通往成功的捷径

丛书策划 易·杏

高中奥数培优捷径（下册）

马 兵主编

GAOZHONG AOSHU PEIYOU JIEJING

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

最新数学竞赛书目

- 高中奥数培优捷径（上册）
- 高中奥数培优捷径（下册）
- 高中竞赛数学教程
- 竞赛数学解题策略
- 高中奥赛协作体学校夏令营专题讲座与模拟训练
- 高中数学联赛一试知识与方法

ISBN 978-7-308-05958-9

9 787308 059589 >

定价：32.00元

高中奥数培优捷径

（下册）

主编　马　兵

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中奥数培优捷径．下册/马兵主编．—杭州，浙江大学出版社，2008.5
ISBN 978-7-308-05958-9

Ⅰ．高…　Ⅱ．马…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 068378 号

高中奥数培优捷径(下册)

马　兵　主编

责任编辑	杨晓鸣
文字编辑	夏晓冬
封面设计	刘依群
出版发行	浙江大学出版社 (杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028) (E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn) (网址：http://www.zjupress.com http://www.press.zju.edu.cn) 电话：0571－88925592，88273066(传真)
排　　版	杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷	杭州浙大同力教育彩印有限公司
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	22.25
字　　数	517 千
版 印 次	2008 年 5 月第 1 版　2008 年 5 月第 1 次印刷
印　　数	00001—10000
书　　号	ISBN 978-7-308-05958-9
定　　价	32.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

编写说明

从2008年起，全国大部分省份都开始实行新一轮的课程改革。然而，目前市场上能与新课程标准相匹配的，适合课堂教学模式的竞赛类辅导用书几乎没有。为了更好地帮助广大数学爱好者进一步学习高中数学奥林匹克竞赛的知识和方法，同时也为了给广大教师和参加高考的优秀学生提供优质的教学资源和学习资源，提高教师的教学水平和学生解决问题、分析问题的能力，我们组织了全国各地数学奥林匹克高级教练与特级教师，精心编写了这套丛书（共五种）。

本套丛书主要特色是：

一、同步辅导、循序渐进

从竞赛的实际需要出发，将传统的竞赛内容与新教材内容，讲解与训练等有机地结合起来。其中，基础知识部分与现行模块教材同步，是教材的补充和延伸；专题部分是高中竞赛必须掌握的重要思想和方法，选题难度控制在全国联赛二试水平，部分题目与CMO、IMO试题水平相当。

二、方法创新、培养能力

丛书注重解题方法创新，新颖题目多视角分析，经典题目新视角分析，新颖的解题思路对学生具有一定的启发性和思考性，也为教师教学提供了良好的素材。同时，丛书也吸收了新课标改革成果，编拟了许多创新的题目。

三、源于实践、重在实用

丛书大多数内容是作者在讲义的基础上逐步修改与完善的，因此它可以直接应用到课堂教学中，是一套经得起推敲的竞赛辅导丛书。

由于编写时间仓促，编者水平有限，书中纰漏在所难免，敬请专家与读者批评指正。

目　　录

第四章 立体几何初步

题型一：空间几何体

赛点提炼

1. 柱、锥、台、球的结构特征

(1) 柱

棱柱：一般地，有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的几何体叫做棱柱；棱柱中两个互相平行的面叫做棱柱的底面，简称为底；其余各面叫做棱柱的侧面；相邻侧面的公共边叫做棱柱的侧棱；侧面与底面的公共顶点叫做棱柱的顶点.

底面是三角形、四边形、五边形……的棱柱分别叫做三棱柱、四棱柱、五棱柱……

圆柱：以矩形的一边所在的直线为旋转轴，其余边旋转形成的曲面所围成的几何体叫做圆柱；旋转轴叫做圆柱的轴；垂直于轴的边旋转而成的曲面叫做圆柱的侧面；无论旋转到什么位置，不垂直于轴的边都叫做圆柱的母线.

棱柱与圆柱统称为柱体.

