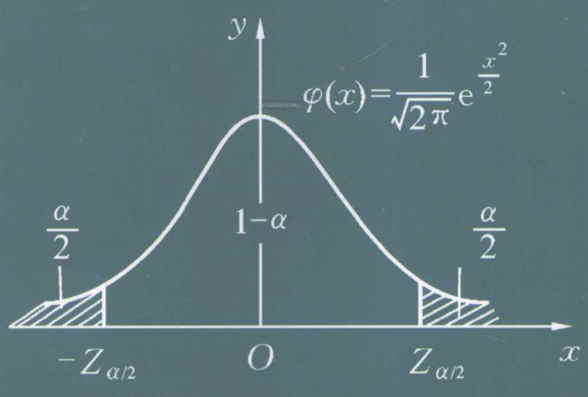
新编高等院校公共基础课系列规划教材

概率论与数理统计

Gailülun Yu Shuli Tongji

阚兴莉 贺 勇 主编



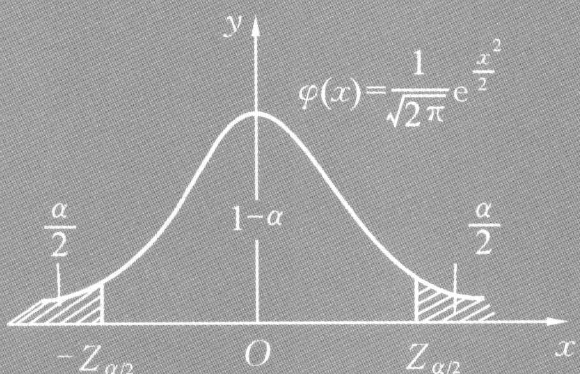
华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

新编高等院校公共基础课系列规划教材

概率论与数理统计

Gailülun Yu Shuli Tongji

主　编　阚兴莉　贺　勇
副主编　徐梦全
编　者　汪福宝　孙清华　黄象鼎



华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/阚兴莉　贺　勇　主编. —武汉：华中科技大学出版社，2009年2月

ISBN 978-7-5609-4563-7

Ⅰ.概…　Ⅱ.①阚…　②贺…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教材　②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第074180号

概率论与数理统计　　阚兴莉　贺　勇　主编

策划编辑：谢　荣

责任编辑：史永霞　　封面设计：杨　玲

责任校对：张　琳　　责任监印：周治超

出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山　邮编：430074　电话：(027)87557437

录　　排：武汉星明图文制作有限公司

印　　刷：华中科技大学印刷厂

开本：787mm×960mm　1/16　　印张：14.5　　字数：313 000

版次：2009年2月第1版　　印次：2009年2月第1次印刷　　定价：25.00元

ISBN 978-7-5609-4563-7/O·447

新编高等院校公共基础课系列规划教材编委会成员名单

（以下按拼音第一个字母的先后顺序排列）

内容简介

本书是根据编者多年的教学实践，结合《概率论与数理统计课程基本要求》编写而成.

全书分为八章，主要内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验.

本书结构严谨，逻辑清晰，注重应用，例题丰富，叙述简明，可供高等院校工科和其他非数学类专业的学生使用，也适用于学时少或多层次办学的概率论与数理统计课程的教学.

前 言

概率论与数理统计是高等院校工科、理科及经管类专业的一门十分重要的基础课程.这不仅是因为它在各个领域中的应用具有广泛性,而且从人才素质的全面培养来说,这门课程也是必不可少的.

为此,我们在吸收国内外同类教材优点的基础上,结合自己多年丰富的教学经验,并根据教育部"概率论与数理统计教学基本要求",同时也考虑到当前高校教学改革的需要,编写了这本突出应用性特点的教材.本书具有以下几个特色.

第一,突出概率论与数理统计的基本思想和基本方法.突出基本思想和基本方法的目的在于,让学生在学习过程中较好地了解各部分内容的内在联系,从总体上把握概率论与数理统计的思想方法;帮助学生掌握基本概念,理解概念之间的联系,提高教学效果.本书在教学理念上不过分强调理论的严密论证和研究过程,而更多地是让学生体会概率论与数理统计的本质及其价值.

