研究斜、弯梁桥横梁内力的有效计算方法是十分必要的。在第五章——横梁内力的计算中, 结合斜、弯桥梁的结构工作性能和受力特点提出了按广义梁格法计算斜、弯桥梁内力的实用方法。本方法与其他方法的不同之处在于, 它不仅正确反映了横梁的受力特点(用弹性支承连续梁来模拟), 而且充分考虑斜、弯桥跨的特殊特性(弯扭耦合作用)。同时, 该著较深入地探讨了横梁内力计算中的几个问题: (1) 建立了斜、弯梁桥的横梁弯矩影响面, 从计算和分析可知, 广义梁格法计算横梁影响面峰值处的横向影响线精度较好, 而按常规杠杆原理计算的横梁纵向影响线时误差较大,

因而对横梁纵向加载区段的研究应从横梁本身出发作进一步探讨；（2）通过用结构分析程序 SAP93 建立斜、弯桥的空间模型，得到等代横梁系数的建议值；（3）通过斜、弯桥的模型试验，得到横梁的有效翼缘宽度的建议值；从而使得斜、弯桥跨的横梁内力计算得以完善。

为了使广义梁格法应用更为广泛，在第六章——各种体系的常、变截面桥梁的横向分布的计算中，把广义梁格法推广到各种体系的常、变截面桥梁中，提出了用有限元和内力横向分布相结合的方法来处理，从而简化了常规的非简支常截面桥梁横向分布的计算，并通过几个算例和模型（大边梁和模型试验、连续弯板桥和 SAP 模型）来验证了广义梁格法计算各种体系的常、变截面桥梁的横向分布的可行性和准确性。

为了工程实际应用的方便，该著还推导了用广义梁格法计算斜、弯梁桥主梁和横梁的简化公式，并提供了斜、弯梁桥主梁和横梁的计算表格，以供桥梁工程师查表计算。通过第七章——广义梁格法的表格计算中具体算例的计算，读者可了解用广义梁格法计算斜、弯梁桥的表格计算的一般步骤。

第二章 广义梁格分析法的计算理论

§ 2-1 广义梁格法的计算力学模型及原理

基本假定为：

- (1) 梁横截面各项尺寸与跨长相比很小，即可将实际结构视为集中在梁轴线上的弹性杆件；
- (2) 平截面假定，即梁变形后横截面仍保持为平面；
- (3) 刚性截面假定，即梁变形后横截面的周边形状保持不变（无畸变）；
- (4) 梁中截面翘曲扭转所引起的正应力和剪应力，与基本弯曲和纯扭转的应力值相比甚小，因而可以忽略不计，即只计纯扭转的作用。

