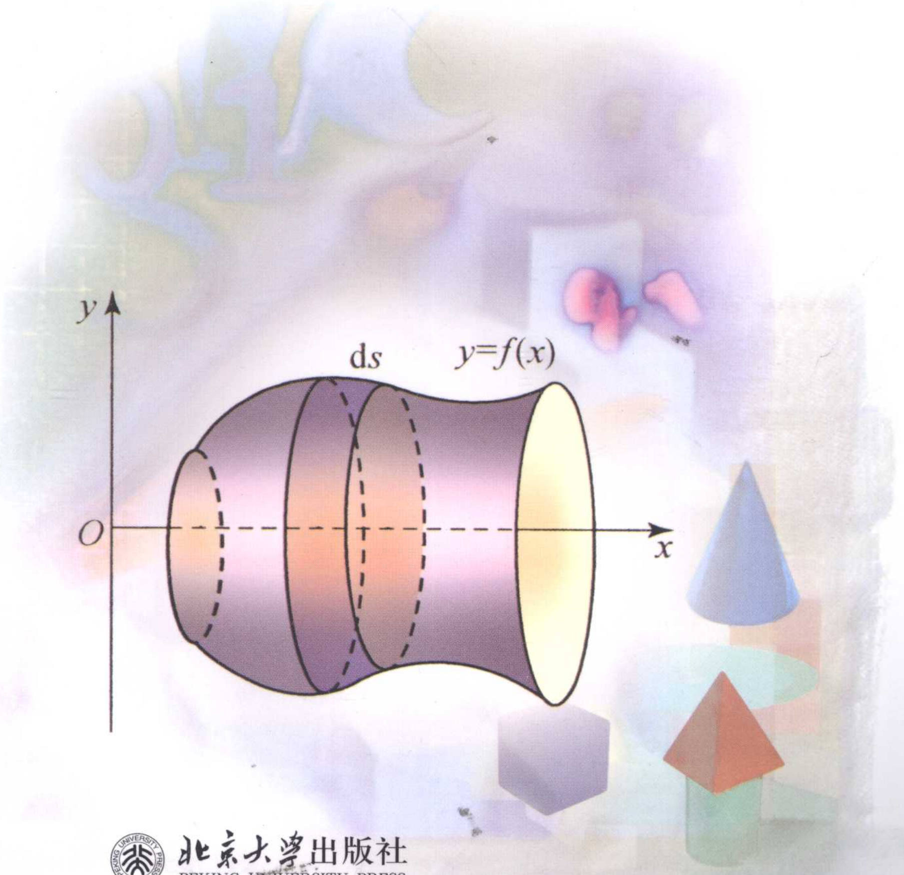
21世纪高等院校数学规划系列教材

主编 肖筱南

高等数学(上册)

GAODENG SHUXUE

编著者 林建华 杨世廞 高琪仁 许清泉 庄平辉 林应标



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪

高等院校数学规划系列教材 / 主编　肖筱南

高等数学

（上　册）

编著者　林建华　杨世廉　高琪仁
许清泉　庄平辉　林应标

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·上册/林建华等编著. —北京：北京大学出版社，2010.8
(21世纪高等院校数学规划系列教材)
ISBN 978-7-301-17676-4

Ⅰ.高… Ⅱ.林… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第160836号

书　　名：高等数学(上册)
著作责任者：林建华　杨世廞　高琪仁　许清泉　庄平辉　林应标　编著
责 任 编 辑：曾琬婷
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-17676-4/O·0825
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　电子信箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　理科编辑部62752021　出版部62754962
印 刷 者：三河市欣欣印刷有限公司
经 销 者：新华书店
787mm×960mm　16开本　18.25印张　380千字
2010年8月第1版　2010年8月第1次印刷
印　　数：0001—4000册
定　　价：32.00元

《21 世纪高等院校数学规划系列教材》
编审委员会

《21 世纪高等院校数学规划系列教材》书目

高等数学(上册)	林建华等编著
高等数学(下册)	林建华等编著
微积分	曹镇潮等编著
线性代数	林大兴等编著
新编概率论与数理统计(第 2 版)	肖筱南等编著

前　言

随着我国高等教育改革的不断深入，根据2009年教育部关于要求全国高等学校认真实施本科教学质量与教学改革工程的通知精神，为了更好地适应21世纪对高等院校培养复合型高素质人才的需要，北京大学出版社计划出版一套对国内高等院校本科大学数学课程教学质量与教学改革起到积极推动作用的《21世纪高等院校数学规划系列教材》.应北京大学出版社的邀请，我们这些长期在教学第一线执教的教师，经过统一策划、集体讨论、反复推敲、分工执笔编写了这套教材，其中包括：《高等数学(上册)》、《高等数学(下册)》、《微积分》、《线性代数》、《新编概率论与数理统计(第2版)》.