第二,加强基本能力培养.本书的例题、习题较多,在解题方法上有较深入地论述,其用意就是让学生在掌握基本概念的基础上,熟悉运用过程,精通解题技巧,最后达到加快运算速度、提高解题能力的目的.

第三,贴近工程实际应用.本书基本概念的叙述,力求从身边的实际问题出发,自然地引出.例题和习题多采用一些在客观世界,即自然科学、工程技术领域、经济管理领域和日常生活中经常遇到的现实问题,希望以此来提高学生学习概率论与数理统计的兴趣和利用概率论与数理统计知识解决实际问题的能力.

本书由阚兴莉、贺勇任主编.具体编写分工如下:第 1、2、3 章由武汉大学东湖分校的贺勇编写,第 4、5 章由武汉工业学院工商学院的徐梦全编写,第 6、7、8 章由湖北工业大学商贸学院的阚兴莉编写.最后由阚兴莉负责统稿.在本书编写的过程中,汪福宝、孙清华、黄象鼎等同志也参与了编审工作,在此感谢他们为本书所付出的劳动,同时华中科技大学出版社的领导、编辑们对本书的编辑和出版给予了大力支持和热情帮助,编者在此对他们表示衷心地感谢.

由于编者水平有限,加之编写时间较仓促,书中难免有错漏和不当之处,敬请专家、同行及读者批评指正,使本书在教学实践中不断完善.

编　者

2008 年 8 月

目　　录

第1章　随机事件与概率

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门数学学科，已被广泛应用于自然科学、社会科学、工程技术、经济管理、生物等领域. 本章介绍了概率论中的基本概念、随机事件的基本关系与基本运算，以及概率的性质及其计算方法.

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机现象

自然界和社会中发生的现象多种多样，从它们发生的必然性的角度来区分，可以分为两类：一类是确定性现象，另一类是随机现象.

所谓确定性现象，是指在一定条件下必然发生或必然不发生的现象. 例如：带同种电荷的两个小球必互相排斥，带异种电荷的两个小球必互相吸引；在一个标准大气压下，纯净的水加热到100℃必然会沸腾；一个口袋中装了十个完全相同的白球，从中任取一个必为白球；向上抛一枚硬币必然下落，等等，这些都是确定性现象. 这些现象的一个共同特点是事先可以判断其结果.

所谓随机现象，是指在一定条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果. 例如：在相同条件下抛掷一枚硬币，落下以后可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且每次抛掷前无法肯定出现哪一种结果；在同等条件下，掷一枚骰子可能出现6种结果，但事先不能断定会出现哪种结果；从10件产品（其中2件次品，8件正品）中，任取一件，可能是正品，也可能是次品，等等，这些都是随机现象. 这类现象的一个共同特点是，事先不知道多种可能结果中究竟会出现哪一种，但在大量重复试验中其结果又具有统计规律性.

1.1.2　随机试验与样本空间

为了叙述方便，我们常把对某种现象进行的观察或实验，统称为试验.

下面是一些试验的例子.

E_1：掷一枚骰子，观察出现的点数.

E_2：观察某交通路口某时段机动车的流量.

E_3：已知某物件长度在a和b之间，测量其长度.

E_4：在一批灯泡中任意抽取一个，测试其使用寿命.

E_5：向一个直径为50 cm的靶子射击，观察子弹着靶点的位置.

对于上面列举的五个试验，它们有着共同的特点：

(1) 在相同条件下可重复进行；

(2) 试验的所有可能结果预先是可知的且结果不止一个；

(3) 每次试验会出现什么结果是事先无法预知的.

在概率论中，将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**，简称**试验**，通常用 E 表示.

对于随机试验，我们首先关心的是它可能出现的结果有哪些. 我们称试验 E 的每一个可能结果为一个**样本点**，用字母 ω 表示，而把试验所有可能结果的集合称为**样本空间**，记为 Ω. 换句话说，样本空间就是样本点的全体构成的集合，样本空间中的元素就是随机试验的每个结果.

在前面列举的五个试验中，若以 Ω_i 表示试验 E_i 的样本空间，$i=1,2,3,4,5$，则

$\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$

$\Omega_2=\{0,1,2,3,\cdots\}$

$\Omega_3=\{l \mid a\leqslant l\leqslant b\}$

$\Omega_4=\{t \mid t\geqslant 0\}$

$\Omega_5=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant 25^2\}$

注意 样本空间中的元素是由实验目的所确定的，可以是数量性质的，也可以是属性性质的；样本空间中所含样本点的个数可以是有限多个，也可以是无限多个；另外，样本点应是随机试验中最基本且不可再分的结果.