一. 广义梁格法的计算力学模式

广义梁格法的计算模式是，将横梁看作支承在多片主梁上的弹性支承连续梁(主梁即为弹性支座)，同时，横梁各支座处的弹簧常数均是变化的。基本图式如图 2-1-1。

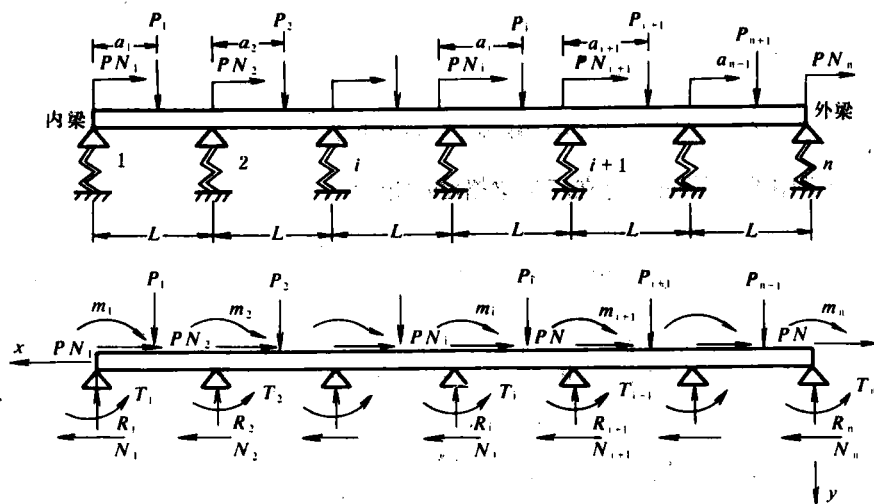


图 2-1-1 广义梁格分析法计算力学模式

- 上图中： $R_1, R_2, \dots, R_n$ ——弹性支座的竖向反力；
 $T_1, T_2, \dots, T_n$ ——弹性支座的集中扭矩；
 $N_1, N_2, \dots, N_n$ ——弹性支座的水平反力；
 $P_1, P_2, \dots, P_n$ ——表示作用各支点的外竖向力；
 $m_1, m_2, \dots, m_n$ ——作用各支点的外扭矩；
 $PN_1, PN_2, \dots, PN_n$ ——作用各支点的外水平力；
 L ——各主梁之间的中心距。

图中支座编号为：结构位移法 $1 \rightarrow n$ 表示内梁 $\rightarrow$ 外梁，有限差分法、矩阵位移法 $1 \rightarrow n$ 表示外梁 $\rightarrow$ 内梁。

变形和外荷载方向都遵守右手定则。

关于求解弹性支承连续梁的方法有多样，如结构位移法、有限差分法等，现就这几种方法的求解作介绍。

二. 结构位移法

1. 角位移方程的建立

对图 2-1-1 的连续梁中任取一跨进行受力分析，见图 2-1-2。该段梁承受端弯矩 $M_{i(i+1)}$ 、 $M_{(i+1)i}$ 、端剪力 $Q_{i(i+1)}$ 、 $Q_{(i+1)i}$ 和端轴力 $N_{i(i+1)}$ 、 $N_{(i+1)i}$ ，变形有端竖向位移 W_i 、 $W_{(i+1)}$ 和端水平位移 U_i 、 $U_{(i+1)}$ 以及端转角 θ_{i+1} 、 $\theta_{(i+1)}$ 。这里采用如下的正负号规则：端弯矩 $M_{i(i+1)}$ 、 $M_{(i+1)i}$ 、端剪力 $Q_{i(i+1)}$ 、 $Q_{(i+1)i}$ 、端转角 θ_{i+1} 、 $\theta_{(i+1)}$ 一律以顺时针为正。端轴力 $N_{i(i+1)}$ 、 $N_{(i+1)i}$ ，以杆受压为正，端竖向位移 W_i 、 $W_{(i+1)}$ 和端水平位移 U_i 、 $U_{(i+1)}$ 以坐标轴一致为正。

