课标本

教材完全解读

王后雄学案

总策划：熊 辉

高中数学 必修1

配苏教版

丛书主编：王后雄
本册主编：王吉良

X导航 丛书系列

中国青年出版社

课标本

教材完全解读

王后雄学案

高中数学 必修1

配苏教版

丛书主编：王后雄
本册主编：王吉良
编　　委：梅光红　陈　科
高　阳　王　超
张　正　李　翔
黄丹梅　陈　明
吴　刚　谢晓刚
胡晓兰　王　磊
陈远航　张　胜
刘　益　黄　健

导航 丛书系列

中国青年出版社

（京）新登字083号

图书在版编目（CIP）数据

教材完全解读：苏教版．高中数学．1：必修/王后雄主编．
—4版．—北京：中国青年出版社，2008
ISBN 978-7-5006-6382-9

Ⅰ.教… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第085315号

策　　划：熊　辉
责任编辑：李　扬
封面设计：木头羊

教材完全解读
高中数学
必修1

中国青年出版社 出版发行
社址：北京东四12条21号　邮政编码：100708
网址：www.cyp.com.cn
编辑部电话：（010）64034328
读者服务热线：（027）61883306
咸宁市国宾印务有限公司印制　新华书店经销
889×1194　1/16　10印张　264千字
2008年7月北京第4版　2008年7月湖北第4次印刷
印数：15001—20000册
定价：17.70元
本书如有任何印装质量问题，请与承印厂联系调换
联系电话：（027）61883355

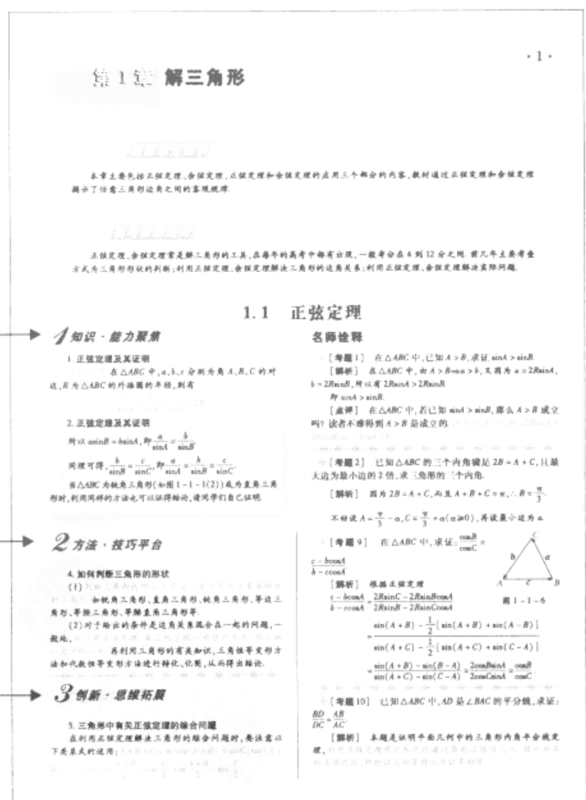
教材完全解读

基础教育新课标改革已如火如荼地展开，新课程教材助学助考的开发问题已成为人们关注的焦点。应广大读者的要求，我们特邀来自国家新课程改革试验区和国家级培训班的专家编写课标版《教材完全解读》丛书。该系列丛书能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照课程理念和教材学习目标要求科学、高效地学习。该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨，助您走向成功。

这套丛书在整体设计上有两个突出的特点：一是双栏对照，对教材全解全析，在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色；另一个就是注重典型案例学习，突出鲜活、典型和示范的特点。

为了让您更充分地理解本书的特点，挑战学习的极限，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。

从知识、方法、思维三个方面诠释教材知识点和方法点，帮您形成答题要点、解题思维，理清解题思路、揭示考点实质和内涵。



·1·

第1章 解三角形

本章主要包括正弦定理、余弦定理、正弦定理和余弦定理的应用三个部分的内容，教材通过正弦定理和余弦定理揭示了任意三角形边角之间的客观规律.

正弦定理、余弦定理常是解三角形的工具，在每年的高考中都有出现，一般考分在4到12分之间. 前几年主要考查方式为三角形形状的判断；利用正弦定理、余弦定理解决三角形的边角关系；利用正弦定理、余弦定理解决实际问题.

1.1 正弦定理

1 知识·能力聚焦

1. 正弦定理及其证明

在$\triangle ABC$中，a、b、c分别为角A、B、C的对边，R为$\triangle ABC$的外接圆的半径，则有

2. 正弦定理及其证明

所以 $a\sin B=b\sin A$，即 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$

同理可得，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，即 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

当$\triangle ABC$为钝角三角形（如图1-1-1(2)）或为直角三角形时，利用同样的方法也可以证得结论，请同学们自己证明.

2 方法·技巧平台

4. 如何判断三角形的形状

(1) …如锐角三角形、直角三角形、钝角三角形、等边三角形、等腰三角形、等腰直角三角形等.

(2) 对于给出的条件是边角关系混合在一起的问题，一般地，…再利用三角形的有关知识，三角恒等变形方法和代数恒等变形方法进行转化、化简，从而得出结论.

3 创新·思维拓展

5. 三角形中有关正弦定理的综合问题

在利用正弦定理解决三角形的综合问题时，要注意以下关系式的运用：

名师诠释

[考题1] 在$\triangle ABC$中，已知$A>B$，求证 $\sin A>\sin B$.

[解析] 在$\triangle ABC$中，由$A>B\Rightarrow a>b$，又因为$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，所以有$2R\sin A>2R\sin B$.

即$\sin A>\sin B$.

[点评] 在$\triangle ABC$中，若已知$\sin A>\sin B$，那么$A>B$成立吗？读者不难得到$A>B$是成立的.

[考题2] 已知$\triangle ABC$的三个内角满足$2B=A+C$，且最大边为最小边的2倍，求三角形的三个内角.

[解析] 因为$2B=A+C$，而且$A+B+C=\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

不妨设$A=\frac{\pi}{3}-\alpha$，$C=\frac{\pi}{3}+\alpha(\alpha\geq0)$，并设最小边为$a$.