1.1.3 随机事件的概念

在一定条件下进行的随机试验所观察到的每一种可能的结果称为**随机事件**，简称**事件**，常用大写字母 A、B、$C\cdots$ 表示. 实际上，在建立了样本空间后，随机事件可以用样本空间的子集来表示，它是由试验的某些可能结果构成的集合. 特别地，如果一个随机事件只含有一个试验结果，则称此事件为**基本事件**.

例 1.1 掷一枚骰子，用 $A_1=\{1\}$，$A_2=\{2\}$，$\cdots$，$A_6=\{6\}$ 分别表示所掷的结果为"一点"到"六点"，B 表示"出现奇数点"，C 表示"出现四点或四点以上". 这里 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 都是基本事件，事件 B 和 C 还可用样本点的集合形式表示，即 $B=\{1,3,5\}$，$C=\{4,5,6\}$，它们都是样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的子集.

显然，每次试验有且只有一个含在样本空间中的试验结果发生，在试验中，当事件中的一个样本点出现时，称这一事件发生. 例如在例 1.1 中，当投掷的结果为"四点"时，事件 A_4 和 C 均发生.

由于样本空间 Ω 包含了所有的样本点，且是自身的一个子集，在每次试验中它总发生，所以称 Ω 为必然事件；空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也是样本空间的一个子集，且在每次试验中总不发生，所以称 $\varnothing$ 为不可能事件. 例如在例 1.1 中，事件"掷出的点数不超过六点"就是必然事件，事件"掷出的点数大于六点"就是不可能事件.

注意 必然事件和不可能事件是随机事件的特例，尽管它们本身已无随机性可言，但在概率论中起着重要作用.

1.1.4 随机事件的关系与运算

为了研究随机事件及其概率，就需要说明事件之间的各种关系及其运算.

概率论的出现，是始于集合论之前的事情. 从本质上说，事件就是集合，事件间的关系与运算就是集合的关系与运算. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并根据“事件发生”的含义，给出它们在概率论中的含义.

(1) 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A \subset B$.

(2) 若事件 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，也就是说，事件 A 与 B 中任一事件发生必然导致另一事件发生，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A = B$.

(3)“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”，这一事件叫做事件 A 与事件 B 的并事件，记为 $A \cup B$，即 $A \cup B = \{A、B$ 中至少有一个发生$\}$.

“几个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个事件发生”，这一事件叫做事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并事件，记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$(简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$)，即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \{A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生$\}$.

(4)“事件 A 与事件 B 同时发生”，这一事件叫做事件 A 与事件 B 的交事件(积事件)，记为 $A \cap B$ 或 AB，即 $AB = \{A、B$ 同时发生$\}$.

“n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”，这一事件叫做事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交事件，记为 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $A_1 A_2 \cdots A_n$(简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$)，即 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \{A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生$\}$.

(5)“事件 A 发生，事件 B 不发生”，这一事件叫做事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A - B$，即 $A - B = \{A$ 发生，B 不发生$\}$.

(6) 若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的(或互斥的)，通常把两个互不相容事件 A 与 B 的并，记作 $A + B$.

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件不能同时发生，即 $A_i A_j = \varnothing (1 \leqslant i < j \leqslant n)$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互不相容的(或互斥的)，通常把 n 个互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并，记作 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$(简记为 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$).

(7) 如果两事件 A 与 B 是互不相容的，并且事件 A 与 B 中有且仅有一个发生，即 $AB = \varnothing$ 且 $A \cup B = \Omega$，则称事件 A 与事件 B 是对立的(或互补的)，又称事件 A 与事件 B 互为对立事件，记为 $B = \overline{A}$ 或 $A = \overline{B}$.

注意 (1) 对于任意事件 A，我们有

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad A\overline{A} = \varnothing, \quad A \cup \overline{A} = \Omega;$$

(2) 因为 $\{A$ 发生，B 不发生$\} = A\overline{B}$，所以 $A - B = A\overline{B} = A - AB$；

(3) 若 A 与 B 互为对立事件,则 A 与 B 互不相容,但反之不成立.