在结合编写者长期讲授本科大学数学课程所积累的成功教学经验的同时，本套教材紧扣教育部本科大学数学课程教学大纲，紧紧围绕21世纪大学数学课程教学改革与创新这一主题，立足大学数学课程教学改革新的起点、新的高度狠抓了教材建设中基础性与前瞻性、通俗性与创新性、启发性与开拓性、趣味性与科学性、直观性与严谨性、技巧性与应用性的和谐与统一的“六突破”.实践将会有力证明，符合上述先进理念的优秀教材，将会深受广大学生的欢迎.

本套教材的特点还体现在：在编写过程中，我们按照本科数学基础课要“加强基础，培养能力，重视应用”的改革精神，对传统的教材体系及教学内容进行了必要与精心的调整和改革，在遵循本学科科学性、系统性与逻辑性的前提下，尽量注意贯彻深入浅出、通俗易懂、循序渐进、融会贯通的教学原则与直观形象的教学方法.既注重数学基本概念、基本定理和基本方法的本质内涵的辩证、多侧面的剖析与阐述，特别是对它们的几何意义、物理背景、经济解释以及实际应用价值的剖析，又注意学生基本运算能力的训练与综合分析问题、解决问题能力的培养，以达到便于教学与自学之目的；既兼顾教材的前瞻性，注意汲取国内外优秀教材的优点，又注意到数学基础课与相关专业课的联系，为各专业后续课程打好坚实的基础.

为了帮助各类学生更好地掌握本课程内容，加强基础训练和基本能力的培养，本套教材紧密结合概念、定理和运算法则配置了丰富的例题，并做了深入的剖析与解答.每节配有适量习题，每章配有复习题或综合例题，以供读者复习、巩固所学知识；书末附有习题答案与提示，以便读者参考.

本套规划系列教材的编写与出版，得到了北京大学出版社及厦门大学嘉庚学院的大力支持与帮助，刘勇副编审与责任编辑曾琬婷为本套教材的出版付出了辛勤劳动，在此一并表示诚挚的谢意.

本书第一章由杨世廞编写,第二章由林建华编写,第三章由林应标编写,第四、五、六章由许清泉编写,第七章由庄平辉编写.全书先由林建华负责修改与统稿,最后由肖筱南负责审稿、定稿.

限于编者水平,书中难免有不妥之处,恳请读者指正!

编　者

2010 年 6 月

目　　录

第一章 函数与极限

高等数学是以函数为主要对象，以极限理论为基础，分析研究函数的连续、可微与可积等性态的一门课程. 本章将着重介绍函数、极限和连续的基本概念、性质及其基本方法，为今后的学习打下必要的基础.

§1.1 初等函数

一、邻域

由于集合、数集、映射等知识在中学已有接触，因此我们在这里着重介绍邻域的概念.

邻域 以点 a 为中心的开区间 $(a-\delta,a+\delta)(\delta>0)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记做 $U(a,\delta)$，其中点 a 称为该邻域的**中心**，δ 称为该邻域的**半径**.

显然 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 的距离小于 δ 的点的集合，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

当无需强调邻域的半径时，我们常用记号 $U(a)$ 表示以点 a 为中心的某个开区间，称为点 a 的邻域.

去心邻域 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记做 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

另外，开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的**左 δ 邻域**，而开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的**右 δ 邻域**.

二、两个常用不等式

我们不加证明地介绍两个简单而又常用的不等式.

三角不等式 对于任意的实数 a 和 b，都有

$$\big||a|-|b|\big|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

平均值不等式 对于任意 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，恒有

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

其中等号当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 全部相等时才成立.

上述平均值不等式中,左边的式子称为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的**几何平均**,右边的式子称为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的**算术平均**.因此,正数的几何平均小于或等于算术平均.

三、函数

1. 函数概念

定义 1 设 D 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的非空数集,若存在某一确定的法则 f,使得对于每一个 $x\in D$,都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称对应法则 f 为定义在实数集 D 上的**一元函数**(简称**函数**),记做

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为函数 f 的**自变量**,y 称为函数 f 的**因变量**,D 称为函数 f 的**定义域**(通常记为 D_f),与 x 对应的值 $y=f(x)$ 称为函数 f 在 x 处的**函数值**,函数值的全体构成的集合称为函数 f 的**值域**(通常记为 R_f 或 $f(D)$).