[考题9] 在$\triangle ABC$中，求证：$\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}$

[解析] 根据正弦定理

$$\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}=\frac{2R\sin C-2R\sin B\cos A}{2R\sin B-2R\sin C\cos A}=\frac{\sin(A+B)-\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]}{\sin(A+C)-\frac{1}{2}[\sin(A+C)+\sin(C-A)]}=\frac{\sin(A+B)-\sin(B-A)}{\sin(A+C)-\sin(C-A)}=\frac{2\cos B\sin A}{2\cos C\sin A}=\frac{\cos B}{\cos C}.$$

图1-1-6

[考题10] 已知$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的平分线，求证：$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

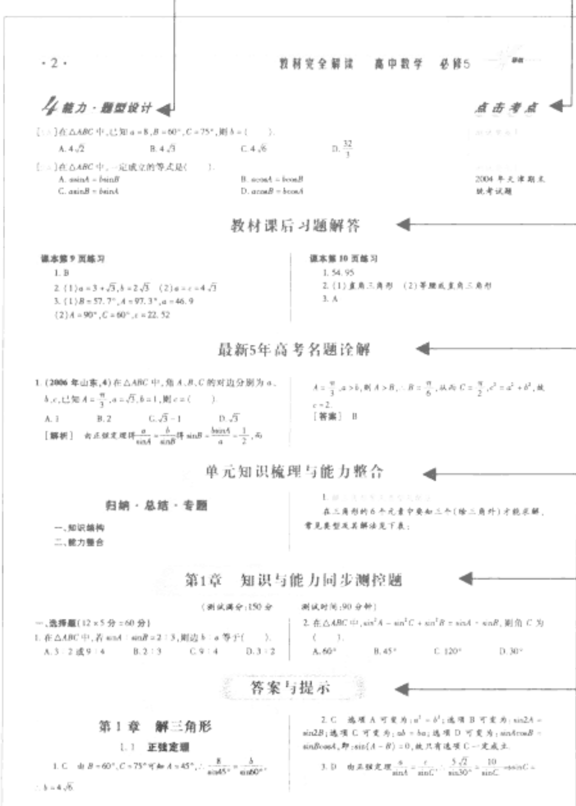
[解析] 本题是证明平面几何中的三角形内角平分线定理，…

教辅大师王后雄教授、特级教师科学超前的体例设置，帮您赢得了学习起点，成就您人生的夙愿。

——题记

针对本节重点、难点、考点及考试能力达标所设计的题目。题目难度适中，是形成能力、考试取得高分的必经阶梯。

“点击考点”栏目导引每一道试题的“测试要点”。当您解题出错时，建议您通过“测试要点”的指向，弄清致错原因，找到正确答案。



帮助您弥补课堂上听课的疏漏。答案准确，讲解繁简适度、到位、透彻。

汇集高考名题，讲解细致入微，教纲、考纲，双向例释；练习、考试，讲解透彻；多学、精练，效果显著。

单元知识与方法网络化，帮助您将本单元所学教材内容系统化，形成对考点知识的二次提炼与升华，全面提高学习效率。

精心选编涵盖本章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明，与同步考试接轨，利于您同步自我测评，查缺补漏。

试题皆提供详细的解题步骤和思路点拨，鼓励一题多解。不但知其然，且知其所以然，帮助您养成良好规范的答题习惯。

X导航丛书系列最新教辅

《中考完全学案》

讲 《中考完全解读》 复习讲解—紧扼中考的脉搏

练 《中考完全学案》 难点突破—挑战思维的极限

《高考完全学案》

讲 《高考完全解读》 精湛解析—把握高考的方向

练 《高考完全学案》 阶段测试—进入实战的演练

讲 《教材完全解读》 细致讲解—汲取教材的精髓

例 《课标导航基础知识手册》透析题型—掌握知识的法宝

练 《教材完全学案》 夯实基础—奠定能力的基石

伴随着新的课程标准问世及新版教材的推广，经过多年的锤炼与优化，数次的修订与改版，如今的“X导航”丛书系列以精益求精的质量、独具匠心的创意，已成为备受广大读者青睐的品牌图书。今天，我们已形成了高效、实用的同步练习与应试复习丛书体系，如果您能结合自身的实际情况配套使用，一定能取得立竿见影的效果。

目 录

知识与方法

阅读索引

第1章 集合

第2章 函数概念与基本初等函数 I

学法指津

学习中最重要的是什么呢？古人说:“授之以鱼,不如授之以渔”,学会打鱼的方法比得到鱼更重要,所以学习中不仅要注意接受别人给予你的知识,更应该学会如何获得知识,也就是说,获得知识的方法才是学习中最重要的.而获得知识最好的方法就是自学,数学是提高“自学能力”最好的载体之一.本书力求最大限度地帮助同学们自学,她对基本概念作了进一步的剖析和示例,对思考方法作了进一步的分析和引导,对例题习题作了进一步的点评和反思;她努力为同学们铺一条自学之路,在教材、教师、学生之间架一座立交桥;她最大的愿望就是成为同学们最好的自学材料.

数学中最重要的是什么？上个世纪很多专家都讨论了这个问题,大部分人的意见是:问题是关键.有位数学家说“问题是数学的心脏”,的确是这样,问题是思考的结果,也是思考的开始,更是创造的源泉.本书左栏把教材进行问题化,力求把课本细化为读者易思考的问题,从而对课本有更深刻的理解,而在“综合·创新拓展”栏目中又向同学们提出了更深刻、更新颖的数学问题,这将开拓同学们的视野,增强同学们的好奇心,培养同学们发现问题、提出问题的好习惯.在右栏中本书对应左栏的问题进行了对照示例,旨在提高同学们分析问题、解决问题、反思问题的能力,使同学们养成“问题意识”和交流的习惯,我想这对同学们学习数学是非常重要的.

