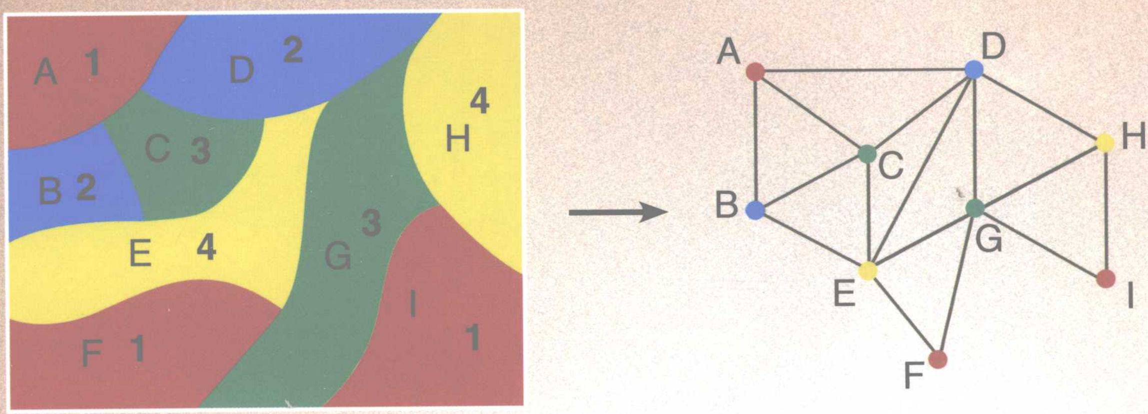
全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学（工科类）

郝　军　张绪绪　主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育"十一五"规划教材

高等数学

（工科类）

郝 军 张绪绪 主 编
马智杰 沈康顿 吉耀武 副主编

高等教育出版社

内容提要

本书是全国高职高专教育"十一五"规划教材，是在充分调研了高职高专院校培养面向生产、建设、服务和管理第一线需要的技能型专门人才的教育现状，认真研究了工科类各专业对高等数学教学内容需求的基础上编写的。主要内容包括一元函数微积分、常微分方程、多元函数微积分、无穷级数、拉普拉斯变换、线性代数、MATLAB软件与数学建模简介等。

本书力求淡化理论，突出数学概念的直观性，强化知识的应用性，注重培养学生用数学概念、数学思想和方法解决实际问题的能力。

本书可作为高职高专以及成人高等教育工科类各专业的高等数学通用教材，也可以作为工程技术人员和数学爱好者的自学教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：工科类 / 郝军，张绪绪主编. —北京：高等教育出版社，2008.8

ISBN 978-7-04-024340-6

Ⅰ.高… Ⅱ.①郝…②张… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第113304号

策划编辑 邓雁城 **责任编辑** 李华英 **封面设计** 张 志 **责任绘图** 宗小梅
版式设计 张 岚 **责任校对** 金 辉 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京七色印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	版　　次	2008年8月第1版
印　　张	15.75	印　　次	2008年8月第1次印刷
字　　数	380 000	定　　价	21.60元

物料号 24340-00

前　言

高职高专教育是我国高等教育体系的重要组成部分。在高等教育大众化发展的新形式下，为适应高职高专教育改革的要求，我们根据教育部高等职业院校的培养目标，依据高职高专《高等数学课程教学基本要求》，在总结多年教学改革经验的基础上，结合高职高专院校工科各专业的特点，以培养学生创新意识和实践能力为目标，“以必需、够用为度”，并兼顾学科体系的特点，编写了本教材。

在编写过程中，为便于教师和学生使用，为学生更好地学习后续专业课程和持续性发展提供数学基础，我们在编写思想、体系安排、内容取舍和处理等方面特别注意了以下几点：

1. 力求用通俗的语言及形象直观的方式引出数学概念，在叙述中尽量采用几何解释、数表、实例，便于对概念、方法的理解，尽量避免理论推导，着力表现解决问题的基本步骤。

2. 淡化理论，突出应用，通过大量的数学模型和数学在工程技术方面的应用实例，突出高等数学的实用性，本书在每章后配备了相应的阅读材料，通过实例，加强对学生应用意识，兴趣、能力的培养。