定义 1 中的"唯一确定"表明所讨论的函数是单值的.除非特别说明,本课程不讨论多值函数.另外,表示函数的记号除了常用的 f 外,还可用任何其他的字母,有时甚至就用 $y=y(x)$ 来表示一个函数.

确定一个函数的因素有三个:定义域,对应法则及值域.函数的定义域通常由自然定义域或实际定义域决定.**自然定义域**指的是使函数抽象算式有意义的自变量取值范围,而**实际定义域**则指由问题的实际背景所限定的自变量取值范围.显然,两个函数相等,当且仅当它们的定义域和对应法则都相同.

在平面直角坐标系中,以自变量 x 为横坐标,以对应的函数值 $y=f(x)$ 为纵坐标,就得到平面上一个点,这种点全体构成的点集称为**函数 $y=f(x)$ 的图形**.

函数的表示法主要有三种:解析法(公式法)、图示法和表格法.用解析法表示函数时,有一些函数无法用一个统一的表达式表示,必须根据自变量的不同取值而采用多个表达式.这类函数称为**分段函数**,在本课程学习中尤应引起重视.

下面举几个例子.

例 1 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

例 2 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

例 3 取整函数 $y=[x]$,其中记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数(如图 1-1).

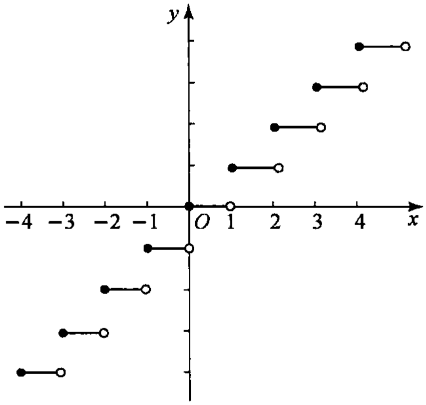


图 1-1

例 4 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ 1, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$$

例 5 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 2x-1, & x>1,\end{cases}$$

求 $f(1+\Delta x)-f(1)$.

解 易得 $f(1)=1$.

当 $\Delta x<0$ 时,$f(1+\Delta x)=(1+\Delta x)^2$,则

$$f(1+\Delta x)-f(1)=2\Delta x+(\Delta x)^2;$$

当 $\Delta x>0$ 时,$f(1+\Delta x)=2(1+\Delta x)-1$,则

$$f(1+\Delta x)-f(1)=2\Delta x.$$

因此

$$f(1+\Delta x)-f(1)=\begin{cases}2\Delta x+(\Delta x)^2, & \Delta x<0,\\ 0, & \Delta x=0,\\ 2\Delta x, & \Delta x>0.\end{cases}$$

例 6 设 $f(\sin x)=\sqrt{\cos 2x}$,求函数 $f(x)$的表达式及其定义域.

解 因 $\sqrt{\cos 2x}=\sqrt{1-2\sin^2 x}$,令 $t=\sin x$,则 $f(t)=\sqrt{1-2t^2}$,改写为

$$f(x)=\sqrt{1-2x^2}.$$

为使 $\sqrt{1-2x^2}$有意义,应有 $1-2x^2\geqslant 0$. 由此解得 $|x|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以函数 $f(x)$的定义域为$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

2. 函数的一些性质

2.1 有界性

设函数 $f(x)$在数集 D 上有定义,若存在正数 M,使得对任何 $x\in D$,都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在数集 D 上**有界**,或称 $f(x)$是 D 上的**有界函数**;否则称函数 $f(x)$在数集 D 上**无界**,或称 $f(x)$是 D 上的**无界函数**. 也就是说,若 $f(x)$是 D 上的无界函数,则不管事先给定的正数 M 多么大,总存在一个 $x_0\in D$,使得$|f(x_0)|>M$.

例如,函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界,而函数 $y=2x+1$ 在任何有限区间内都是有

界的,但在$(-\infty,+\infty)$内却无界.

2.2 单调性

设函数$f(x)$在区间I上有定义,对任意的$x_1,x_2\in I$,若当$x_1<x_2$时,有$f(x_1)<f(x_2)$,则称函数$f(x)$在区间I上**单调增加**(或**递增**);若当$x_1<x_2$时,有$f(x_1)>f(x_2)$,则称函数$f(x)$在区间I上**单调减少**(或**递减**).单调增加的函数和单调减少的函数统称为**单调函数**,而相应的区间I统称为**单调区间**.

例如,函数$y=x^2$在$(-\infty,0)$内单调减少,而在$(0,+\infty)$内单调增加.