走向成功最重要的是什么？每位同学都有自己的观点,大多数人认为是必胜的信心,本书对习题都作了详细的分析和解答,这有什么好处呢？同学们做完练习后马上可以对照、比较课后答案,分析自己的思路,从而印证自己的能力,增强自己的信心;另外本书把高考题作了同步诠解,使高考在平时,高考就在你每天的学习当中,进一步树立同学们必胜的信念.在阅读本书的过程中,有时会遇到一些困难,不要着急,要有耐心,一个一个的把问题弄清楚.通过本书你会慢慢地喜欢数学,相信本书会给你带来数学的乐趣,伴你走向成功!

本书重点介绍了函数的概念、函数与方程的关系,以及函数的一些简单的应用.函数是什么呢？函数是两个数集的一种对应关系,准确地说,函数是两个非空数集间的一个映射.当一个变量 x 在一个集合中取值时,另一个变量 y(x 的象)对应地在另一个数集中变化,而函数就是通过它的对应关系(解析式或其他)来描出函数的图象,研究由变量变化引起的象的变化情况.通俗地说,函数就是研究变量与它的象的联系和变化规律.同学们学习本书时要深刻理解函数的概念,学会通过函数的定义域、对应关系、图象等来研究两个变量的关系.祝愿同学们能够迅速适应高中的学习和生活,在新的学习阶段中有一个更新的、更高的起点!

本书主编:王吉良

第1章　集　合

课标单元知识

集合

(1)集合的含义与表示

①通过实例,了解集合的含义,体会元素与集合的“属于”关系.

②能选择自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题,感受集合语言的意义和作用.

(2)集合间的基本关系

①理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.

②在具体情境中,了解全集与空集的含义.

(3)集合的基本运算

①理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集.

②理解在给定集合中一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集.

③能使用 Venn 图表达集合的关系及运算,体会直观图对理解抽象概念的作用.

高考命题趋向

高考中集合的主要考点为:集合、子集、并集、补集、空集和全集的概念;元素与集合、集合与集合之间的关系;集合的子、交、并、补的运算.其中集合的运算为重点考查内容,考查题型大都为选择题,理解并掌握集合语言和集合思想的运用是一个难点,把集合知识与其他知识结合起来,小题小综合是近几年高考在本章的命题趋势.

1.1　集合的含义及其表示

1 知识·能力聚焦

1. 集合的含义

集合是数学中最原始的概念,没有定义,只能给出描述:一般地,一定范围内某些确定的、不同的对象的全体构成一个集合.常用大写字母$A,B,C,\cdots$来表示.

从上面的描述我们可以看出,构成集合的对象必须是确定的、不同的.

集合中的每一个对象称为该集合的元素,简称为元.元素常用小写字母$a,b,c,\cdots$来表示.

集合中的元素具有广泛性,可以是数、人、图形、点等.

集合是一个确定的整体,要从整体的角度来看待它,例如“一(2)班的同学”组成的一个集合A,它表示的是一(2)班同学的全体,也就是一个班集体.

2. 集合中元素的性质

(1)确定性　对于一个给定的集合,任何一个对象或者是这个集合中的元素,或者不是它的元素,两种情况必有一种且只有一种成立.

(2)互异性　集合中的任何两个元素都是能

名师诠释

◇[考题1]　考查下列每组对象能否构成一个集合?

(1)所有的好人;

(2)平面上到原点的距离等于2的点的全体;

(3)正三角形的全体;

(4)方程$x^2=2$的实数解;

(5)不等式$x+1>0$的所有实数解.

[解析]　看一组对象能否组成集合,关键是看这组对象是否是确定的.对于一个集合而言,任何对象要么在其中,要么不在其中.“所有的好人”无确定的标准,因此(1)不能构成集合.而(2)、(3)、(4)、(5)的对象尽管有点、图形、实数等不同之处,但它们是确定的.所以(2)、(3)、(4)、(5)能构成集合.

[点评]　判断一组对象能否组成一个集合,关键是看是否有一个明确的标准,即任何事物(对象)要么属于这个集合要么不属于这个集合.

◇[考题2]　含有三个实数的集合可表示为$\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$,也可表示为$\{a^2,a+b,0\}$.求$a^{2007}+b^{2007}$.

(2007年黄冈中学模拟题)

[解析]　由集合元素的互异性可知$a\neq1$且$a\neq0$,所以$a\neq a^2$.又因

区分的(即互不相同的),相同的对象归入任何一个集合时,只能算作这个集合的一个元素.

例如:方程 $x^2-2x+1=0$ 的解集记为$\{1\}$,而不能记为$\{1,1\}$.

(3)无序性.在一个集合中,不考虑它的元素之间的顺序,即集合与其中元素的排列次序无关.

例如:集合$\{a,b,c\}$与集合$\{c,a,b\}$是同一个集合.

3. 集合的分类

(1)含有有限个元素的集合称为有限集.

(2)含有无限个元素(即不是有限集)的集合称为无限集.

(3)不含有任何元素的集合称为空集,记作$\varnothing$.

例如:方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内无解,其解集为空集.

注意:空集是同学们容易忽视的集合,要时刻提防.

例如:若集合 $A=\{x\mid x^2-3x+a=0,x\in\mathbf{R}\}$ 中的元素都是集合 $B=\{1,2\}$ 的元素,求 a 的值.

注意:此题除了要考虑集合 A 中有一个元素、两个元素外,还要考虑 A 为空集的情况. 当 A 中只有一个元素时. $\Delta=0$,即 $9-4a=0\Rightarrow a=\dfrac{9}{4}$,$A=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$,不合题意,应舍. 当 A 中有两个元素时,则方程两根为 $x_1=1,x_2=2$,由韦达定理可求得 $a=2$. 当 A 为空集时,$\Delta=9-4a<0\Rightarrow a>\dfrac{9}{4}$.

故 a 的值为 $a=2$ 或 $a>\dfrac{9}{4}$.

4. 集合与元素的关系

元素与集合有属于($\in$)和不属于($\notin$)两种关系,如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A,记作 $a\in A$,读作"a 属于 A";如果 b 不是集合 A 的元素,就说 b 不属于集合 A,记作 $b\notin A$,读作"b 不属于 A". 例如:$1\in\{-1,1\}$,$0\notin\{-1,1\}$.