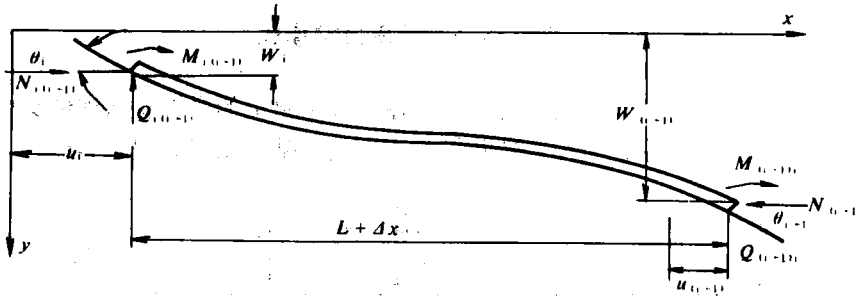


图 2-1-2 等截面杆件的位移图式

根据结构力学中的位移法，建立广义梁格法的角位移方程为：

$$\begin{aligned} M_{i(i+1)} &= \frac{EI_0}{l} \left[4\theta_i + 2\theta_{i+1} + \frac{6}{l} \left(\frac{W_i - W_{i+1}}{l + \Delta X_i} \right) \right] + \bar{m}_{i(i+1)} \\ M_{(i+1)i} &= \frac{EI_0}{l} \left[2\theta_i + 4\theta_{i+1} + \frac{6}{l} \left(\frac{W_i - W_{i+1}}{l + \Delta X_i} \right) \right] + \bar{m}_{(i+1)i} \\ Q_{i(i+1)} &= \frac{6EI_0}{l^2} \left[\theta_i + \theta_{i+1} + \frac{2}{l} \left(\frac{W_i - W_{i+1}}{l + \Delta X_i} \right) \right] + \bar{Q}_{i(i+1)} \\ Q_{(i+1)i} &= \frac{6EI_0}{l^2} \left[\theta_i + \theta_{i+1} + \frac{2}{l} \left(\frac{W_i - W_{i+1}}{l + \Delta X_i} \right) \right] + \bar{Q}_{(i+1)i} \end{aligned} \quad (2-1-1)$$

式中： I_0 —— 横梁抗弯惯矩；

E —— 抗压弹性模量；

L —— 主梁之间的中心距。

$\bar{m}_{i(i+1)}$ 、 $\bar{m}_{(i+1)i}$ 、 $\bar{Q}_{i(i+1)}$ 、 $\bar{Q}_{(i+1)i}$ 为考虑连续梁节间的外荷载作用，从而考虑了角变位

移方程中的固端弯矩和剪力，同时忽略因结构剪切变形引起的内力。

2. 主梁竖向挠度和转角的建立

设多梁式桥梁中任一主梁在任意截面处，同时作用有集中荷载 P 和集中扭矩荷载 T ，此时，对于弯曲和扭转耦合作用的桥梁，其荷载作用点处的竖向挠度 W 和扭角 ϕ 可分别表示为：

$$\begin{aligned} W_i &= P C_{W Ri} + T C_{W Ti} \\ \phi_i &= P C_{\phi Ri} + T C_{\phi Ti} \end{aligned} \quad (2-1-2)$$

式中： $C_{W Ri}$ ——竖向荷载 $P=1$ 作用 i 号主梁时在该截面引起的挠度；

$C_{W Ti}$ ——扭矩荷载 $T=1$ 作用 i 号主梁时在该截面引起的挠度；

$C_{\phi Ri}$ ——竖向荷载 $P=1$ 作用 i 号主梁时在该截面引起的扭角；

$C_{\phi Ti}$ ——扭矩荷载 $T=1$ 作用 i 号主梁时在该截面引起的扭角。

同时，横梁在各弹簧支点处的转角与各主梁在相应点处的扭角相等，即：

$$\theta_i = \phi_i \quad (2-1-3)$$

3. 线性方程的建立

分别选取结点 1, 2, ..., n 为隔离体，进行受力分析，见图 2-1-3。

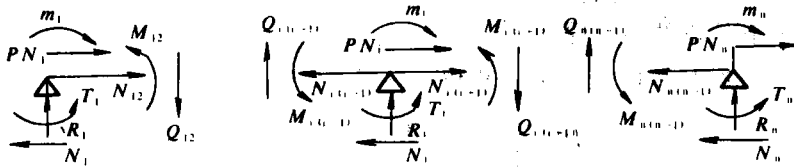


图 2-1-3 结点的受力图式

1) 水平力的线形方程组

根据各结点的水平方向的平衡方程，得：

$$N_{(i+1)} = N_{i(i+1)} = \Delta X_i \frac{EA}{l} = (U_{i+1} - U_i) \frac{EA}{l}$$

同时，有： $U_i = N_i C_{UN}(i)$ ，($i=1, 2, \dots, n$)

可建立线性方程组如下：

$$[A]_{n \times n} [N]_{n \times 1} = [PN]_{n \times 1} \quad (2-1-4)$$

式中： $[N] = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n]^T$ ； $[PN] = [PN_1 \ PN_2 \ \dots \ PN_n]^T$ ；

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & & & & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & & & \\ & & & & & \\ & & & A_{i(i-1)} & A_{ii} & A_{i(i+1)} \\ & & & & & \\ & & & & & A_{(n-1)n} \\ & & & & A_{n(n-1)} & A_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