(2) 锥

棱锥：一般地，有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的几何体叫做棱锥；这个多边形所在的平面叫做棱锥的底面或底；有公共顶点的各个三角形所在的平面叫做棱锥的侧面；各侧面的公共顶点叫做棱锥的顶点；相邻侧面的公共边叫做棱锥的侧棱.

底面是三角形、四边形、五边形……的棱锥分别叫做三棱锥、四棱锥、五棱锥……

圆锥：以直角三角形的一条直角边所在的直线为旋转轴，其余两边旋转形成的曲面所围成的几何体叫做圆锥；旋转轴叫做圆锥的轴；垂直于轴的边旋转形成的面叫做圆锥的底面；斜边旋转形成的曲面叫做圆锥的侧面.

棱锥与圆锥统称为锥体.

(3) 台

棱台：用一个平行于底面的平面去截棱锥，底面和截面之间的部分叫做棱台；原棱锥的底面和截面分别叫做棱台的下底面和上底面；棱台也有侧面、侧棱、顶点.

圆台：用一个平行于底面的平面去截圆锥，底面和截面之间的部分叫做圆台；原圆锥的底面和截面分别叫做圆台的下底面和上底面；圆台也有侧面、母线、轴.

圆台和棱台统称为台体.

(4) 球

以半圆的直径所在的直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的几何体叫做球体，简称为球；半圆的圆心叫做球的球心，半圆的半径叫做球的半径，半圆的直径叫做球的直径.

(5) 组合体

由柱、锥、台、球等几何体组成的复杂的几何体叫组合体.

2. 空间几何体的三视图

三视图是观测者从不同位置观察同一个几何体后，画出空间几何体的图形.

具体包括：

(1) 正视图：物体前后方向投影所得到的投影图，它能反映物体的高度和长度；

(2) 侧视图：物体左右方向投影所得到的投影图，它能反映物体的高度和宽度；

(3) 俯视图：物体上下方向投影所得到的投影图，它能反映物体的长度和宽度.

3. 空间几何体的直观图

(1) 斜二测画法

① 建立直角坐标系：在已知水平放置的平面图形中取互相垂直的 OX，OY，建立直角坐标系；

② 画出斜坐标系：在画直观图的纸上(平面上)画出对应的 $O'X'$，$O'Y'$，使 $\angle X'O'Y'=45^\circ$(或 135°)，它们确定的平面表示水平平面；

③ 画对应图形：已知图形中平行于 X 轴的线段，在直观图中画成平行于 X' 轴，且长度保持不变；已知图形中平行于 Y 轴的线段，在直观图中画成平行于 Y' 轴，且长度变为原来的一半；

④ 擦去辅助线：图画好后，擦去 X 轴、Y 轴及为画图添加的辅助线(虚线).

(2) 平行投影与中心投影

平行投影的投影线是互相平行的，中心投影的投影线相交于一点.

赛题探究

例 1 (1) 平面 α 的斜线 AB 交 α 于点 B，过定点 A 的动直线 l 与 AB 垂直，且交 α 于点 C，则动点 C 的轨迹是 ( )

A. 一条直线　　B. 一个圆

C. 一个椭圆　　D. 双曲线的一支

(2) 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 M 是 BC 的中点，点 P 是平面 $ABCD$ 内的一个动点，且满足 $PM=2$，点 P 到直线 A_1D_1 的距离为 $\sqrt{5}$，则点 P 的轨迹是 ( )

A. 圆　　B. 双曲线

C. 两个点　　D. 直线

答案 (1) A (2) C

讲解 (1) 设 l 与 l' 是其中的任意两条直线，则这两条直线确定一个平面，且斜线 AB 垂直于这个平面，由过平面外一点有且只有一个平面与已知直线垂直可知，过定点 A 与 AB 垂直的所有直线都在这个平面内，故动点 C 都在这个平面与平面 α 的交线上，故选 A.

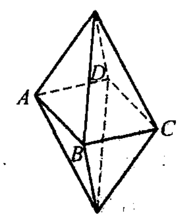
(2) 点 P 到 A_1D_1 的距离为 $\sqrt{5}$，则点 P 到 AD 的距离为 1，满足此条件的点 P 的轨迹是到直线 AD 的距离为 1 的两条平行直线.