对于元素与集合的关系,应该注意以下两点:

(1)$a\in A$ 与 $a\notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素. 根据集合中元素的确定性,可知对任何 a 与 A,在$a\in A$与 $a\notin A$ 这两种情况中必有一种且只有一种成立.

(2)符号"$\in$、$\notin$"只能用在元素与集合之间,表示元素与集合的从属关系,除此之外,"$\in$、$\notin$"没有其他用途.

5. 特定集合的表示

为了书写的方便,我们把一些常用的数集用特定的字母来表示,规定如下:

(1)自然数集:全体非负整数的集合,也称为非负整数集,记作 $\mathbf{N}$;

(2)正整数集:非负整数集内排除 0 的集合,记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$;

(3)整数集:全体整数的集合,记作 $\mathbf{Z}$;

(4)有理数集:全体有理数的集合,记作 $\mathbf{Q}$;

(5)实数集:全体实数的集合,记作 $\mathbf{R}$.

为 $\left\{a,\dfrac{b}{a},1\right\}$和 $\{a^2,a+b,0\}$表示同一个集合,所以 $\begin{cases}a=a+b,\\ \dfrac{b}{a}=0,\\ 1=a^2.\end{cases}\Rightarrow$ $\begin{cases}a=1,\\ b=0\end{cases}$(舍)或$\begin{cases}a=-1,\\ b=0.\end{cases}$所以 $a^{2\,007}+b^{2\,007}=(-1)^{2\,007}=-1$.

[点评] 集合中元素三特性在解题中不可忽视,特别是元素的互异性.

◈ **[考题3]** 已知集合 $A=\{x\mid ax^2-2x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$,若 A 中至多只有一个元素,求实数 a 的取值范围.

[解析] 集合 A 是表示方程 $ax^2-2x+1=0$ 的实数解集,即此方程最多只有一个解. 而二次项的系数不确定,因此方程可能为一次方程或二次方程. 当 $a=0$ 时,它为一元一次方程,只有一个解 $x=\dfrac{1}{2}$;当 $a\neq0$ 时,当它有两个相等的实数根时,由集合的互异性,两个相等的解只能算一个元素,由 $\Delta=0\Rightarrow a=1$,但同学们易忽视方程没有实数解的情形,即 $\Delta<0$ 时,$4-4a<0$,即 $a>1$ 时,$A=\varnothing$.

故所求的 a 的取值范围是 $a=0$ 或 $a\geqslant1$.

[点评] 在解题时,我们要提防空集的遗漏.

◈ **[考题4]** 下列命题中真命题的个数是(　　).

(1)$0\in\varnothing$;(2)$\varnothing\in\{\varnothing\}$;(3)$0\in\{0\}$;(4)$\varnothing\notin\{a\}$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

[解析] 要判断一个元素是否属于该集合,关键在于弄清这个集合由哪些元素所组成. 由于$\varnothing$是不含任何元素的集合,故(1)错;而$\{\varnothing\}$是由空集作为元素组成的一个集合,故(2)正确;同理(3)也正确;(4)不正确,因为$\in$或$\notin$只表示元素与集合之间的关系,不能表示集合与集合之间的关系. 故选 B.

[点评] "0""$\varnothing$""$\{0\}$""$\{\varnothing\}$"等符号是有区别的.

◈ **[考题5]** 已知 $-3\in A$,且 $A=\{m-1,-3m,m^2+1\}$($m\in\mathbf{N}^*$),求 m 的值.

[解析] 此题我们要抓住 $m\in\mathbf{N}^*$ 这个条件,因为 $m\in\mathbf{N}^*$,所以 $m-1\geqslant0$,$m^2+1>0$,只有 $-3m=-3$,故 $m=1$.

[点评] 有时用括号给出的条件正是我们解题的突破口.

◈ **[考题6]** 用列举法表示下列集合:

(1)不大于 10 的非负偶数集;

(2)15 的正约数的集合;

(3)$\left\{x\ \middle|\ x=\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b},a,b\text{ 为非零实数}\right\}$;

(4)$\{x\mid (x-1)^2(x-2)=0,x\in\mathbf{R}\}$;

(5)$\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}2x+y=8\\ x-y=1\end{cases}\right\}$.

[解析] (1)$\{0,2,4,6,8,10\}$;(2)$\{1,3,5,15\}$;

(3)要分 $a>0$ 且 $b>0$,$a>0$ 且 $b<0$,$a<0$ 且 $b>0$,$a<0$ 且 $b<0$ 四种情况考虑,故用列举法表示为$\{-2,0,2\}$;

(4)$\{1,2\}$,1 是方程的二重根,若写成$\{1,1,2\}$是不可以的,因为集合中的元素是互不相同的;

(5)此集合的代表元素是点(x,y),所以结果应写成$\{(3,2)\}$,而不能写成$\{3,2\}$,也不能写成$\{x=3,y=2\}$.

[点评] 要注意集合中的元素是什么?如$\{(3,2)\}$中的元素是点的坐标,$\{3,2\}$是表示两个元素 3,2 构成的集合.

2 方法·技巧平台

6. 列举法和图示法

将集合的元素一一列举出来,并置于花括号"{ }"内,这种表示集合的方法称为列举法.

用这种方法表示集合时,要注意以下几点:

(1)元素之间要用逗号分隔;

(2)元素不能重复;

(3)列举时与元素的次序无关;

(4)对于含较多元素的集合,如果构成集合的元素有明显的规律,可用列举法,但是必须把元素间的规律表示清楚后才能用省略号.

例如:$\mathbf{N}^* = \{1,2,3,\cdots\}$.

为了形象直观,我们常常画一条封闭的曲线,用它的内部来表示一个集合,这种表示集合的方法称为图示法,或称为文恩(Venn)图法. 例:如图 1-1-1 表示集合$\{1,2,3,4,5\}$.

