KH 科海图书
25年 · IT技术出版专家

—课程学习 · 考试指南 · 考研辅导—

"十一五"规划理工类主干课程辅导丛书

数学分析
习题与解析

罗俊　汪名杰　高敏　编著

Exercise & Analysis

兵器工业出版社

"十一五"规划理工类主干课程辅导丛书

数学分析习题与解析

罗 俊 汪名杰 高 敏 编著

兵器工业出版社

内容简介

本书根据数学分析课程的最新教学大纲要求，总结作者多年一线授课经验编写而成，书中通过对知识点概念和习题的讲解与分析，帮助读者了解和掌握该课程的难点、要点，提高读者分析问题与解决问题的能力。

全书按照主流教材的章节安排，对数学分析课程的内容进行了归纳分类。每章分成若干个知识点，每个知识点又分为“要点归纳”和“例题解析”。“要点归纳”是对重要知识点的提炼总结；“例题解析”部分精选出一些具有代表性的例题（包括疑难习题、课程考试试题以及近年考研真题），给出了解题思路与解答步骤，明示了解题过程中需要注意的问题。全书最后提供了两套模拟试题，并附有参考答案，以提高读者的应试水平和对知识的综合应用能力。

本书可作为本、专科学生学习数学分析课程的辅导教材，对准备考研的学生也是一本很好的考研复习资料。书中提供的海量习题为从事课程教学的老师提供了宝贵的教学资源，可供教师作为教学参考。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析习题与解析/罗俊，汪名杰，高敏编著.—北京：兵器工业出版社，2008.9

ISBN 978-7-80248-006-3

I. 数… II. ①罗…②汪…③高… III. 数学分析--高等学校—解题 IV. 017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 144469 号

出版发行：兵器工业出版社

社址邮编：北京市海淀区车道沟 10 号 100089

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京市鑫山源印刷有限公司印刷

版　　次：2008 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

印　　数：1–4000

封面设计：林　陶

责任编辑：常小虹　田龙美

责任校对：杨慧芳

开　　本：787×1092　1/16

印　　张：28.75

字　　数：699 千字

定　　价：46.00 元

前　　言

本书是为读者学习数学分析课程而编写的教学辅导书，可帮助读者复习课程的基本内容，检验基本理论和基本概念的掌握程度，培养和提高分析问题、解决问题的能力，力争使读者学完本书之后，在课程的理解和掌握方面达到一个新的高度。

1．本书阅读指南

全书共分 12 章。

第 1 章主要介绍实数集与函数。

第 2 章主要介绍数列、数项级数和无穷乘积。

第 3 章主要介绍函数的极限与连续性。

第 4 章主要介绍导数和微分以及高阶导数和高阶微分。

第 5 章主要介绍微分中值定理、L'Hospital 法则、Taylor 公式、函数的升降、函数的凸性与函数的极值等内容。

第 6 章主要介绍关于实数完备性的基本定理。

第 7 章主要介绍单变量函数的不定积分、定积分及其应用、广义积分、含参变量的积分学等内容。

第 8 章主要介绍函数列与函数项级数的一致收敛性、幂级数、Fourier 级数等内容。

第 9 章主要介绍 Euclid 空间上的点集拓扑以及多元函数的极限和连续性等内容。

第 10 章主要介绍多变量微分学中的偏导数和全微分、极值和条件极值、隐函数存在定理及其应用等内容。

第 11 章主要介绍多变量积分学中的重积分、曲线积分和曲面积分等内容。

第 12 章给出了两套模拟试题及详细的解题参考答案。

2．本书特色与优点

本书编写的指导思想是：在内容上重视基础理论，覆盖课程的全部基本教学要求；在体系上照顾不同专业学生，反映数学分析面向 21 世纪教学内容和课程体系改革的成果；在形式上根据教学实践经验和对相关内容的思考理解，简明描述课程的基本知识点、重点和难点内容，使学生迅速把握重点。

本书每章内容均包括各基本知识点的要点归纳，并精选具有代表性的例题，给出了解题思路和分析方法，提示了解题中应注意的问题。这样编写的目的在于：力争使读者在尽可能短的时间内，巩固认识课程基本概念，加深理解基本理论并融会贯通，熟练掌握基本分析计算方法并举一反三，使读者的应试水平和知识的综合应用能力不断提高。本书最后给出了两套课程测试题及详细答案，以帮助读者进行自测。

3. 本书读者定位

本书可供学习数学分析课程的读者和从事相关课程教学的教师参考。

本书由罗俊、汪名杰和高敏编著，全书框架结构由何光明和吴婷拟定。衷心感谢上海交通大学吴婷博士为本书提供了宝贵资料，另外还要感谢王珊珊、陈玉旺、许娟、陈芳、范荣钢、钱阳勇、杨明、丁善祥、张凌云、陈智等同志对本次编写的关心和帮助。

由于编者水平和经验有限，加之编写时间仓促，本书难免会有不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编著者

2008 年 6 月

目　录

第 1 章　实数集与函数

【基本知识点】 实数及其性质；绝对值；$\mathbb{R}$ 的拓扑；实数的连续性；数学归纳法；函数的定义；函数的一些几何特性；复合函数和反函数；基本初等函数.