其中: $A_{11} = 1 + \frac{EA}{l} C_{UN}(1)$;

$$A_{12} = -\frac{EA}{l} C_{UN}(2);$$

$$A_{n(n-1)} = -\frac{EA}{l} C_{UN}(n-1);$$

$$A_{nn} = 1 + \frac{EA}{l} C_{UN}(n);$$

$$A_{ii} = 1 + \frac{2EA}{l} C_{UN}(i), (i=2, \dots, n-1);$$

$$A_{i(i-1)} = -\frac{EA}{l} C_{UN}(i-1), (i=2, \dots, n-1);$$

$$A_{i(i+1)} = -\frac{EA}{l} C_{UN}(i+1), (i=2, \dots, n-1);$$

$C_{UN}(i)$ ——径向水平力 $N=1$ 作用于 i 号主梁时该截面引起的径向水平位移;

A ——主梁的截面积。

2) 竖向力和扭矩的线性方程组

根据各结点的竖向、扭矩的平衡方程得, 可建立线性方程组如下:

$$\begin{bmatrix} P \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ T \end{bmatrix} \quad (2-1-5)$$

式中: 竖向外荷载 $[P] = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n]^T_{n \times 1}$; 扭矩外荷载 $[m] = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_n]^T_{n \times 1}$;

竖向荷载 $[R] = [R_1 \ R_2 \ \dots \ R_n]^T_{n \times 1}$; 扭矩荷载 $[T] = [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n]^T_{n \times 1}$ 。

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & & & & \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & A_{i(i-1)} & A_{ii} & A_{i(i+1)} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & A_{(n-1)n} \\ & & & & & A_{nn} \end{bmatrix};$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & & & & \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & B_{i(i-1)} & B_{ii} & B_{i(i+1)} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & B_{(n-1)n} \\ & & & & & B_{nn} \end{bmatrix};$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & & & & \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & C_{i(i-1)} & C_{ii} & C_{i(i+1)} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & C_{(n-1)n} \\ & & & & & C_{nn} \end{bmatrix};$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & & & & \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & D_{i(i-1)} & D_{ii} & D_{i(i+1)} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & D_{(n-1)n} \\ & & & & & D_{nn} \end{bmatrix};$$

式中: $A_{11} = 1 + \frac{6EI_0}{l^2}C_{\phi R1} + \frac{12EI_0}{l^2(l + \Delta X_1)}C_{WR1}$;

0135793

$$A_{nn} = 1 - \frac{6EI_0}{l^2}C_{\phi Rn} + \frac{12EI_0}{l^2(l + \Delta X_{n-1})}C_{WRn}$$
 ;

$$A_{ii} = 1 + \frac{12EI_0}{l(l + \Delta X_i)}C_{WRi} + \frac{12EI_0}{l(l + \Delta X_{i-1})}C_{WRi}$$
 ;

$$A_{i(i+1)} = \frac{6EI_0}{l^2}C_{\phi R(i+1)} - \frac{12EI_0}{l(l + \Delta X_i)}C_{WR(i+1)}$$
 ;

$$A_{i(i-1)} = -\frac{6EI_0}{l^2}C_{\phi R(i-1)} - \frac{12EI_0}{l^2(l + \Delta X_{i-1})}C_{WR(i-1)}$$
 ;

$$B_{11} = \frac{6EI_0}{l^2}C_{\phi T1} + \frac{12EI_0}{l^2(l + \Delta X_1)}C_{WT1}$$
 ;

$$B_{nn} = -\frac{6EI_0}{l^2}C_{\phi Tn} + \frac{12EI_0}{l^2(l + \Delta X_{n-1})}C_{WTn}$$
 ;

$$B_{ii} = \frac{12EI_0}{l(l + \Delta X_i)}C_{WTi} + \frac{12EI_0}{l(l + \Delta X_{i-1})}C_{WTi}$$
 ;

$$B_{i(i+1)} = \frac{6EI_0}{l^2}C_{\phi T(i+1)} - \frac{12EI_0}{l^2(l + \Delta X_i)}C_{WT(i+1)}$$
 ;

$$B_{i(i-1)} = -\frac{6EI_0}{l^2}C_{\phi T(i-1)} - \frac{12EI_0}{l^2(l + \Delta X_{i-1})}C_{WT(i-1)}$$
 ;