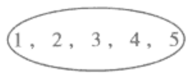


图 1-1-1

7. 描述法

描述法就是把集合的元素所具有的属性叙述出来,并写在花括号内. 它分为(1)文字描述法——用文字把元素所具有的属性描述出来,如{三角形}. (2)符号描述法——用符号把元素所具有的属性描述出来. 例如:

$$\{x \mid x+2>0, x\in\mathbf{R}\}.$$

代表元 元素所具有的属性

3 创新·思维拓展

8. 读懂集合

集合的语言有文字语言和符号语言,集合的对象非常广泛,有数、图形、点和人等. 要读懂集合首先要知道集合的对象是什么,其次是对象具有什么属性.

例如:集合 $A=\left\{y \mid y=\sqrt{x^2-2x+3}, x\in\mathbf{R}\right\}$中的对象是 y,集合 A 表示 y 的取值的集合;

$$A=\{y \mid y\geqslant\sqrt{2}, y\in\mathbf{R}\}.$$

集合 $B=\{x \mid y=\sqrt{x^2-2x+3}, x\in\mathbf{R}\}$ 中的对象是 x,集合 B 表示 x 的取值的集合;

$$B=\{x \mid x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}.$$

集合 $C=\{(x,y) \mid y=x^2-2x+3, x\in R\}$中的对象是$(x,y)$,集合 C 表示抛物线 $y=x^2-2x+3$ 上点的集合.

9. 集合的相等

如果两个集合所含的元素完全相同(即 A 中的元素都是 B 中的元素,B 中的元素也都是 A 中的元素),则称这两个集合相等,例如:$\{a,b,c\}=\{c,b,a\}$.

又如判断集合 $A=\{x \mid x=4k\pm1, k\in\mathbf{Z}\}$ 与集合 $B=\{y \mid y=2n-1, n\in\mathbf{Z}\}$ 是否相等? 我们可以用列举法表示两个集合,

即 $A=\{\cdots,-1,1,3,5,\cdots\}$;

$B=\{\cdots,-1,1,3,5,\cdots\}$.

$\therefore A$ 与 B 尽管形式不一样,但它们的元素完全一样,故 $A=B$.

10. 集合表示的常见错误

◇[考题7] 用描述法表示下列集合:

(1)所有正偶数组成的集合;

(2)方程 $x^2+2=0$ 的解的集合;

(3)不等式 $4x-6<5$ 的解集;

(4)函数 $y=2x+3$ 的图象上的点集.

[解析] (1){x|x 是正偶数} 文字描述法,$\{x \mid x=2n, n\in\mathbf{N}^*\}$ 符号描述法;

(2)$\{x \mid x^2+2=0, x\in\mathbf{R}\}$;

(3)$\{x \mid 4x-6<5, x\in\mathbf{R}\}$;

(4)$\{(x,y) \mid y=2x+3, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$.

[点评] 用描述法表示集合时,要注意代表元是什么? 同时要注意代表元所具有的性质.

◇[考题8] 试说明下列集合表示什么?

$A=\left\{y \,\middle|\, y=\dfrac{1}{x}\right\}$; $B=\left\{x \,\middle|\, y=\sqrt{x^2-2x}\right\}$;

$C=\left\{(x,y) \,\middle|\, y=\dfrac{1}{x}\right\}$; $D=\left\{(x,y) \,\middle|\, \dfrac{y}{x-3}=1\right\}$.

[解析] A 表示 y 的取值集合,由反比例函数的图象可知 $A=\{y \mid y<0$ 或 $y>0\}=\{y \mid y\neq0, y\in\mathbf{R}\}$;

B 的代表元是 x,所以 B 表示 x 的取值集合. 即 $B=\{x \mid x^2-2x\geqslant0\}=\{x \mid x\leqslant0$ 或 $x\geqslant2\}$,B 是由小于等于 0 和大于等于 2 的实数构成的集合;

由反比例函数的图象可知,C 表示反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$的图象上的点集;

D 的代表元是点(x,y),$\dfrac{y}{x-3}=1$ 表示什么图形呢? 同学们知道 $y=x-3$ 表示直线,所以 D 表示直线 $y=x-3$,但应除去点$(3,0)$.

[点评] 读集合时,一定要看清楚代表元是什么.

◇[考题9] 设集合 $A=\{a \mid a=n^2+1, n\in\mathbf{Z}\}$,集合 $B=\{b \mid b=k^2-4k+5, k\in\mathbf{Z}\}$,试判断 A 与 B 的关系.

[解析] 若 a 是 A 中的元素,即 $a\in A$,则 $a=n^2+1\ (n\in\mathbf{Z}) \Rightarrow a=(n^2+4n+4)-4(n+2)+5=(n+2)^2-4(n+2)+5$.

$\because n\in\mathbf{Z}, \therefore n+2\in\mathbf{Z}, \therefore a\in B$.

$\therefore A$ 中的元素都是 B 中的元素.

若 $b\in B$,则 $b=k^2-4k+5=(k-2)^2+1$.

$\because k\in\mathbf{Z}, \therefore k-2\in\mathbf{Z}, \therefore b\in A$.

$\therefore B$ 中的元素都是 A 中的元素. 故 $A=B$.

[点评] 要证两个集合 A 和 B 相等,即要证明 A 中的任何一个元素都是 B 中的元素,同时 B 中的任何一个元素也是 A 中的元素.

◇[考题10] 方程组$\begin{cases}x+y=1,\\x-y=-1\end{cases}$的解集是______.

[错解] 解法一:解方程组$\begin{cases}x+y=1,\\x-y=-1,\end{cases}$得$\begin{cases}x=0,\\y=1.\end{cases}$

故填$\{x=0, y=1\}$.

解法二:填$\{0,1\}$.

使用列举法和描述法表示集合最容易出现下述两类错误：

(1)没有弄清集合的元素所具有的形式，就胡乱表示.

例：用列举法写出由 $1,2,x^2-9=0$ 组成的集合.

错解：$\{1,2,3,-3\}$. 正解为 $\{1,2,x^2-9=0\}$.