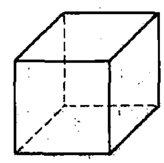
又因为 $PM=2$，所以满足此条件的点 P 的轨迹是以 M 为圆心，2 为半径的圆，这两种轨迹只有两个交点.

故点 P 的轨迹是两个点，故选 C.

小结 该题考查空间内平面轨迹的形成过程，同时考查了空间想象的能力.

例 2 两个相同的正四棱锥组成如图所示的几何体，可放入棱长为 1 的正方体内，使正四棱锥的底面 $ABCD$ 与正方体的某一个平面平行，且各顶点均在正方体的面上，则这样的几何体体积的可能值有 ( )





A. 1 个　　B. 2 个

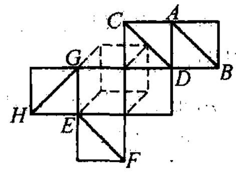
C. 3 个　　D. 无穷多个

答案 D

讲解 由于两个正四棱锥相同，所以所求几何体的中心在正四棱锥底面正方形 $ABCD$ 中心，由对称性可知正四棱锥的高为正方体棱长的一半，影响几何体体积的只能是正四棱锥底面正方形 $ABCD$ 的面积，问题转化为边长为 1 的正方形的内接正方形有多少种，故选 D.

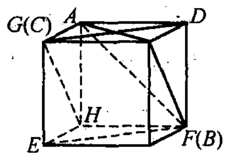
小结 本题主要考查空间想象能力以及正四棱锥体积的求解问题. 正方体是大家熟悉的几何体，它的一些内接或外接图形需要一定的空间想象能力，要学会将空间问题转化为平面问题.

例 3 下图表示一个正方体表面的一种展开图，图中的四条线段 AB，CD，EF 和 GH 在原正方体中相互异面的有________对.



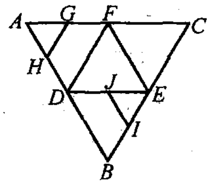
答案 3

讲解 相互异面的线段有 AB 与 CD，EF 与 GH，AB 与 GH 共 3 对.



小结 解决此类题目的关键是将平面图形恢复成空间图形，此题考查空间想象能力.

例 4 如图所示，在正三角形 ABC 中，D，E，F 分别为各边的中点，G，H，I，J 分别为 AF，AD，BE，DE 的中点. 将 $\triangle ABC$ 沿 DE，EF，DF 折成三棱锥以后，GH 与 IJ 所成角的度数为 ( )



A. 90° B. 60° C. 45° D. 0°

答案 B

讲解 将三角形折成三棱锥，HG 与 IJ 为一对异面直线. 过点 D 分别作 HG 与 IJ 的平行线，即 DF 与 AD，所以 $\angle ADF$ 即为所求，因此 HG 与 IJ 所成角为 60°，故选 B.

小结 在画图过程中，正确理解已知图形各部分之间的关系是关键. 通过识图、想图、画图考查了空间想象能力. 对空间图形的处理能力是空间想象力深化的标志，从深层上考查空间想象能力是高考和竞赛的主要方向.

例 5 画正五棱柱的直观图，使底面边长为 3cm，侧棱长为 5cm.

讲解 先作底面正五边形的直观图，再沿平行于 Z 轴方向平移即可得.

作法：

(1) 画轴：画 X'，Y'，Z' 轴，使 $\angle X'O'Y'=45°$(或 135°)，$\angle X'O'Z'=90°$.

(2) 画底面：按 X' 轴，Y' 轴画正五边形的直观图 $ABCDE$，边长为 3cm.

(3) 画侧棱：过 A,B,C,D,E 各点分别作 Z' 轴的平行线，并在这些平行线上分别截取 $AA'=BB'=CC'=DD'=EE'=5$cm.

(4) 成图：顺次连结 A'，B'，C'，D'，F'，加以整理，去掉辅助线，改被遮挡的部分为虚线.

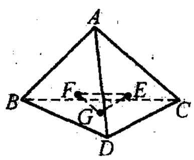
小结 用此方法可以画出棱锥、棱柱、棱台等多面体的直观图.