$$C_{11} = \frac{4EI_0}{l}C_{\phi R1} + \frac{6EI_0}{l(l + \Delta X_1)}C_{WR1}$$
 ;

$$C_{nn} = \frac{4EI_0}{l}C_{\phi Rn} - \frac{6EI_0}{l(l + \Delta X_{n-1})}C_{WRn}$$
 ;

$$C_{ii} = \frac{8EI_0}{l}C_{\phi Ri}$$
 ;

$$C_{i(i+1)} = \frac{2EI_0}{l}C_{\phi R(i+1)} - \frac{6EI_0}{l(l + \Delta X_i)}C_{WR(i+1)}$$
 ;

$$C_{i(i-1)} = \frac{2EI_0}{l}C_{\phi R(i-1)} + \frac{6EI_0}{l(l + \Delta X_{i-1})}C_{WR(i-1)}$$
 ;

$$D_{11} = 1 + \frac{4EI_0}{l}C_{\phi T1} + \frac{6EI_0}{l(l + \Delta X_1)}C_{WT1}$$
 ;

$$D_{nn} = 1 + \frac{4EI_0}{l}C_{\phi Tn} + \frac{6EI_0}{l(l + \Delta X_{n-1})}C_{WTn}$$
 ;

$$D_{ii} = 1 + \frac{8EI_0}{l}C_{\phi Ti}$$
 ;

$$D_{i(i+1)} = \frac{2EI_0}{l}C_{\phi T(i+1)} - \frac{6EI_0}{l(l + \Delta X_i)}C_{WT(i+1)}$$
 ;

$$D_{i(i-1)} = \frac{2EI_0}{l}C_{\phi T(i-1)} + \frac{6EI_0}{l(l + \Delta X_{i-1})}C_{WT(i-1)}$$
 °

$[P]$ 和 $[m]$ 即为考虑固端剪力和弯矩的荷载项。

$$p_1 = \frac{P_1}{l^2} (b_1^2 + \frac{2a_1 b_1^2}{l}) ;$$

$$p_i = \frac{P_{(i-1)}}{l^2} (a_{i-1}^2 + \frac{2a_{i-1}^2 b_{i-1}}{l}) + \frac{P_i}{l^2} (b_i^2 + \frac{2a_i b_i^2}{l}) \quad (i = 2, 3, \dots, n-1) ;$$

$$p_n = \frac{P_{n-1}}{l^2} (a_{n-1}^2 + \frac{2a_{n-1}^2 b_{n-1}}{l}) ;$$

$$m_1 = \frac{P_1 a_1 b_1^2}{l^2} + m_1 ;$$

$$m_i = -\frac{P_{(i-1)} a_{i-1}^2 b_{i-1}}{l^2} + \frac{P_i a_i b_i^2}{l^2} + m_i, \quad (i = 2, 3, \dots, n-1) ;$$

$$m_n = -\frac{P_{n-1} a_{n-1}^2 b_{n-1}}{l^2} + m_n$$

$$b_i = l - a_i \quad (i=1, 2, 3, \dots, n-1)$$

a_i 为荷载 P 作用点在节间距左支座的距离。

$$\text{同时有:} \quad \Delta X_i = N_{i+1} C_{UN}(i+1) - N_i C_{UN}(i) \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

式 (2-1-4) 和式 (2-1-5) 即为在竖向外荷载 P , 扭矩外荷载 m' 和水平荷载 N 作用下的广义梁格法的基本方程。

实际上, 只有在计算弯桥径向水平力时才会用到 ΔX_i , 而在计算桥梁竖向荷载和外扭矩 m 作用时, 横向位移值设为 $\Delta X_i = 0$, 这样得到的线形方程的左边方程得以简化。

用计算机求解方程式 (2-1-5) 即可求得支座反力 R_i , 扭矩 T_i 的影响线 η_{ki}^R 和 η_{ki}^T (K 为梁号, i 为荷载 $P=1$ 作用位置)

三. 有限差分法

1. 差分原理

工程中出现的微分方程大都采用数值解法, 其中有限差分法是比较常用的方法之一, 其基本思想是首先将微分方程离散化, 以差商代替导数, 将微分方程化为代数方程, 然后解有关线形方程组以获得微分方程的数值解。