解析：这里错在把 $x^2-9=0$ 中的"x"可取的值当作元素，事实上一个集合中的所有元素并不是都要具有同一形式，它可以有的是数，有的是方程，有的是式，因此方程 $x^2-9=0$ 是这里的集合中的一个元素.

再如，点集 $\{(2,3)\}$ 是表示一个点的集合，在这里使用了列举法，但很容易错误地表示为 $\{2,3\}$.

(2)没有准确把握符号所描述的具体属性.

例如：$P=\{1,2,3,4\}$，$Q=\{3,4,5,6\}$，

$A=\{a+b \mid a\in P,b\in Q\}$，

$B=\{x \mid x=a+b,a\in P,b\in Q\}$，这里集合 A 与集合 B 就不是同一集合，前者的元素是由 P 和 Q 两个集合中的元素相加得到的一个式子，后者是由 P 和 Q 两个集合中元素相加得到的一个数.

11. 元素分析法

元素分析法就是抓住元素进行分析，也就是元素形式(即代表元)如何？元素应具有哪些属性？元素是否满足"三性"(确定性、互异性、无序性)？

运用元素分析法解题，能准确理解和把握集合的内涵，能有意识地引导我们分析集合是由哪些元素所组成的，而且还能有效地避免解题时发生错误.

例如：已知 $x^2\in\{1,0,x\}$，求实数 x 的值.

解：若 $x^2=0$，则 $x=0$，集合为 $\{1,0,0\}$，不合题意.

若 $x^2=1$，则 $x=\pm1$，而 $x=1$ 时，不合题意.

若 $x^2=x$，则 $x=0$ 或 $x=1$，都不合题意.

$\therefore x=-1$.

解法三：填 $\{(x,y) \mid x=0$ 或 $y=1\}$.

[解析] 由于这里的方程组是二元方程组，它的解是一组解 $\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$ 而不是一个数. 联想平面直角坐标系中点的表示，因此可用有序实数对来表示它，所以它的元素可写成 $(0,1)$. 而解法一中，方程 $x=0$ 和方程 $y=1$ 分别是集 $\{x=0,y=1\}$ 中的元素，因此它不是原方程组的解集. 解法二中，集合 $\{0,1\}$ 的元素是数，也不是原方程组的解集. 解法三中，由于"$x=0$ 或 $y=1$"中"$x=0$"与"$y=1$"不一定要同时成立，因而它有无穷个元素，如 $(0,1),(0,0),(0,3),\cdots$ 都是它的元素，也不是原方程组的解集.

[答案] 填 $\{(0,1)\}$

$\left(\text{或写成}\{(x,y) \mid x=0\text{ 且 }y=1\}\text{ 也可写成}\left\{(x,y) \;\middle|\; \begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\right\}\right)$

◈ **[考题11]** 已知集合 $A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$，若 $1\in A$，求实数 a 的值.

[解析] $\because 1\in A$，则 $a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3$ 必有一个为 1.

若 $a+2=1$，则 $a=-1$，所以 $A=\{1,0,1\}$，与集合中元素的互异性相矛盾，应舍去.

若 $(a+1)^2=1$，则 $a=0$，或 $a=-2$.

当 $a=0$ 时，$A=\{1,2,3\}$，满足题意.

当 $a=-2$ 时，$A=\{0,1,1\}$，与元素的互异性相矛盾，应舍去.

若 $a^2+3a+3=1$，则 $a=-1$(舍去)，或 $a=-2$(舍去).

综上所述，$a=0$.

[点评] 在求解有关集合中元素的问题时，互异性很重要，它决定所求值的取舍，要引起重视.

4 能力·题型设计

点击考点

[1A]下列各组集合中，表示同一集合的是(　　).

A. $M=\{(3,2)\}$，$N=\{(2,3)\}$

B. $M=\{3,2\}$，$N=\{2,3\}$

C. $M=\{(x,y) \mid x+y=1\}$，$N=\{y \mid x+y=1\}$

D. $M=\{1,2\}$，$N=\{(1,2)\}$

测试要点8、9

[2A]下列各条件中，不能构成一个集合的是(　　).

A. 充分接近 $\sqrt{7}$ 的所有实数的全体

B. 某校身高不超过 1.7 米的所有学生

C. 小于 100 的所有无理数

D. 数轴上到原点的距离不超过一个单位的点的全体

测试要点1

[3B]在直角坐标系中，坐标轴上的点的集合可表示为(　　).

A. $\{(x,y) \mid x=0,y\neq0$，或 $x\neq0,y=0\}$

B. $\{(x,y) \mid x^2+y^2=0\}$

C. $\{(x,y) \mid xy=0\}$

D. $\{(x,y) \mid x^2+y^2\neq0\}$

测试要点7

[4A]集合 $A=\{x \mid x^2+x+1=0\}$，$B=\{x\in\mathbf{N} \mid x(x^2+6x+10)=0\}$，$C=\{x\in\mathbf{Q} \mid 4x+5<0\}$，$D=\{x \mid x$ 为小于 2 的质数$\}$，其中是空集的有(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

测试要点3

[5B]方程组 $\begin{cases}x+y=1,\\y+z=2,\\z+x=3\end{cases}$ 的解集为(　　).

测试要点6、7、8、10

A. $(1,0,2)$　　B. $\{1,0,2\}$　　C. $\{(1,0,2)\}$　　D. $\{(x,y,z)|1,2,3\}$

[6A]设 a,b,c 为非零实数,则 $M=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 的所有值组成的集合为(　　). 测试要点7

A. $\{4\}$　　B. $\{0\}$　　C. $\{-4\}$　　D. $\{4,0,-4\}$

[7A]已知集合 $A=\{0,1,-1,2,-2,3\}$,$B=\{y|y=x^2-1,x\in A\}$,则 $B=$________. 测试要点1,6

[8B]用描述法表示图1-1-2中阴影部分(含边界)的点的集合________. 测试要点7

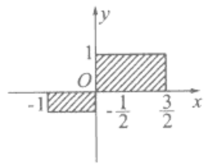


图1-1-2

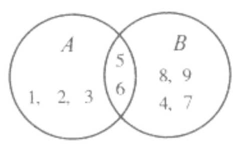


图1-1-3

[9A]已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{N}\,\middle|\,\frac{12}{6-x}\in\mathbf{N}\right\}$,用列举法表示集合 $A=$________. 测试要点2,6

[10A]如图1-1-3,集合 A 和 B 中所有元素构成的集合 $C=$________. 测试要点6

[11B]说明集合 $A=\{x|y=x^2+1\}$,$B=\{y|y=x^2+1\}$,$C=\{(x,y)|y=x^2+1\}$ 的区别. 测试要点8,11

[12B]已知集合 $A=\{x|x=m+n\sqrt{2},m,n\in\mathbf{Z}\}$. 测试要点9

(1)证明任何整数都是 A 的元素;

(2)设 $x_1,x_2\in A$,求证:$x_1\cdot x_2\in A$.