3. 例题、练习题的配备难易和数量适中，由简到难，层次分明，并在每章后进行知识归纳和总结，强调重点。

4. 为培养学生使用相应数学软件求解数学模型的能力，本书第十章介绍了 MATLAB 软件及其简单应用，便于各校结合实际教学条件灵活处理。

本书由陕西工业职业技术学院郝军、张绪绪担任主编，由马智杰、沈康顿、吉耀武担任副主编。全书框架结构的设计及统稿、定稿工作由郝军承担，张绪绪和吉耀武也参与了定稿工作。参加本书编写的有马智杰（陕西航空职业技术学院，第二章）、沈康顿（陕西国防工业职业技术学院，第三章）、刘宝利（西安航空职业技术学院，第四章）、张广学（陕西纺织服装职业技术学院，第五章）、曹西林（西安铁路职业技术学院，第七章）、马俊（陕西工业职业技术学院，第八章）、刘楠（陕西工业职业技术学院，第十章）、郝军（陕西工业职业技术学院，第一章、第六章、第九章）。

本书的编写和出版得到了高等教育出版社领导和编辑的大力支持和帮助，还广泛参考了国内外教材和书籍，借鉴和吸收其他同行的研究成果，在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，诚恳期望有关专家、同行不吝赐教，诚恳期望广大读者批评指正。

编者

2008 年 6 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

函数是自然现象或工程技术过程中变量依从关系的反映.极限方法是研究变量的一种基本方法,是微积分学的重要工具.本章将在函数有关知识的基础上,讨论函数的极限和函数的连续性等问题.

第一节　函数

一、区间、邻域

（一）区间

区间是用得较多的一类数集.设 a,b 都是实数,且 $a<b$,数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间,记作 $(a,\ b)$,即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\};$$

数集 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

类似地,数集 $\{x \mid a\leqslant x<b\}$ 及数集 $\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 称为半开半闭区间,分别记作 $[a,b)$ 及 $(a,b]$,即

$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\},\quad (a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}.$$

以上这些区间都称为有限区间,a 和 b 称为这些区间的端点,数 $b-a$ 称为这些区间的长度,这些区间在数轴上表示如图 1.1 所示.

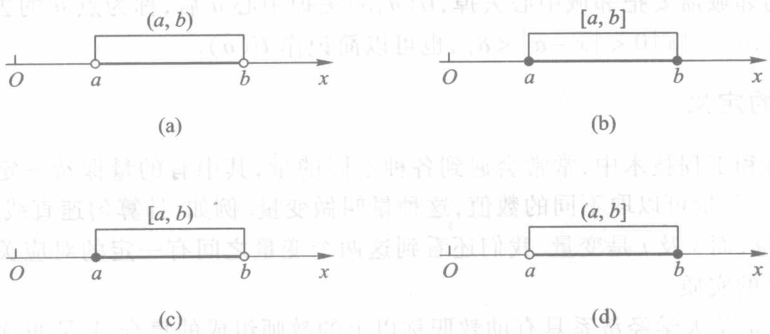


图 1.1

引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则全体实数 **R** 的集合也记作 $(-\infty,+\infty)$，它是无限的开区间. 此外还有一些无限区间表示如下：

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\},\quad (-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}\text{ 为无限的半开区间；}$$

$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x\},\quad (-\infty,b)=\{x\mid x<b\}\text{ 为无限的开区间.}$$

它们在数轴上表示如图 1.2 所示.

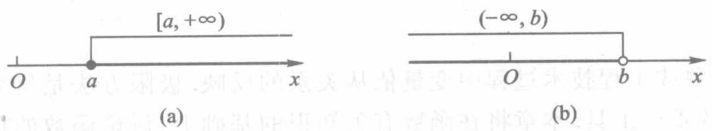


图 1.2

以后在论述时为了方便，常用"区间 I"代表各种类型的区间.

（二）邻域

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

点 a 叫做 $U(a,\delta)$ 的中心，δ 叫做 $U(a,\delta)$ 的半径.