【重点】 数学归纳法；函数的一些几何特性；复合函数和反函数；基本初等函数.

【难点】 数学归纳法；复合函数和反函数.

1.1　知识点 1：实数集

1.1.1　要点归纳

1. $\mathbb{R}$ 的性质

(1) $(\mathbb{R},+,\bullet)$ 是一个域，即下述性质成立：

a. $\forall x,y\in\mathbb{R}$，$x+y\in\mathbb{R}$；

b. $\forall x,y\in\mathbb{R}$，$x+y=y+x$；

c. $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$，$(x+y)+z=x+(y+z)$；

d. $\exists 0\in\mathbb{R}$，$s.t.\forall x\in\mathbb{R}$，$x+0=x$；

e. $\forall x\in\mathbb{R}$，$\exists\mathbb{R}$ 的一元素，记为 $-x$，$s.t.x+(-x)=0$；

f. $\forall x,y\in\mathbb{R}$，$x\bullet y\in\mathbb{R}$；

g. $\forall x,y\in\mathbb{R}$，$x\bullet y=y\bullet x$；

h. $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$，$(x\bullet y)\bullet z=x\bullet(y\bullet z)$；

i. $\exists 1\in\mathbb{R}$，$s.t.\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$x\bullet 1=x$；

j. $\forall x\in\mathbb{R}$，$\exists\mathbb{R}$ 的一元素记为 x^{-1}，$s.t.x\bullet x^{-1}=1$；

k. $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$，$(x+y)\bullet z=x\bullet z+y\bullet z$.

(2) 绝对值. 设 $x\in\mathbb{R}$，x 的绝对值 $|x|$ 定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

(3) $(\mathbb{R},|\bullet|)$ 形成度量空间，即下述性质成立：

a. $\forall x,y\in\mathbb{R}$，$|x-y|\geqslant 0$ 且 $|x-y|=0\Leftrightarrow x=y$；

b. $\forall x,y\in\mathbb{R}$，$|x-y|=|y-x|$；

c. $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$，$|x-y|\leqslant|x-z|+|z-y|$.

2. ℝ 的拓扑

(1) 邻域　设 $a \in \mathbb{R}$，$\delta > 0$. 集合 $B(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R} \| z-a| < \delta\}$ 称为 a 的 δ-邻域.

(2) 开区间　设 $a,b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$（a 可以是 $-\infty$，b 也可以是 $+\infty$），则 $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ 称为 $\mathbb{R}$ 的开区间.

(3) 闭区间　设 $a,b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$（a 不可以是 $-\infty$，b 也不可以是 $+\infty$），则 $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为 $\mathbb{R}$ 的闭区间.

(4) 开集　设 $U \subset \mathbb{R}$ 是一子集，若 $\forall a \in U$，$\exists \delta > 0$，$s.t. (a-\delta, a+\delta) \subset U$，则称 U 为开集.

(5) 闭集　设 $F \subset \mathbb{R}$ 是一子集，若 $\mathbb{R} \setminus F$ 是开集，则称 F 为闭集.

注意：任一闭区间都是闭集，$\varnothing$ 是闭集，特别地，$\mathbb{R}$ 和 $\varnothing$ 既是开集又是闭集.

---

(6) 聚点　设 $X \subset \mathbb{R}$ 是一非空集合，$a \in \mathbb{R}$ 是一固定点.

a. a 称为 X 的聚点，当且仅当 $\forall \delta > 0$ 时，$(a-\delta, a+\delta) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \varnothing$；

b. a 称为 X 的右侧聚点，当且仅当 $\forall \delta > 0$ 时，$(a, a+\delta) \cap X \neq \varnothing$；

c. a 称为 X 的左侧聚点，当且仅当 $\forall \delta > 0$ 时，$(a-\delta, a) \cap X \neq \varnothing$.