[13C]设元素为正整数的集合 A 满足"若 $x\in A$,则 $10-x\in A$". 测试要点8,9,11

(1)试写出只有一个元素的集合 A;

(2)试写出只有两个元素的集合 A;

(3)这样的集合 A 至多有多少个元素?

教材课后习题解答

课本第7页练习

1. (1)$\{-1\}$;(2)$\{1,3,5,15\}$;(3)$\{2,4,6,8,10\}$.

评注:本题考查数学基础知识和列举法表示集合.

2. (1)$\{x|x$ 是奇数$\}$;(2)$\{x|x$ 是正偶数$\}$;(3)$\{x|x^2+1\leq 0\}$.

评注:本题考查集合的描述法表示.

3. (1)$\in$　$\notin$　$\in$　$\notin$　$\in$　$\in$　$\in$　$\in$

(2)$\in$　$\notin$　(3)$\in$　$\notin$　(4)$\notin$　$\notin$

评注:本题考查元素与集合的关系.

4. (1)$\{0,1,2,3,4\}$;(2)$\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)\}$;(3)$\{m,a,t,h,e,i,c,s\}$.

评注:本题考查集合的列举法表示,注意集合中元素的互异性.

最新5年高考名题诠解

1. (2006年湖北,文1) 集合 $P=\{x|x^2-16<0\}$,$Q=\{x|x=2n,n\in Z\}$,则由 P 和 Q 的公共元素构成的集合为(　　).

A. $\{-2,2\}$　　B. $\{-2,2,-4,4\}$

C. $\{-2,0,2\}$　　D. $\{-2,2,0,-4,4\}$

[解析] $P=\{x|x^2-16<0\}=\{x|-4<x<4\}$,$Q$ 为偶数.

$\therefore P$ 与 Q 的公共元素为 $-2,0,2$.

[答案] C

2. (2005年湖北) 设 P,Q 为两个非空实数集合,定义集合 $P+Q=\{x|x=a+b,a\in P,b\in Q\}$. 若 $P=\{0,2,5\}$,$Q=\{1,2,6\}$,则 $P+Q$ 中元素的个数是(　　).

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

[解析] 列举法 $P+Q=\{1,2,3,4,6,7,8,11\}$.

[答案] B

[点评] 此题笔者作了修改,原考题中 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$. 笔者觉得这种表达不够清楚,因为"0+1"与"1+0"并不是同一元素,"2+5"与"1+6"也不能说是同一元素,也就是说 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$ 中的元素是式而不是数.

3. (2004年江苏) 设集合 $P=\{1,2,3,4\}$,$Q=\{x||x|\leq 2,x\in$

$\mathbf{R}\}$,则由 P 与 Q 的公共元素组成的集合为( ).

A. $\{1,2\}$ B. $\{3,4\}$

C. $\{1\}$ D. $\{-2,-1,0,1,2\}$

[解析] $\because Q=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$, $\therefore P$ 与 Q 的公共元素组成的集合为 $\{1,2\}$.

[答案] A

4. (**2002年深圳市**)下面几种表示法:① $\{x=-1,y=2\}$;② $\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x=-1,\\y=2\end{cases}\right\}$;③ $\{-1,2\}$;④ $(-1,2)$;⑤ $\{(-1,2)\}$;⑥ $\{x,y|x=-1,或y=2\}$. 能正确表示方程组 $\begin{cases}2x+y=0,\\x-y+3=0\end{cases}$ 的解集的是( ).

A. ①②③④⑤⑥ B. ②③④⑤

C. ②⑤ D. ②⑤⑥

[解析] 方程组解集中的元素是有序实数对,所以①③④⑥均错.

[答案] C

数学小常识

罗素悖论

一天,萨维尔村理发师挂出一块招牌:"村里所有不自己理发的男人都由我给他们理发,我也只给这些人理发."于是有人问他:"您的头发由谁理呢?"理发师顿时哑口无言.

因为,如果他给自己理发,那么他就属于自己给自己理发的那类人.但是,招牌上说明他不给这类人理发,因此他不能自己理.如果由另外一个人给他理发,他就是不给自己理发的人,而招牌上明明说他要给所有不自己理发的男人理发,因此,他应该自己理.由此可见,不管怎样的推论,理发师所说的话总是自相矛盾的.

这是一个著名的悖论,称为"罗素悖论".这是由英国哲学家罗素提出来的,他把关于集合论的一个著名悖论用故事通俗地表述出来.

1874年,德国数学家康托尔创立了集合论,很快渗透到大部分数学分支,成为它们的基础.到19世纪末,全部数学几乎都建立在集合论的基础之上了.就在这时,集合论中接连出现了一些自相矛盾的结果,特别是1902年罗素提出的理发师故事反映的悖论,它极为简单、明确、通俗.于是,数学的基础被动摇了,这就是所谓的第三次"数学危机".

此后,为了克服这些悖论,数学家们做了大量的研究工作,由此产生了大量的新成果,也带来了数学观念的革命.