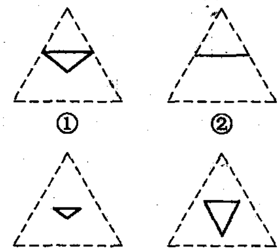
例 6 $\triangle A'B'C'$ 是正 $\triangle ABC$ 的斜二测画法的水平放置图形的直观图，若 $\triangle A'B'C'$ 的面积为 $\sqrt{3}$，那么 $\triangle ABC$ 的面积为________.

讲解 $2\sqrt{6}$.

小结 该题属于斜二测画法的应用，解题的关键在于建立实物图元素与直观图元素之间的对应关系. 特别要注意底和高的对应关系.

例 7 (1) 如图所示，在正四面体 $A-BCD$ 中，E，F，G 分别是 $\triangle ADC$，$\triangle ABD$，$\triangle BCD$ 的中心，则 $\triangle EFG$ 在该正四面体各个面上的射影所有可能的序号是 ( )





① ② ③ ④

A. ①③ B. ②③④

C. ③④ D. ②④

(2) 如图 1 所示，E，F 分别为正方体的面 ADD_1A_1，面 BCC_1B_1 的中心，则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是图 2 中的________(要求：把可能的图的序号都填上).

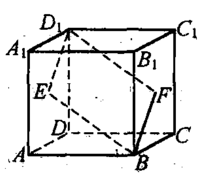
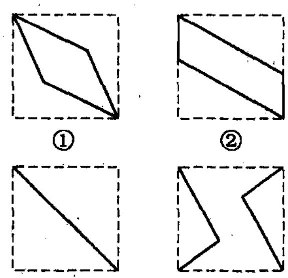


图 1



① ② ③ ④

图 2

答案 (1) C (2) ②，③

讲解 (1) 正四面体各面的中点在四个面上的射影不可能落到正四面体的边上,所以①,②不正确,根据射影的性质,E, F, G 三点在平面 $ABCD$ 内的射影形状如"④"所示,在其他平面上的射影如"③"所示,故选 C.

(2) 因为面 $BFD_1E \perp$ 面 ADD_1A_1,所以四边形 BFD_1E 在面 ADD_1A_1 上的射影是③,同理在面 BCC_1B_1 上的射影也是③. 过 E, F 分别作 DD_1 和 CC_1 的垂线,可得四边形 BFD_1E 在面 DCC_1D_1 上的射影是②,同理在面 ABB_1A_1,面 $ABCD$ 和面 $A_1B_1C_1D_1$ 上的射影也是②,故选②,③.

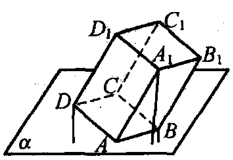
小结 考查立足课本的知识,对空间想象能力、分析问题的能力、操作能力和思维的灵活性等方面的要求较高,体现了加强能力考查的方向.

例 8 多面体上,位于同一条棱两端的顶点称为相邻的顶点,如图所示,正方体的一个顶点 A 在平面 α 内,其余顶点在 α 的同侧,正方体上与顶点 A 相邻的三个顶点到 α 的距离分别为 1, 2 和 4, P 是正方体的其余四个顶点中的一个,则 P 到平面 α 的距离可能是: ① 3, ② 4, ③ 5, ④ 6, ⑤ 7.

以上结论正确的为________(写出所有正确结论的编号).

答案 ①,③,④,⑤

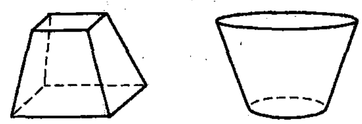
讲解 如图所示,点 B,D,A_1 到平面 α 的距离分别为 1, 2, 4,则 DA_1 的中点到平面 α 的距离为 3,所以点 D_1 到平面 α 的距离为 6. BA_1 的中点到平面 α 的距离为 $\frac{5}{2}$,