2.3 奇偶性

设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称,若对于任意的$x\in D$,都有$f(-x)=f(x)$,则称函数$f(x)$为**偶函数**;若恒有$f(-x)=-f(x)$,则称函数$f(x)$为**奇函数**.

例如,函数$y=\cos x$是偶函数,而函数$y=x^3$是奇函数.

易知,偶函数的图形关于y轴对称,而奇函数的图形关于原点对称.

例 7 判定下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(2) $F(x)=\sin f(x)$,其中$f(x)$为偶函数.

解 (1) 因为

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以$f(x)$为奇函数.

(2) 因$f(x)$为偶函数,故$f(-x)=f(x)$,从而有

$$F(-x)=\sin f(-x)=\sin f(x)=F(x).$$

所以$F(x)$为偶函数.

2.4 周期性

设函数$f(x)$的定义域为D,若存在一个正数$T>0$,使得对于任意的$x\in D$,必有$x\pm T\in D$,且有

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称函数$f(x)$为**周期函数**,并称T为$f(x)$的**周期**.

显然,一个周期函数有无穷多个周期,因为若T是$f(x)$的一个周期,则kT(k为任一正整数)也是$f(x)$的周期.以后周期函数的周期通常指它的最小正周期.需要注意的是,并非每个周期函数都有最小正周期.例如,对于常值函数$f(x)=0$,任何一个正数都是它的周期;又如,对于例4中的狄利克雷函数,任何一个正有理数都是它的周期.

在科学与工程中所研究的许多现象都呈现出明显的周期特征,如电流和电压是周期的,家用微波炉中的电磁场是周期的,季节和气候以及天体的运动也是周期的,因此周期函数的

应用非常广泛.

3. 反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 R,若对于每一个 $y\in R$,都有唯一确定的 $x\in D$ 与之对应,使得 $f(x)=y$,则在 R 上定义了一个函数,称它为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**,记为

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in R.$$

显然,函数 $y=f(x)(x\in D_f)$ 与 $x=f^{-1}(y)(y\in R_f)$ 互为反函数. 易知

$$f^{-1}(f(x))=x\ (x\in D_f),\quad f(f^{-1}(y))=y\ (y\in R_f).$$

由于函数的本质是其对应规律,因此习惯上我们选用 x 作为自变量,而把函数 $y=f(x)$ $(x\in D_f)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)(x\in R_f)$. 另外,相对于反函数,我们常常把 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

在同一平面直角坐标系中,函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

何时一个函数存在反函数呢? 我们有如下反函数存在定理.

定理 设函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上单调增加(或减少),则函数 $y=f(x)$ 存在反函数,且反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $R=f(D)$ 上也单调增加(或减少).

中学时已经学习了反三角函数,它们有一个主值区间,这个主值区间就是为了保证三角函数的单调性,从而确保了反三角函数存在. 类似的,函数 $y=x^2$ 在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上并不是单调的. 当限制在 $(0,+\infty)$ 时,它就是单调增加的,因而有反函数 $x=\sqrt{y}$;而限制在 $(-\infty,0)$ 时,它也是单调减少的,此时它有反函数 $x=-\sqrt{y}$.

例 8 求函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数.

解 记 $u=e^x$,则 $y=\dfrac{u-u^{-1}}{2}$. 由此得 $u^2-2yu-1=0$,解得

$$u=y\pm\sqrt{y^2+1}.$$

因 $u>0$,故上式中应取正号,于是 $u=y+\sqrt{y^2+1}$,即

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}.$$

故得 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$,或改写为

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

这就是函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数.

4. 复合函数

定义 3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D,且值域 $\varphi(D)\subset$

D_1,则称函数 $y=f(\varphi(x))$ 为函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**,其定义域为 D,变量 u 称为**中间变量**.

例 9 设函数 $f(x)=1-\mathrm{e}^x$,$\varphi(x)=\sqrt{x}$,求复合函数 $f(\varphi(x))$ 与 $\varphi(f(x))$ 及其定义域.

解 复合函数 $f(\varphi(x))=f(\sqrt{x})=1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$;其定义域为 $[0,+\infty)$.

复合函数 $\varphi(f(x))=\varphi(1-\mathrm{e}^x)=\sqrt{1-\mathrm{e}^x}$. 为使其有意义,必须 $1-\mathrm{e}^x\geqslant 0$. 由此得 $x\leqslant 0$. 因此复合函数 $\varphi(f(x))=\sqrt{1-\mathrm{e}^x}$ 的定义域为 $(-\infty,0]$.