1.2 子集、全集、补集

知识·能力聚焦

1. 子集

如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 为集合 B 的子集(若 $a\in A$ 则 $a\in B$)，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作“集合 A 包含于集合 B”或“集合 B 包含集合 A”，例如：

$$\{0,2,4,6,\cdots\}\subseteq \mathbf{N},\mathbf{N}\subseteq \mathbf{R}.$$

需要注意的几点：

(1)当集合 A 中至少有一个元素不属于 B(或者说集合 A 中存在一个元素不属于 B)时，我们就说集合 A 不包含于集合 B(即 A 不是 B 的子集)，记作 $A\not\subseteq B$，读作“集合 A 不包含于集合 B”或“集合 B 不包含集合 A”. A 不是 B 的子集有如下两种情况.

图 1-2-1

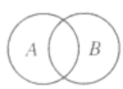


图 1-2-2

情况1(如图1-2-1)是 A 与 B 没有公共元素；情况2(如图1-2-2)是 A 与 B 有公共元素，但 A 中存在不属于 B 的元素.

(2)任何一个集合是它本身的子集，这是因为：对于任何一个集合 A，它的任意一个元素都属于集合 A 本身. 记作 $A\subseteq A$.

(3) $A\subseteq B$ 可以用 Venn 图来表示，如图 1-2-3 所示.

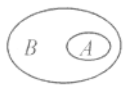


图 1-2-3

(4)对于空集 $\varnothing$，我们规定 $\varnothing\subseteq A$，即空集是任何集合的子集.

(5)对于集合 A,B,C，如果 $A\subseteq B,B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$. 事实上，设 x 是集合 A 的任意一个元素，因为 $A\subseteq B$，所以 $x\in B$，又因为 $B\subseteq C$，所以 $x\in C$，从而 $A\subseteq C$.

2. 集合相等

如果两个集合所含的元素完全相同(即 A 中的元素都是 B 中的元素，B 中的元素也都是 A 中的元素)，则称这两个集合相等，记作 $A=B$，读作“集合 A 等于集合 B”.

对于集合 A,B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么 $A=B$. 这是因为：由 $A\subseteq B$ 可知，集合 A 的元素都是集合 B 的元素；又由 $B\subseteq A$ 知，集合 B 的元素也都是集合 A 的元素. 这就是说，集合 A 和集合 B 的元素是完全相同的，因而说 A 与 B 是相等的集合.

3. 真子集

如果 $A\subseteq B$，并且 $A\neq B$，这时集合 A 称为集合 B 的真子集，记为 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$. 读作“A 真包含于 B”或“B 真包含 A”. 例如：$\{a\}\subsetneqq\{a,b\}$.

需要注意的几点：

名师诠释

◈ [考题1] 下列说法正确的是(　　).

A. 若集合 A 不是集合 B 的子集，则 A 中的元素都不属于 B

B. 若集合 A 是集合 B 的子集，则 B 中一定有不属于 A 的元素

C. 空集没有子集

D. 若集合 A 是集合 B 的子集，则 A 中的元素都属于 B

[解析] A 项错，A 不是 B 的子集，但 A 中也可能有 B 的元素. 例如：$A=\{1,2,3\},B=\{2,3,4,5\},A\not\subseteq B$，但 A 中有属于 B 的元素. B 项错，集合 A 等于集合 B. C 项错，空集是它自己的子集.

[答案] D

◈ [考题2] 写出集合 $\{a,b,c\}$ 的所有子集.

[解析] 按子集的元素个数的多少分别写出所有子集，这样才能达到不重复、无遗漏，同时还要注意两个特殊子集：$\varnothing$ 和本身.

[答案] 子集有 $\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$.

◈ [考题3] 设集合 $A=\{1,2\}$，集合 $B=\{x|x\subseteq A\}$，用列举法写出 B，并指出集合 A 与集合 B 的关系.

[解析] 集合 B 的元素是集合 A 的子集，问题归结为写出集合 A 的所有子集.

[答案] $\because A$ 的子集为 $\{1\},\{2\},\{1,2\},\varnothing$，

$\therefore B=\{x|x\subseteq A\}=\left\{\{1\},\{2\},\{1,2\},\varnothing\right\}$.

$\therefore$ 集合 A 是集合 B 的一个元素，$\therefore A$ 与 B 的关系是 $A\in B$.

[点评] 以集合为元素组成新的集合，说明了集合的元素呈多样性. 你能在身边找到这样的实例来解释这一点吗？(例如：班上的学生组成一个班，再以班为元素组成一个年级)

此题若写成 $A\subseteq B$ 就错了，因为 A 中的元素 1,2 不是集合 B 中的元素，所以 A 不是 B 的子集，事实上 A 只是集合 B 的一个元素.

◈ [考题4] 已知集合 $M=\{x|x=a^2+1,a\in\mathbf{N}\}$，集合 $P=\{y|y=b^2+2b+2,b\in\mathbf{N}\}$. 试问：$M$ 与 P 相等吗？

[解析] 设 $y\in P$，则 $y=b^2+2b+2=(b+1)^2+1$.

$\because b\in\mathbf{N},\therefore b+1\in\mathbf{N},\therefore y\in M$，故 $P\subseteq M$.

当 $a=0$ 时，$x=1,\therefore 1\in M$. 而 $y=b^2+2b+2=(b+1)^2+1$，

$\because b\in\mathbf{N},\therefore b\geqslant 0,\therefore y\geqslant 2$.

$\therefore 1\notin P$，故 $M\not\subseteq P$. 综上所述 $M\neq P$.

[答案] $M\neq P$

[点评] 证明 $M\not\subseteq P$，只要在 M 中找到一个不属于 P 的元素即可.

◈ [考题5] 已知集合 $A=\{x|y=x^2-2x+1\},B=\{y|y=x^2-2x+1\},C=\{x|x^2-2x+1=0\},D=\{x|x^2-2x+1<0\},E=\{(x,y)|y=x^2-2x+1\},F=\{(x,y)|x^2-2x+1=0,y\in\mathbf{R}\}$，则下面的结论正确的是(　　).

A. $A\subseteq B\subseteq C\subseteq D$　　　B. $D\subsetneqq C\subsetneqq B\subsetneqq A$

C. $C=F$　　　D. $A=B$

[解析] 给出的六个集合的元素特征均与 x^2-2x+1 有关，要注意区分.