与集合性质类似,事件的运算具有以下性质. 对任意事件 A、B、C,有:

(1) **交换律** $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

(2) **结合律** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(3) **分配律** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(4) **对偶律(也称为德莫根(De Morgen)定律)**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

对偶律可以推广到更多事件的情形,对于任意的 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,有:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n;$$

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \cdots \cup \overline{A}_n.$$

在讨论实际问题时,往往需要把某些复杂的事件表示为若干简单事件的并或交,要实现这一点,除了正确理解事件的关系与运算外,还必须具体问题具体分析.

例 1.2 有两门火炮同时向一架飞机射击,考察事件 $A = \{$击落飞机$\}$,依常识,"击落飞机"等价于"击中驾驶员"或者"同时击中两个发动机",因此 A 是一个较复杂的事件,如记 $B_i = \{$击中第 i 个发动机$\}$, $i = 1, 2$, $C = \{$击中驾驶员$\}$,相对于 A 而言, B_1, B_2 及 C 都较简单,则事件 A 可用事件 B_1, B_2 及 C 来表示,即 $A = B_1B_2 \cup C$,而"未击落飞机"可表示为 $\overline{A}$,于是有

$$\overline{A} = \overline{B_1B_2 \cup C} = \overline{B_1B_2} \cap \overline{C} = (\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2) \cap \overline{C} = (\overline{B}_1 \cap \overline{C}) \cup (\overline{B}_2 \cap \overline{C})$$

$= \{$发动机 1,2 至少有一个未被击中且未击中驾驶员$\}$.

例 1.3 一批产品中有合格品和废品,从中有放回地抽取三个产品,设 A_i 表示事件"第 i 次抽到废品",试用 A_i 的运算表示下列各个事件:

(1) 第一次、第二次中至少有一次抽到废品;

(2) 只有第一次抽到废品;

(3) 三次都抽到废品;

(4) 至少有一次抽到合格品;

(5) 只有两次抽到废品.

解 (1) $A_1 \cup A_2$; (2) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$; (3) $A_1A_2A_3$;

(4) $\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$; (5) $A_1A_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3 \cup \overline{A}_1A_2A_3$.

习题 1.1

1. 用集合的形式写出下列随机试验的样本空间与随机事件 A:

(1) 将一枚均匀硬币相继投抛两次,观察出现的面,事件 $A = \{$两次出现的面相同$\}$;

(2) 观察某交通路口某时段机动车的流量,事件 $A = \{$通过的机动车的辆数不超过 5 辆$\}$;

(3) 从一批灯泡中随机抽取一只，记录其使用寿命(单位:h)，事件 $A=\{$寿命在 1 000 h 到 2 000h 之间$\}$.

2. 袋中有 10 个球，分别编号为 1 至 10 号，从中任取一球，设 $A=\{$取得的球的号码是偶数$\}$，$B=\{$取得的球的号码是奇数$\}$，$C=\{$取得的球的号码小于 5$\}$. 问下列运算表示什么事件:

$A\cup B$；AB；AC；$\overline{AC}$；$\overline{A}\overline{C}$；$\overline{B\cup C}$；$A-C$.

3. 设 A、B、C 为三事件，用 A、B、C 的运算关系表示下列事件:

(1)A 发生，且 B 与 C 不发生；

(2)A 与 B 都发生，而 C 不发生；

(3)A、B、C 中至少有一个发生；

(4)A、B、C 都发生；

(5)A、B、C 都不发生；

(6)A、B、C 中不多于一个发生；

(7)A、B、C 中不多于两个发生；

(8)A、B、C 中至少有两个发生.

4. 指出下列关系中哪些成立，哪些不成立:

(1)$A\cup B=(A\overline{B})\cup B$；

(2)$\overline{A}\cap B=A\cup B$；

(3)$(\overline{A\cup B})\cap C=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$；

(4)$(AB)\cap(A\overline{B})=\varnothing$；

(5) 若 $A\subset B$，则 $A=AB$；

(6) 若 $A\subset B$，则 $\overline{B}\subset\overline{A}$；

(7) 若 $AB=\varnothing$，且 $C\subset A$，则 $BC=\varnothing$；

(8) 若 $B\subset A$，则 $A\cup B=A$.