设给出连续函数(此处指梁的挠度函数及转角函数) $Y = f(x)$ 的曲线在 x 轴上等距点(间距 h) $-1, 0, 1$ 处的值 Y_{-1}, Y_0, Y_1 (如图 2-1-4)。

按微分原理, 函数在 0 点处的一阶及二阶导数可近似表示为:

$$\left(\frac{dY}{dx} \right)_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Y}{\Delta x} \right)_0 \approx \left(\frac{\Delta Y}{\Delta x} \right)_0 = \frac{\Delta Y_0}{h} \quad (2-1-6)$$

$$\left(\frac{d^2 Y}{dx^2} \right)_0 = \frac{d}{dx} \left(\frac{dY}{dx} \right)_0 \approx \left(\frac{\Delta^2 Y}{\Delta x^2} \right)_0 = \frac{\Delta^2 Y_0}{h^2} \quad (2-1-7)$$

式中: ΔY_0 , $\Delta^2 Y_0$ ——分别表示一阶差分和二阶差分。

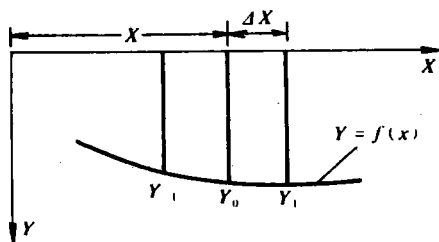


图 2-1-4 挠曲线在等距点上的挠度

一般来说, 函数在任意点上的导数用中心差分来表示, 可以得到较好的近似值, 故本书仅使用中心差分。一阶及二阶差分可表示如下:

$$\Delta Y_0 = \frac{1}{2}(Y_1 - Y_{-1}) \quad (2-1-8)$$

$$\Delta^2 Y_0 = Y_1 - 2Y_0 + Y_{-1} \quad (2-1-9)$$

2. 差分方程的建立

斜、弯梁桥在竖向荷载作用下, 除弯曲变形外, 还有较大的扭转变形, 设横梁在各支座处的挠度为 $W_1, W_2, \dots, W_n$, 转角为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, 根据材料力学, 梁挠度 ω , 转角 θ 的微分方程式为:

$$EI_0 \frac{d^2 W}{dx^2} = -M$$

$$EI_0 \frac{d^2 \theta}{dx^2} = -Q \quad (2-1-10)$$

式中: E, I_0 ——分别为横梁的弹性模量和截面惯性矩。

(注: 有限差分法计算时, 只考虑作用各支点的竖向外荷载的作用, 不考虑外扭矩和外水平力的作用。)

按式 (2-1-9), 除梁两端的第 1 点和第 n 点外, 其余各点挠度 (转角) 都可近似用左右相邻点的挠度 (转角) 来表示。例如第 $i+1$ 点挠度及转角的二阶导数按式 (2-1-7) 及 (2-1-9) 可以近似表示为:

$$\left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)_{i+1} \approx \frac{W_{i+2} - 2W_{i+1} + W_i}{l^2}$$

$$\left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} \right)_{i+1} \approx \frac{\theta_{i+2} - 2\theta_{i+1} + \theta_i}{l^2} \quad (i=1, 2, \dots, n-2) \quad (2-1-11)$$

于是梁的挠度及转角的微分方程式 (2-1-10) 可近似用以下差分方程来表示:

$$C_{i+1}(W_{i+2} - 2W_{i+1} + W_i) = -M_{i+1}$$

$$C_{i+1}(\theta_{i+2} - 2\theta_{i+1} + \theta_i) = -Q_{i+1}$$

$$C_{i+1} = (EI_0)_{i+1} / l^2 \quad (2-1-12)$$

式中, $(EI_0)_{i+1}$ —— $i+1$ 点处梁的抗弯刚度。

上列差分方程式是将式 (2-1-10) 的微分方程离散后得到的, 所以如果梁的弯矩图 (剪力) 愈不连续光滑, 则解的精度愈低。特别是在支座处作用有集中力偶 (集中力) 时, 弯