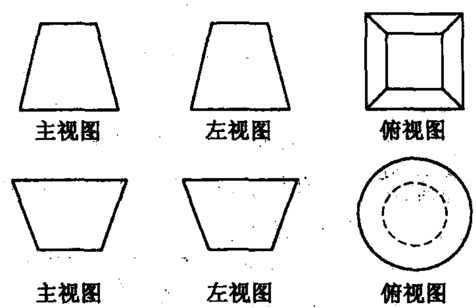
所以点 B_1 到平面 α 的距离为 5. DB 的中点到平面 α 的距离为 $\frac{3}{2}$,所以点 C 到平面 α 的距离为 3; CA_1 的中点到平面 α 的距离为 $\frac{7}{2}$,所以点 C_1 到平面 α 的距离为 7. 而 P 为 C, C_1, B_1, D_1 中的一点,所以选①,③,④,⑤.

小结 该题将计算蕴涵于射影知识中,属于难得的综合题目.

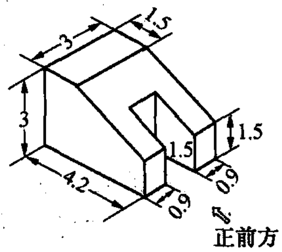
例 9 (1) 画出下列几何体的三视图.



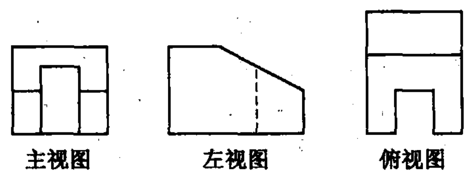
讲解 这两个几何体的三视图如下:



(2) 如图所示,设所给的方向为物体的正前方,试画出它的三视图.(单位: cm)



讲解 这个几何体的三视图如下:



小结 画三视图之前,应把几何体的结构弄清楚,选择一个合适的主视方向. 一般先画主视图,其次画俯视图,最后画左视图. 画的时候先把轮廓线画出来,被遮住的轮廓线要画成虚线. 物体上每一组成部分的三视图都应符合三条投射规律.

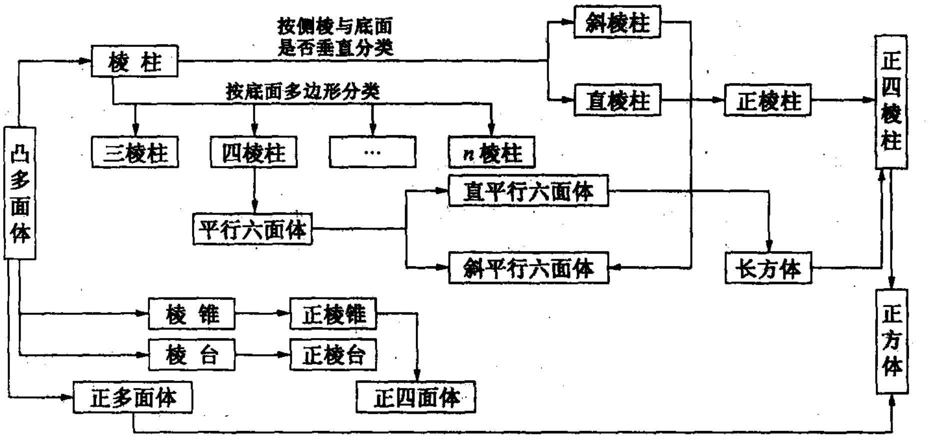
例 10 某物体的三视图如下,试判断该几何体的形状.

讲解 该几何体为一个正四棱锥.

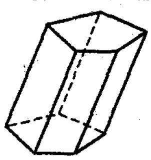
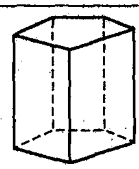
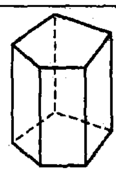
小结 主视图反映物体的主要形状特征，主要体现物体的长和高，不反映物体的宽. 而俯视图和主视图共同反映物体的长相等. 左视图和俯视图共同反映物体的宽相等. 据此就不难得出该几何体的形状.