因为 $|x-a|<\delta$ 相当于 $a-\delta<x<a+\delta$，所以

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

由此看出，$U(a,\delta)$ 也就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，这个区间以点 a 为中心，而长度为 2δ（图 1.3）. 可见 $U(a,\delta)$ 也可以表示到定点 a 的距离小于定长 δ 的一切点 x 的全体.

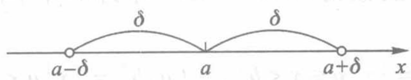


图 1.3

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉，$U(a,\delta)$ 去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $U(\hat{a},\delta)$，即 $U(\hat{a},\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$，也可以简记作 $U(\hat{a})$.

二、函数的定义

在自然科学和工程技术中，常常会遇到各种不同的量，其中有的量保持一定的数值，这种量叫做常量；还有一些量可以取不同的数值，这种量叫做变量. 例如，计算匀速直线运动的位移公式 $s=vt$ 中，v 是常量，而 s 及 t 是变量. 我们还看到这两个变量之间有一定的对应关系，这种对应关系正是函数概念的实质.

例 1 设 X 是某大学经济系具有助教职称以上的教师组成的集合，Y 是职称集，把集合 X 中的每个教师与职称集 Y 中的某一职称建立对应关系（如图 1.4）.

（一）函数的定义

定义 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定

法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量. 当 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$，函数值全体组成的数集 $W=\{y\mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数的值域.

确定函数要有两个要素：定义域与对应法则. 函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，如函数 $y=\varphi(x)$，$y=\psi(x)$，$y=F(x)$ 等.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.

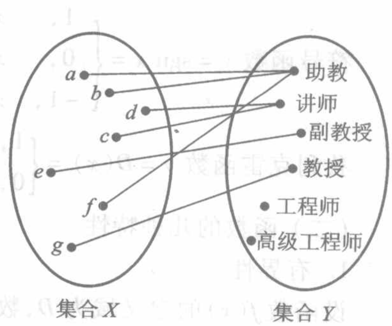


图 1.4

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，这时我们约定：定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值. 例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 D：$[-1,1]$.

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总是只有一个，这种函数叫做单值函数，否则称为多值函数. 以后我们所讨论的函数都为单值函数，简称函数.

下面对几个特殊的函数举例说明.

例 2 取整函数 $y=[x]$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例如，$[\sqrt{2}]=1$，$[-3.5]=-4$. 则函数 $y=[x]$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为全体整数. 它的图形如图 1.5 所示，称为阶梯曲线.

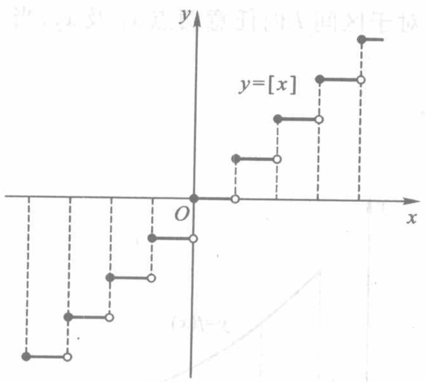


图 1.5

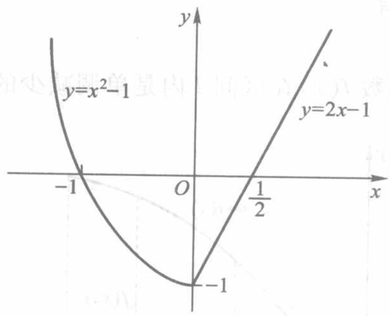


图 1.6

例 3 函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0,\\ x^2-1, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$；当 $x\in(-\infty,0]$ 时，$y=x^2-1$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$y=2x-1$. 如 $-1\in(-\infty,0]$，则 $f(-1)=0$ 而 $1\in(0,+\infty)$，则 $f(1)=1$. 函数图形如图 1.6 所示.

像这种不同范围的对应法则用不同的式子来表示的函数，称为分段函数.