3. 实数的连续性

(1) 设 $X \subset \mathbb{R}$ 是一非空集合.

a. 若 $\exists M \in \mathbb{R}$，$s.t. \forall x \in X$，$x \leqslant M$，则称 X 上有界；

b. 若 $\exists m \in \mathbb{R}$，$s.t. \forall x \in X$，$x \geqslant m$，则称 X 下有界；

c. 若 X 既上有界又下有界，则称 X 有界.

(2) 设 $X \subset \mathbb{R}$ 是一上有界集. 若实数 A 具有下述性质：

a. X 以 A 为上界，即 $\forall x \in X$，$x \leqslant A$；

b. 若 X 以 M 为上界，$A \leqslant M$，

则称 A 为 X 的上确界，并记为 $\sup X$ 或 $\sup\limits_{x \in X} x$.

(3) 设 $X \subset \mathbb{R}$ 是一下有界集. 若实数 a 具有下述性质：

a. X 以 a 为下界，即 $\forall x \in X$，$x \geqslant a$；

b. 若 X 以 m 为下界，$a \geqslant m$，

则称 a 为 X 的下确界，并记为 $\inf X$ 或 $\inf\limits_{x \in X} x$.

注意：$A = \sup X \Leftrightarrow$ (i) $\forall x \in X$，$x \leqslant A$；(ii) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists x' \in X$，$A - \varepsilon < x'$；

$a = \inf X \Leftrightarrow$ (i) $\forall x \in X$，$x \geqslant a$；(ii) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists x' \in X$，$x' < a + \varepsilon$.

---

4. 数学归纳法

为了证明某定理对任意的自然数 n 为真，只须证明下面两点就够了：

(1) 这定理对 $n=1$ 为真；

(2) 设这定理对任何的一个自然数 n 为真，则它对 $n+1$ 也为真.

5. 分割

对任意数集 A，称 A_1/A_2 为 A 的一个分割，则 A_1 和 A_2 满足：

(1) A_1 和 A_2 均为 A 的非空子集；

(2) $A_1 \cup A_2 = A$；

(3) $A_1 \cap A_2 = \varnothing$；

(4) 属于 A_1 的任何数小于属于 A_2 的任何数.

注意：分割的方法是讨论数集性质的重要方法，有理数与无理数的定义也是借助分割完成的.

1.1.2　例题解析

【例 1.1】　求证任何非空且下有界的数集有下确界，而任何非空且上有界的数集有上确界.

证明　不失一般性，这里只证本题的后半部分. 分两种情形：

(1) A 中有最大数 a_0，此时，对任意的 $a \in A$，有 $a \leqslant a_0$，这就说明 a_0 是 A 的上界；又由于 $a_0 \in A$，因此对 A 的任何上界 M，均有 $a_0 \leqslant M$，故 a_0 为 A 的上确界.

(2) A 中无最大数. 此时，作分割 A_1/A_2：取 A 的一切上界归入 A_2，而其余的数归入 A_1. 这样，A 中的数全部落在 A_1 中. 由于 A_1, A_2 均非空，且任何属于 A_1 的数小于任何属于 A_2 的数，因此这确实是一个对实数集的分割. 假设由此分割产生的实数 β 是 A_2 中的最小数，则 β 是 A 的最小上界，从而 β 是 A 的上确界.

【例 1.2】　设 $\{-x\}$ 为数的集合，这些数是与 $x \in \{x\}$ 符号相反的数. 证明等式：

(1) $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$；　　　(2) $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

证明　(1) 设 $\inf\{-x\} = m'$，则有：

a. 当 $-x \in \{-x\}$ 时，$-x \geqslant m'$；

b. 对于任意正数 ε，存在 $-x' \in \{-x\}$，使得 $-x' < m' + \varepsilon$.

由 a，b 推知，

c. 当 $x \in \{x\}$ 时，$x \leqslant -m'$；

d. 对于任意正数 ε，存在 $x' \in \{x\}$，使得 $x' > -m' - \varepsilon$.

由 c，d 知 $-m' = \sup\{x\}$，即 $m' = -\sup\{x\}$，所以 $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$.

(2) 设 $\sup\{-x\} = M'$，则有：

e. 当 $-x \in \{-x\}$ 时，$-x \leqslant M'$；

f. 对于任意正数 ε，存在 $-x' \in \{-x\}$，使得 $-x' > M' - \varepsilon$.

由 e，f 推知，

g. 当 $x \in \{x\}$ 时，$x \geqslant -M'$；

h. 对于任意正数 ε，存在 $x' \in \{x\}$，使得 $x' < -M' + \varepsilon$.