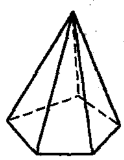
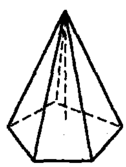
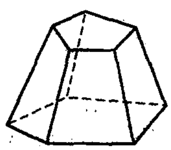
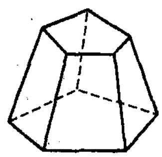
方法归纳

1. 几种常见凸多面体间的关系



2. 一些特殊棱柱、棱锥、棱台的概念和主要性质

名称	棱柱	直棱柱	正棱柱
图形			
定义	有两个面互相平行，而其余每相邻两个面的交线都互相平行的多面体	侧棱垂直于底面的棱柱	底面是正多边形的直棱柱
侧棱	平行且相等	平行且相等	平行且相等
侧面的形状	平行四边形	矩形	全等的矩形
对角面的形状	平行四边形	矩形	矩形
平行于底面的截面的形状	与底面全等的多边形	与底面全等的多边形	与底面全等的正多边形

名称	棱锥	正棱锥	棱台	正棱台
图形				

续表

名　称	棱　锥	正棱锥	棱　台	正棱台
定　义	有一个面是多边形,其余各面是有一个公共顶点的三角形的多面体	底面是正多边形,且顶点在底面的射影是底面的中心	用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥,底面和截面之间的部分	由正棱锥截得的棱台
侧　棱	相交于一点但不一定相等	相交于一点且相等	延长线交于一点	相等且延长线交于一点
侧面的形状	三角形	全等的等腰三角形	梯形	全等的等腰梯形
对角面的形状	三角形	等腰三角形	梯形	等腰梯形
平行于底的截面形状	与底面相似的多边形	与底面相似的正多边形	与底面相似的多边形	与底面相似的正多边形
其他性质		高过底面中心;侧棱与底面、侧面与底面、相邻两侧面所成角都相等		两底中心连线即高;侧棱与底面、侧面与底面、相邻两侧面所成角都相等

几种特殊四棱柱的特殊性质

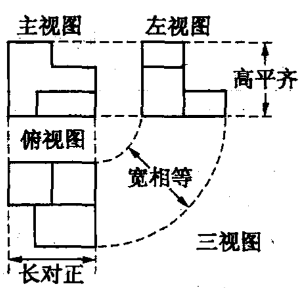
名　称	特殊性质
平行六面体	底面和侧面都是平行四边形;四条对角线交于一点,且被该点平分
直平行六面体	侧棱垂直于底面,各侧面都是矩形;四条对角线交于一点,且被该点平分
长方体	底面和侧面都是矩形;四条对角线相等,交于一点,且被该点平分
正方体	棱长都相等,各面都是正方形;四条对角线相等,交于一点,且被该点平分

3. 三视图画法规则

高平齐:主视图与左视图的高要保持平齐;

长对正:主视图与俯视图的长应对正;

宽相等:俯视图与左视图的宽度应相等.



4. 画水平放置的多边形的直观图时,关键要确定多边形顶点的位置,因为多边形顶点的位置一旦被确定,依次连结这些顶点就可画出多边形,因此平面多边形水平放置时,直观图的画法可以归结为确定点的位置的画法.

同步演练

1. 对任一长方体,都一定存在一点:

① 这点到长方体的各顶点距离相等;

② 这点到长方体的各棱距离相等;

③ 这点到长方体的各面距离相等.

以上三个结论中正确的结论是 (　　)

A. ①、②　　B. ①

C. ②　　D. ①、③

2. 过球面上两点可以作球的大圆的个数是 ( )

A. 有且只有一个

B. 一个或无数多个

C. 无数多个

D. 不存在这种大圆

3. 在具有下列性质的三棱锥中，哪一个是正棱锥 ( )

A. 顶点在底面的射影到底面各顶点的距离相等

B. 底面是正三角形，且侧面都是等腰三角形

C. 相邻两条侧棱间的夹角相等

D. 三条侧棱相等，侧面与底面所成角也相等

4. 如果正三棱锥的侧面均为直角三角形，侧面与底面所成角为 α，则 ( )

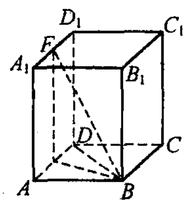
A. $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