常见的还有

符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0;\end{cases}$

狄利克雷函数 $y=D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数}.\end{cases}$

（二）函数的几种特性

1. 有界性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$，如果存在正数 M，使得与任一 $x \in X$ 所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 内有界；如果这样的 M 不存在，称函数 $f(x)$ 在 X 内无界.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为无论 x 取任何实数，$|\sin x| \leqslant 1$ 都能成立. 而函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立.

2. 单调性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的（图 1.7）；如果对于区间 I 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调减少的（图 1.8）.

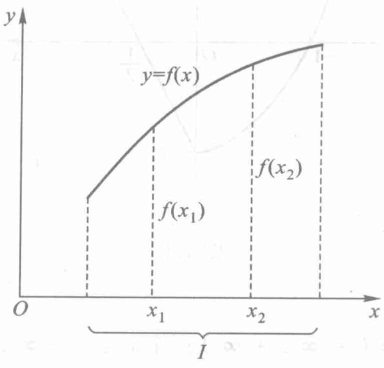


图 1.7

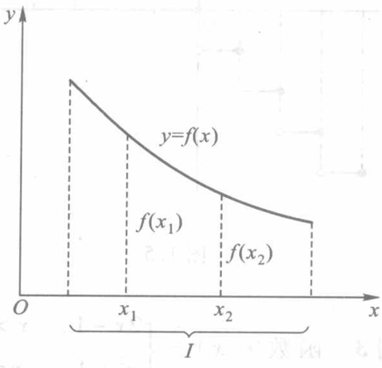


图 1.8

3. 奇偶性.

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x \in D$，

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任一 $x\in D$，

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

奇函数的图像关于原点对称，如图 1.9 所示，偶函数的图像关于 y 轴对称如图 1.10 所示.

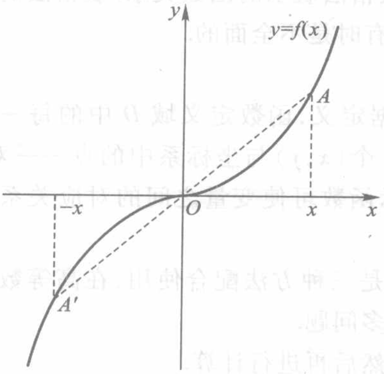


图 1.9

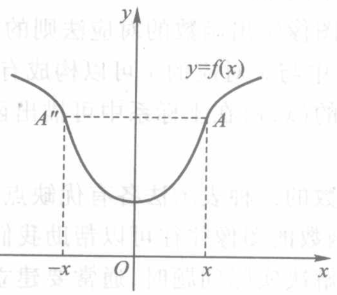


图 1.10

例如，$y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数，$y=\sin x+\cos x$ 既非奇函数也非偶函数.

4. 周期性.

对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的数 l，使得对于定义域内的任何 x 值，$x\pm l$ 仍在定义域内，且关系式

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则 $f(x)$ 叫做周期函数，l 叫做 $f(x)$ 的周期. 通常说周期函数的周期是指其最小正周期. 一个以 l 为周期的函数，它的图像在定义域内每隔长度为 l 的相邻区间上，有相同的形状，如图1.11 所示.

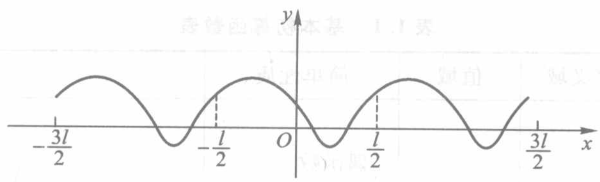


图 1.11

如果函数 $f(x)$ 是周期为 l 的周期函数，则函数 $f(x+a)$ 也是周期为 l 的周期函数，函数 $f(ax)$ 是周期为 $\frac{l}{a}$ 的周期函数. 三角函数为常见的周期函数.

（三）表示函数的三种方法

1. 解析法.

当函数的对应法则借助于数学式子给出时，称这种表示函数的方法为解析法. 高等数学中讨

论的函数，大多由解析法表示，这是由于对解析式子可以进行各种运算，便于理论研究. 用解析法表示函数，不一定用一个式子表示，如分段函数.