例 10 设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ \mathrm{e}^x, & x\geqslant 0, \end{cases}$ $\varphi(x)=\ln(1+x)$,求复合函数 $f(\varphi(x))$ 与 $\varphi(f(x))$ 及其定义域.

解 当 $-1<x<0$ 时,$\varphi(x)<0$,因而 $f(\varphi(x))=\varphi(x)=\ln(1+x)$;

当 $x\geqslant 0$ 时,$\varphi(x)\geqslant 0$,因而 $f(\varphi(x))=\mathrm{e}^{\varphi(x)}=\mathrm{e}^{\ln(1+x)}=1+x$.

因此复合函数 $f(\varphi(x))=\begin{cases} \ln(1+x), & -1<x<0, \\ 1+x, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 其定义域为 $(-1,+\infty)$.

当 $-1<x<0$ 时,$f(x)=x$,所以 $\varphi(f(x))=\varphi(x)=\ln(1+x)$;

当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=\mathrm{e}^x$,所以 $\varphi(f(x))=\varphi(\mathrm{e}^x)=\ln(1+\mathrm{e}^x)$.

因此复合函数 $\varphi(f(x))=\begin{cases} \ln(1+x), & -1<x<0, \\ \ln(1+\mathrm{e}^x), & x\geqslant 0, \end{cases}$ 其定义域也是 $(-1,+\infty)$.

值得说明的是,并不是任意两个函数都能构成复合函数. 例如,$f(u)=\sqrt{u}$ 与 $u=\varphi(x)=\sin x-2$ 就构不成复合函数 $f(\varphi(x))$.

两个函数在一定条件下可以构成复合函数,多个函数也可以构成复合函数,只要它们顺次满足构成复合函数的条件.

我们不仅要懂得把几个函数复合成复合函数,还应善于把一个比较复杂的函数分解为几个相对简单的函数的复合.

例 11 试把函数 $y=\mathrm{e}^{2\sin x^2}$ 分解为几个简单函数的复合.

解 函数 $y=\mathrm{e}^{2\sin x^2}$ 可以看成是由 $y=\mathrm{e}^u$,$u=2\sin v$,$v=x^2$ 复合而成的复合函数.

5. 函数的运算

函数可以作四则运算.

设有两个函数 $y=f(x)(x\in D_1)$,$y=g(x)(x\in D_2)$,且 $D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$,则可以定义它们的和、差、积、商运算如下:

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),\ x\in D;\quad (f\cdot g)(x)=f(x)g(x),\ x\in D;$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad x\in\{x\mid x\in D, g(x)\neq 0\}.$$

例 12 设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ \sin x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2, & x<1,\\ 1-\sin x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $f(x)+g(x)$.

解 $f(x)+g(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ 2+\sin x, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

四、初等函数

1. 基本初等函数

我们把中学已经学过的以下五类基本函数称为**基本初等函数**：

(1) **幂函数**：$y=x^{\mu}$($\mu\in\mathbf{R}$ 为常数).

(2) **指数函数**：$y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq 1$).

(3) **对数函数**：$y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$). 当 $a=\mathrm{e}$ 时,称之为**自然对数函数**,记为 $y=\ln x$.

(4) **三角函数**：$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$ 等.

(5) **反三角函数**：$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$ 等. 为了保证反三角函数的单值性,我们还规定了反三角函数的相应主值区间. 例如, $y=\arcsin x$ 的主值区间为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算或复合运算所构成并可用一个式子表示的函数,称为**初等函数**. 例如, $y=\sin(2x+1)$, $y=\sqrt{x^2+3}$ 都是初等函数. 需要指出的是,分段函数一般不是初等函数. 但是分段函数 $y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 可表为 $y=\sqrt{x^2}$,因而它仍为初等函数.

本课程研究的函数,主要是初等函数.

例 13 设 $u(x)$($u(x)>0$)与 $v(x)$ 是两个初等函数,问: $u(x)^{v(x)}$ 是否是初等函数?

解 $u(x)^{v(x)}$ 可以表示为 $u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$,它可以视为由 $y=\mathrm{e}^w$, $w=v(x)s$, $s=\ln t$, $t=u(x)$ 复合而成的,因而它是初等函数.

形如 $u(x)^{v(x)}$ 的函数通常称为**幂指函数**.

3. 双曲函数与反双曲函数

我们还要介绍一类工程技术上应用十分广泛的函数,它们由 $y=\mathrm{e}^x$ 与 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 组合而成,且具有许多与三角函数相似的性质,如平方关系式、和差倍半公式等. 这类函数被称为**双曲函数**,具体定义如下：

双曲正弦函数：$y=\operatorname{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$;