5. 问事件“A、B 至少有一个发生”与“A、B 至多发生一个”是否为对立事件?

6. 设 A、B 为两个随机事件，试用事件的关系与运算证明:

(1)$B=AB\cup\overline{A}B$，且 AB 与 $\overline{A}B$ 互不相容；

(2)$A\cup B=A\cup\overline{A}B$，且 A 与 $\overline{A}B$ 互不相容.

7. 设 Ω 为随机试验的样本空间，A、B 为随机事件，且 $\Omega=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5\}$，$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，试求 $A\cup B$，AB，$B-A$，$\overline{A}$.

1.2 随机事件的概率

1.2.1 频率与概率的统计定义

对于一个事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 我们常常希望知道某

些事件在一次试验中发生的可能性大小,并希望寻求一个合适的数来度量这种可能性的大小.对于事件 A,这个数通常记为 $P(A)$,称为事件 A 在一次试验中发生的**概率**.当然这是概率的通俗含义,还不能作为概率的正式定义.在正式给出概率定义之前,首先介绍频率的概念.

定义 1.1 设 A 是一个事件,在相同条件下,独立重复进行 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生了 m 次,则称 m 为事件 A 在 n 次试验中发生的**频数**,称 m 与 n 的比值 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**,记为 $f_n(A)$.

由定义不难验证频率具有如下性质.

性质 1 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$.

性质 2 $f_n(\Omega) = 1, f_n(\varnothing) = 0$.

性质 3 若事件 A 与 B 互斥,即 $AB = \varnothing$,则

$$f_n(A+B) = f_n(A) + f_n(B).$$

性质 3 还可以推广到 n 个事件两两互斥的情形,即设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥,则

$$f_n\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} f_n(A_i).$$

由于事件 A 在 n 次试验中发生的频率是它发生的次数与总试验次数之比,其大小表示 A 发生的频繁程度.频率越大,事件 A 发生得越频繁,这就意味着 A 在一次试验中发生的可能性越大.因此,直观的想法是用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性大小.但这是否合理呢?先看下面的例子.

例 1.4 考虑"抛硬币"试验.历史上有不少统计学家,例如皮尔逊(Pearson)等人,做过成千上万次试验.若规定"硬币的正面朝上"为事件 A,其试验记录如下:

试验者	抛掷硬币次数 n	正面朝上次数 m	频率 $f_n(A)$
蒲丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
费歇尔(Fisher)	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊(Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊(Pearson)	24 000	12 012	0.500 5

可以看出,当抛掷硬币的次数 n 较大时,频率 $f_n(A)$ 总在常数 0.5 附近波动,并且呈现出逐渐稳定于 0.5 的倾向.这说明随机事件在大量重复试验中存在某种客观规律性 —— 频率的稳定性,频率的这种"稳定性"就是所谓的统计规律性.这里的常数 $p = 0.5$ 称为频率 $f_n(A)$ 的稳定值,它能反映事件 A 发生的可能性大小.

由随机事件的频率的稳定性可以看出,随机事件发生的可能性大小可以用一个数表示,这个刻画随机事件 A 在试验中发生的可能性大小的、介于 0 与 1 之间的数称为事件 A

的概率,记作 $P(A)$. 概率的这个定义称为概率的统计定义.

概率的统计定义非常直观,但在理论上的不严密性也是比较明显的,它实际上也没有具体提供计算事件概率的方法,因而不可能依据这一定义确切地给出任何一个事件的概率. 但这一定义仍有其重要意义,表现在两个方面. 其一是提供了估计概率的方法,即近似计算随机事件概率的方法:把多次重复试验中随机事件的频率作为事件 A 的概率 $P(A)$ 的近似值,即当试验次数 n 充分大时,

$$P(A) \approx f_n(A) = \frac{m}{n}.$$

其二是提供了一种检验理论正确与否的标准. 例如,根据某一理论或假定算出了某事件 A 的概率 $P(A)$,是否符合实际,我们可以付诸实践. 进行大量重复试验观察事件 A 的频率 $f_n(A)$,看 $f_n(A)$ 是否与 P 接近,若当两者相差较远,则可以认为这一理论与假设可能有误. 这一问题将在本书统计部分加以讨论.