2. 表格法.

在实际应用中，常把自变量所取的值和对应的函数值列成表，用以表示函数关系，函数的这种表示法称为表格法. 我们所用的各种数学用表都是用表格法表示的函数关系. 表格法的优点是简单明了，便于应用，但它所给出的变量之间的对应关系有时是不全面的.

3. 图示法.

由图像给出函数的对应法则的方法称为图示法. 根据定义，函数定义域 D 中的每一个 x 及值域 W 中与 x 对应的 y 可以构成有序实数对 (x,y)，每一个 (x,y) 与坐标系中的点一一对应，因此所有的 (x,y) 在坐标系中可描出函数图像. 图示法表示函数可使变量之间的对应关系更具直观性.

函数的三种表示法各有优缺点，在具体应用时，常常是三种方法配合使用，在高等数学的研究中，函数的图像往往可以帮助我们有效地分析、理解很多问题.

在解决实际问题时，通常要建立问题中的函数关系，然后再进行计算.

(四) 初等函数

1. 反函数.

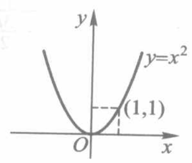
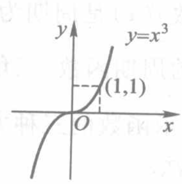
定义 设给定 y 是 x 的函数 $y=f(x)$，如果把 y 当作自变量，x 当作函数，则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\phi(y)$ 称为函数的反函数，而 $y=f(x)$ 称为直接函数. 习惯上总是用 x 表示自变量，而用 y 表示函数，因此，往往把 $x=\phi(y)$ 改写成 $y=\phi(x)$，称为 $y=f(x)$ 的矫形反函数，记作 $y=f^{-1}(x)$. $x=\phi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的直接反函数.

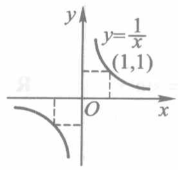
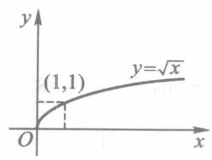
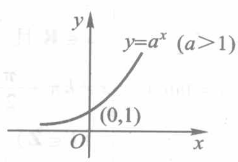
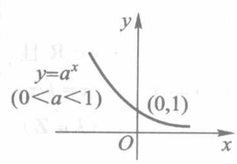
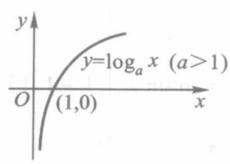
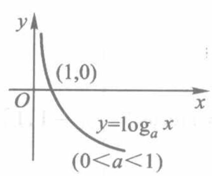
若函数 $y=f(x)$ 在某区间的自变量 x 与函数值 y 一一对应，则 $y=f(x)$ 在此区间一定有反函数 $y=f^{-1}(x)$，且 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

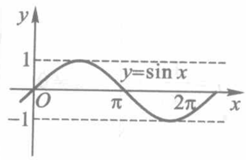
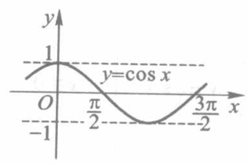
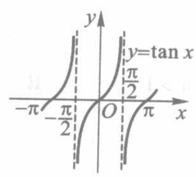
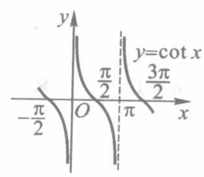
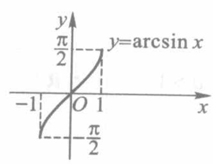
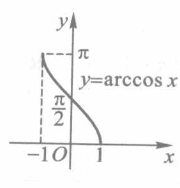
2. 基本初等函数.

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为基本初等函数. 它们的定义域、值域、图像和性质如下表 1.1 所示.