由 g，h 知 $-M'=\inf\{x\}$，即 $M'=-\inf\{x\}$，所以，$\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

【例 1.3】 设 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 的集合，其中 $x\in\{x\}$，$y\in\{y\}$. 证明等式:

(1) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$;

(2) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

证明 (1) 设 $\inf\{x\}=m_1$, $\inf\{y\}=m_2$，则有:

a. 当 $x\in\{x\}, y\in\{y\}$ 时，$x\geqslant m_1$，$y\geqslant m_2$；

b. 对于任意正数 ε，存在 $x'\in\{x\}$, $y'\in\{y\}$，使得

$$x'<m_1+\frac{\varepsilon}{2},\quad y'<m_2+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 a，b 推知，

c. 当 $x+y\in\{x+y\}$ 时，$x+y\geqslant m_1+m_2$；

d. 对于任意正数 ε，存在 $x'+y'\in\{x+y\}$，使得 $x'+y'<(m_1+m_2)+\varepsilon$.

由 c，d 知 $m_1+m_2=\inf\{x+y\}$，即

$$\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}.$$

(2) 与(1)类似，可证

$$\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}.$$

【例 1.4】 设 $\{xy\}$ 为所有 xy 的集合，其中 $x\in\{x\}$，$y\in\{y\}$，且 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$. 证明等式:

(1) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}$;

(2) $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\sup\{y\}$.

证明 (1) 设 $\inf\{x\}=m_1$, $\inf\{y\}=m_2$，由于恒有 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，因此有 $m_1\geqslant 0$，$m_2\geqslant 0$. 于是，

a. 当 $x\in\{x\}$，$y\in\{y\}$ 时，$x\geqslant m_1\geqslant 0$, $y\geqslant m_2\geqslant 0$；

b. 对于任意正数 ε，存在 $x'\in\{x\}$, $y'\in\{y\}$，使得

$$0\leqslant x'<m_1+\varepsilon,\ 0\leqslant y'<m_2+\varepsilon.$$

由 a，b 推知，

c. 当 $xy\in\{xy\}$ 时，$xy\geqslant m_1m_2$；

d. 对于任意正数 ε，存在 $x'y'\in\{xy\}$，使得

$$0\leqslant x'y'<(m_1+\varepsilon)(m_2+\varepsilon)=m_1m_2+\varepsilon'.$$

其中 $\varepsilon'=(m_1+m_2)\varepsilon+\varepsilon^2$.

由 c，d 知 $m_1m_2=\inf\{xy\}$，即

$$\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}.$$

(2) 与(1)类似，可证

$$\sup\{xy\}=\sup\{x\}\sup\{y\}.$$

【例 1.5】 证明$\sum_{i=1}^{n}i^3=\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)^2$.

证明 当$n=1$时，等式成立.

设$n=k$时，等式成立，即$\sum_{i=1}^{k}i^3=\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)^2$，则对于$n=k+1$时，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}i^3&=\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\\&=\left\{\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right\}^2=\left(\sum_{i=1}^{k+1}i\right)^2.\end{aligned}$$

即对于$n=k+1$时，等式也成立.

综上，对于任何自然数n，都有$\sum_{i=1}^{n}i^3=\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)^2$.

【例 1.6】 证明 Bernoulli 不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

其中$x_1,x_2,\cdots,x_n$是符号相同且大于-1的实数.

证明 当$n=1$时，此式取等号.

设$n=k$时，不等式成立，即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于$n=k+1$时，由于$x_i(i=1,2,\cdots,n)>-1$，所以$1+x_i>0$. 因此，有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\&=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).\end{aligned}$$

由于$x_ix_j\geqslant 0$，所以

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},$$

即对于$n=k+1$时，不等式也成立.

综上，对于任何自然数n，都有

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

【例 1.7】 证明：若$x>-1$，则当且仅当$x=0$时，不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx\ (n>1)$$

等号成立.

证明 设上一题中$x_i=x\ (i=1,2,\cdots,n)$，即得证

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx\ (n>1).$$

从上一题的证明过程可看出，当且仅当$x=0$时，等号成立.

【例 1.8】 证明不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n>1).$$

证明 当$n=2$时，因为$\left(\frac{2+1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2=2!$，故不等式成立.

设$n=k$时，不等式成立，即$k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k$，则$n=k+1$时，有

$$(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2 \quad (k=1,2,\cdots),$$

从而有$(k+1)!<\left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1}$，即对于$n=k+1$时，不等式也成立.

综上，有$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n (n>1)$.