由频率的三条性质可知,作为频率稳定值的概率有如下性质:

性质 1 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$(非负性);

性质 2 $P(\Omega) = 1$(规范性),$P(\varnothing) = 0$;

性质 3 若 $AB = \varnothing$,则 $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

性质 3 可以推广到两两互斥的 n 个事件的情形,即设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥,则

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

虽然概率的统计定义有它的简便之处,但若试验具有破坏性,则不可能进行大量的重复试验时,就限制了它的应用. 而对某些特殊类型的随机试验,要确定事件的概率,并不需要重复试验,而是根据人类长期积累的经验,提出数学模型,直接计算出来,从而给出概率相应的定义,这类试验称为等可能概型试验. 根据样本空间 Ω 是有限集还是无限集,可将相应的数学模型分为古典概型和几何概型.

1.2.2 概率的古典定义

1. 古典型随机试验

定义 1.2 若试验具有以下两个特征:

(1) 试验的结果为有限个,即 $\Omega = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$(有限性);

(2) 每个结果发生的可能性相同,即 $P(\{w_i\}) = \dfrac{1}{n}, i = 1, 2, \cdots, n$(等可能性),

则称此试验为古典型随机试验.

2. 概率的古典定义

定义 1.3 设古典型随机试验 E 的样本空间有 n 个样本点,A 为一随机事件,其中所

含样本点数为 m，则事件 A 发生的概率 $P(A)$ 为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{中的样本点数}}{\Omega\text{中的样本点数}}=\frac{A\text{所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}},$$

并把利用上述关系式来讨论事件发生的概率的数学模型称为古典概型.

例 1.5 抛一枚均匀硬币 3 次，设事件 A 为"恰有 1 次出现正面"，事件 B 为"3 次均出现正面"，事件 C 为"至少有 1 次出现正面"，试求 $P(A),P(B),P(C)$.

解 设出现正面用 H 表示，出现反面用 T 表示，则样本空间 $\Omega=\{HHH,THH,HTH,HHT,HTT,THT,TTH,TTT\}$，样本点总数 $n=8$，又因为 $A=\{HTT,THT,TTH\}$，$B=\{HHH\}$，$C=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH\}$，所以 A、B、C 中样本点数分别为 $m_A=3$，$m_B=1$，$m_C=7$，则

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{3}{8},\quad P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{1}{8},\quad P(C)=\frac{m_C}{n}=\frac{7}{8}.$$

一方面，由于计算古典概型中事件的概率时只需求出样本点总数和事件所含样本点数，所以往往不需要写出样本空间的具体内容及事件所含的具体样本点；另一方面，有些问题中样本空间比较复杂，不便于写出. 因此，在计算古典概型中事件的概率时多采用排列组合的方法来计算 n 与 m.

例 1.6 从 10 件产品(其中 3 件次品，7 件正品)中，按以下两种方式随机抽取 3 件产品：

(a) 有放回地抽取，即每次抽取 1 件观测后放回，再从中任取 1 件；

(b) 无放回地抽取，即每次抽取 1 件观测后不放回，再从中任取 1 件.

试分别按两种方式求：

(1) 恰有 2 件次品的概率；

(2) 至多有 1 件次品的概率.

解 先考虑无放回情形. 设 $A=\{$恰有 2 件次品$\}$，$B=\{$至多有 1 件次品$\}$.

因为从 10 件产品中任取 3 件共有 C_{10}^3 种取法，即样本点总数 $n=C_{10}^3$，而事件 A 所含样本点数 $m=C_3^2C_7^1$，所以

$$P(A)=\frac{C_3^2C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{40}.$$

由于抽取的 3 件产品中出现次品的可能情况有四种，即出现 i 件次品，$i=0,1,2,3$，而至多有 1 件次品包含其中两种可能，即出现 i 件次品，$i=0,1$，即事件 B 所含样本点数 $m=C_3^0C_7^3+C_3^1\,C_7^2$，所以

$$P(B)=\frac{C_3^0C_7^3+C_3^1C_7^2}{C_{10}^3}=\frac{49}{60}.$$

再考虑有放回情形. 设 $A_i=\{$恰有 i 件次品$\}(i=0,1,2,3)$，$B=\{$至多有 1 件次品$\}$.

因为从 10 件产品中有放回地取 3 件共有 10^3 种取法，即样本点总数 $n=10^3$，而事件