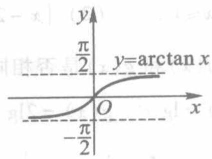
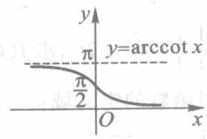
表 1.1 基本初等函数表

函数		定义域	值域	简单性质	图像
幂函数 $y=x^a$	$y=x^2$	**R**	$y\geqslant 0$	偶函数 $x>0$ 时递增 $x<0$ 时递减	
	$y=x^3$	**R**	**R**	奇函数 单调递增	

函数		定义域	值域	简单性质	图像
幂函数 $y=x^a$	$y=\frac{1}{x}$	$x\neq0$	$y\neq0$	奇函数 在区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$分别单调递减	
	$y=\sqrt{x}$	$x\geqslant0$	$y\geqslant0$	非奇非偶 单调递增	
指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$	$a>1$	**R**	$\mathbf{R}^+$	单调递增 过$(0,1)$	
	$0<a<1$	**R**	$\mathbf{R}^+$	单调递减 过$(0,1)$	
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$	$a>1$	$\mathbf{R}^+$	**R**	单调递增 过$(1,0)$	
	$0<a<1$	$\mathbf{R}^+$	**R**	单调递减 过$(1,0)$	

函数		定义域	值域	简单性质	图像
三角函数	$y=\sin x$	**R**	$[-1,1]$	奇函数 有界 周期为 2π	
	$y=\cos x$	**R**	$[-1,1]$	偶函数 有界 周期为 2π	
	$y=\tan x$	$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$	**R**	奇函数 周期为 π	
	$y=\cos x$	$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$	**R**	奇函数 周期为 π	
反三角函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$	奇函数 单调递增 有界	
	$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	单调递减 有界	

续表

函数		定义域	值域	简单性质	图像
反三角函数	$y=\arctan x$	**R**	$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$	奇函数 单调递增 有界	
	$y=\operatorname{arccot} x$	**R**	$(0,\pi)$	单调递减 有界	

3．复合函数．

定义 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，而且当 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域或该定义域的一部分内取值时，所对应的 u 的值使 $y=f(u)$ 有定义，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是 x 的复合函数，其中 $u=\varphi(x)$ 为内函数，$y=f(u)$ 为外函数，u 为中间变量．

注 不是任何两个函数都可以构成一个复合函数，例如，$y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不可能复合成一个复合函数，因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域内的任何 x 值所对应的 u 值都使 $y=\arcsin u$ 没有意义．

对于一个给定的复合函数，必须会分析清楚它的复合过程（即会将复合函数进行分解）．掌握这种分析复合过程的方法，对后面求函数的导数和积分会带来很多方便．

例 4 指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt[4]{1+x^2}$； (2) $y=\cos^2 x$； (3) $y=\mathrm{e}^{\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}}$．

解 (1) $y=\sqrt[4]{1+x^2}$ 是由 $y=\sqrt[4]{u}$ 和 $u=1+x^2$ 复合而成的．

(2) $y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\cos x$ 复合而成的．

(3) $y=\mathrm{e}^{\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\arctan v$ 和 $v=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 复合而成的，说明复合函数也可由两个以上的函数复合而成．

4．初等函数．

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤构成的，并能用一个解析式子表示的函数称为初等函数．

例如，$y=\cos(x^2+2x+3)$ 和 $y=\sqrt{\lg(x^2+1)}+\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ 都是初等函数，而 $y=[x]$ 和 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0,\\ x^2-1, & x\leqslant 0\end{cases}$ 都不是初等函数．

练习题一

1. 用区间表示下列 x 的变化范围,并判断能否用邻域表示,能用邻域表示的再用邻域表示:

(1) $2<x\leqslant 6$;　(2) $|x-2|<\dfrac{1}{10}$;　(3) $|x|>100$;　(4) $0<|x-1|<0.01$.

2. 下列 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$;　(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$.

3. 设 $\varphi(t)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant\dfrac{\pi}{3},\\ |\sin x|, & |x|>\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\dfrac{5\pi}{6}\right),\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

4. 设 $f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{5}{t}+2t^2$,求 $f(t)$ 及 $f(t^2+1)$.

5. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　(2) $y=\arcsin(x-3)$;　(3) $y=\lg(\lg x)$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$,求 $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

7. 写出下列函数的复合过程:

(1) $y=\sqrt{3x+2}$;　(2) $y=(1+\lg x)^5$;

(3) $y=e^{\sin 2x}$;　(4) $y=\arccos(1-x^2)$.