【例 1.9】 证明不等式

$$2!\cdot 4!\cdot\cdots\cdot(2n)!>[(n+1)!]^n \quad (n>1).$$

证明 当$n=2$时，因为$2!\cdot 4!=48$，$[(2+1)!]^2=36$，所以$2!\cdot 4!>[(2+1)!]^2$，不等式成立.

设$n=k$时，不等式成立，即$2!\cdot 4!\cdot\cdots\cdot(2k)!>[(k+1)!]^k$，则对于$n=k+1$，有

$$\begin{aligned}2!\cdot 4!\cdot\cdots\cdot(2k+2)!&>[(k+1)!]^k(2k+2)!=[(k+1)!]^{k+1}(k+2)(k+3)\cdots(2k+2)\\&>[(k+1)!]^{k+1}(k+2)^{k+1}=[(k+2)!]^{k+1},\end{aligned}$$

即对于$n=k+1$时，不等式也成立.

综上，有$2!\cdot 4!\cdot\cdots\cdot(2n)!>[(n+1)!]^n \ (n>1)$.

【例 1.10】 证明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证明 当$n=1$时，因为$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$，不等式显然成立.

设$n=k$时，不等式成立，即$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$. 则对于$n=k+1$，有

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证 $\dfrac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\dfrac{1}{\sqrt{2k+3}}$，即证 $(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$ 就可以了.

而上述不等式由于 $4k^2+8k+3<4k^2+8k+4$，因而是成立的. 于是，得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

综上，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

【例 1.11】 证明 Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right),$$

其中 $x_1,\cdots,x_n$; $y_1,\cdots,y_n$ 为两组实数.

证明　设 $x_1,\cdots,x_n$ 不全为零. 考虑关于 λ 的二次三项式

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i-y_i)^2=\lambda^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\lambda\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum_{i=1}^{n}y_i^2,$$

上式右边关于任何实数 λ 都为非负，故其判别式

$$\left(2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2-4\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\leqslant 0,$$

因此，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right).$$

【例 1.12】 证明平均值不等式

$$(x_1+\cdots+x_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n),$$

其中，$x_1,\cdots,x_n$ 为 n 个非负实数，当且仅当所有 x_i 都相等时等号成立.

证明　易知对任何非负实数 x_1,x_2，都有

$$(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+x_2)$$

当且仅当 $x_1=x_2$ 时等号成立. 由此推知，对 4 个非负实数 x_1,x_2,x_3,x_4，有

$$\begin{aligned}(x_1x_2x_3x_4)^{\frac{1}{4}}&=[(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}(x_3x_4)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\left[\frac{(x_1+x_2)}{2}\cdot\frac{(x_3+x_4)}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4).\end{aligned}$$

继续下去，可推出平均值不等式对一切 $n=2^k(k=0,1,2,\cdots)$ 都成立. 用反向归纳法，设平均值不等式对某个 $n(\geqslant 2)$ 成立，要证它对 $n-1$ 也成立.

事实上，给定非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$，令

$$x_n=\frac{1}{n-1}(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}),$$

则有

$$(x_1+\cdots+x_{n-1})^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(x_1+\cdots+x_{n-1}+\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right),$$

整理后得

$$(x_1+\cdots+x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\leqslant\frac{1}{n-1}(x_1+\cdots+x_{n-1}),$$

即平均值不等式对 $n-1$ 成立.

综上，题目所给平均值不等式成立.

【例 1.13】 设 $x_1,\cdots,x_n$ 为 n 个正实数，满足 $x_1x_2\cdots x_n=1$，证明

$$x_1+\cdots+x_n\geqslant n,$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时等号成立.

证明 当 $n=1,2$ 时，命题显然成立.

设当 $n=k$ 时命题成立，则当 $n=k+1$ 时，$x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}$ 满足 $x_1x_2\cdots x_{k+1}=1$.

若所有的 $x_i=1\ (i=1,2,\cdots,k+1)$，则结论成立. 故不妨设 $x_1>1,\ x_2<1$，则有

$$(x_1-1)(x_2-1)<0,$$

即

$$x_1x_2+1<x_1+x_2,$$

从而有

$$x_1+\cdots+x_{k+1}>1+x_1x_2+x_3+\cdots+x_{k+1}.$$

对 k 个正数 $x_1x_2,x_3,\cdots,x_{k+1}$ 应用归纳假设，得

$$x_1+\cdots+x_{k+1}>k+1,$$

即对于 $n=k+1$ 时，命题成立.

综上，命题成立.

点评：利用本题的结论，可给出平均值不等式的另一种证明.

【例 1.14*】(浙江师范大学，2006 年) 证明：对任何实数 a,b，不等式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

成立.