8. 火车站收取行李费的规定如下:当行李不超过 50 kg 时,按基本运费计算,如从上海到某地每千克收 0.15 元. 当超过 50 kg 时,超重部分按每千克 0.25 元收费. 试求上海到该地的行李费 y(元)与重量 x(kg)之间的函数关系式,并画出这函数的图形.

第二节　函数的极限

一、数列的极限

(一) 两个实例

按自然数 1,2,3,… 编号依次排列的一列数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 称为无穷数列,简称数列,记为 $\{x_n\}$. 其中的每个数称为数列的项,x_n 称为通项(一般项). 可以把数列看作自变量是自然数的特殊函数——整标函数,一般用

$$y_n=f(n),\quad n=1,2,3,\cdots$$

表示.

极限概念是在求解某些实际问题逐渐产生的,下面我们通过两个实例加以了解.

1. 割圆术.

我国古代数学家刘徽推算圆面积时,首先作圆的内接正六边形,把它的面积记作 A_1;再作内接正十二边形,其面积记作 A_2;如此循环下去,正 $6\times 2^{n-1}$ 形的面积记作 A_n(图 1.12). 这样就得到一系列内接正多边形的面积 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$.

“割之弥细，所失弥少，割之又割以至于不可割，则与圆合体而无所失矣”. 这就是说：当内接正多边形的边数越大，则内接正多边形的面积越接近圆的面积，即

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots \longrightarrow S_{圆}.$$

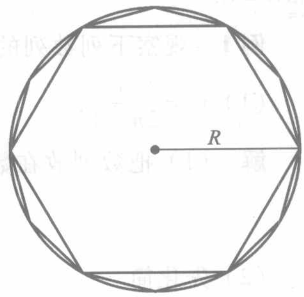


图 1.12

2. 截丈问题.

战国时代哲学家庄周所著《庄子・天下篇》引用过一句话“一尺之棰，日截其半，万世不竭”. 也就是说一根长为一尺的木棍，每天截取一半，可以无限制地截取下去. 把每天截下的总长度（单位：尺）记录如下：

第一天截下的木棍长为 $X_1=\frac{1}{2}$；第二天截下的木棍长总和为 $X_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$；如此循环下去，第 n 天截下的木棍长总和为 $X_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$；可以看出当天数越大，则截下的木棍长总和越接近木棍的总长一尺，即

$$X_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\longrightarrow 1.$$

（二）数列的极限概念

上面两个实例反映了一类数列的某种共同特性，即对于数列 $\{x_n\}$，存在某个常数 A，随着 n 的无限增大，x_n 能无限接近于这个常数 A. 下面我们继续观察一些数列

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots;$$

$$\left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}: 2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots;$$

$$\{2^n\}: 2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots;$$

$$\{(-1)^{n+1}\}: 1, -1, 1, -1, \cdots.$$

因为数列对应着数轴上一个点列，$\{x_n\}$ 可看作一动点在数轴上依次取 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$. 因此把以上数列放在数轴上观察，可以看出 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 随着 n 的无限增大无限接近于常数 0；$\left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 随着 n 的无限增大无限接近于常数 1；而 $\{2^n\}$ 随着 n 的无限增大无限增大，不能无限接近于任何一个常数；$\{(-1)^{n+1}\}$ 随着 n 的无限增大在两个数值上跳动，不能无限接近于一个确定的常数.

下面我们从数学上描述这些数列的变化，给出数列极限的概念.

1. 数列极限的概念.

设无穷数列 $\{x_n\}$，如果当项数 n 无限增大时，数列 x_n 无限接近于某一确定的常数 A，那么就称常数 A 是数列 x_n 的极限，或者称数列 x_n 收敛于 A，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，或 $x_n\to A(n\to\infty)$，此数列称为收敛的. 如果数列没有极限，就说数列是发散的. 因此可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]=1$，数列 $\{2^n\}$ 及 $\{(-1)^{n+1}\}$ 发散.