5. 如图所示，直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的高为3，底面是边长为2的菱形且 $\angle BAD=60°$，F 是 A_1D_1 的中点，则 BF 的长为 ( )



A. $\sqrt{6}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{14}$　　D. 4

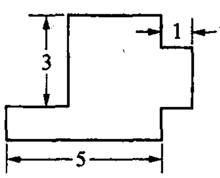
6. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知对角线 $A_1C=4$，$BD_1=2$，若存在一点 P 使得 $PA_1=3$，$PC=5$，则 $PB^2+PD_1^2$ 的值为 ( )

A. 24　　B. 26

C. 25　　D. 28

7. 棱长为 a 的正八面体的对角线长为______.

8. 右图为一个无盖长方体盒子的展开图(重叠部分不计)，尺寸如图所示(单位：cm)，则这个长方体的对角线长为______cm.



9. 根据下列条件，填写三棱锥 $P-ABC$ 顶点 P 在底面 ABC 内的射影 O 的位置：

(1) 三条侧棱相等( )

(2) 侧棱与底面所成的角相等( )

(3) 侧面与底面所成的角相等( )

(4) P 到 $\triangle ABC$ 三边距离相等且 O 在 $\triangle ABC$ 内部( )

(5) 三条侧棱两两垂直( )

(6) 相对棱互相垂直( )

(7) $PA=PB=PC$，$\angle ACB=90°$( )

10. $P-ABCD$ 是棱长均为 a 的正四棱锥，则由侧面 $\triangle PAD$ 的中心 O_1 沿表面走到相对侧面 $\triangle PBC$ 的中心 O_2 的最短距离等于______.

11. 有两个相同的直三棱柱，高为 $\frac{2}{a}$，底面三角形的三边长分别为 $3a$，$4a$，$5a(a>0)$. 用它们拼成一个三棱柱或四棱柱，在所有可能的情况中，全面积最小的是一个四棱柱，则 a 的取值范围是______.

12. 有四个命题：

① 各侧面是全等的等腰三角形的四棱锥是正四棱锥；

② 底面是正多边形的棱锥是正棱锥；

③ 棱锥的所有面可能都是直角三角形；

④ 四棱锥的侧面最多有四个直角三角形.

正确的命题有______.

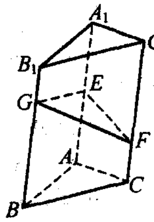
13. 已知球 O 的半径为1，A，B，C 三点都在球面上，且每两点间的球面距离均为 $\frac{\pi}{2}$，求球心 O 到平面 ABC 的距离.

14. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$，四个顶点在同一球面上，求此球的表面积.

15. 已知在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 B_1A_1AB 与平面 A_1C_1CA 所成的二面角为 $120°$，AA_1 与 BB_1，CC_1 的距离分别为16cm和24cm，侧面平行四边形 B_1C_1CB 的面积为 $160\sqrt{19}\ \text{cm}^2$，求此三棱柱的侧

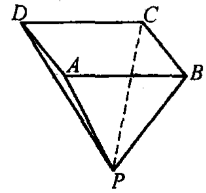
棱长.

16. 将四个半径为R的球两两相切地放在桌面,求上面一个球的球心到桌面的距离.



17. 在平面几何里,有勾股定理:"设$\triangle ABC$的两边AB,AC互相垂直,则$AB^2+AC^2=BC^2$".拓展到空间,类比平面几何的勾股定理,研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系,可以得出的正确结论是"设三棱锥$A-BCD$的三个侧面ABC,ACD,ADB两两相互垂直,则________".并证明你的类比结论.

18. 用一块钢锭浇铸一个厚度均匀,且全面积为2m^2的正四棱锥形有盖容器(见右图),设容器的高为$h\text{m}$,盖子边长为$a\text{m}$.



(1) 求a关于h的函数解析式;

(2) 设容器的容积为$V\text{m}^3$,则当h为何值时,V最大?求出V的最大值.

(求解本题时,不计容器的厚度)

题型二:空间几何体的表面积和体积

赛点提炼

1. 多面体的面积和体积公式

名称		侧面积($S_{侧}$)	全面积($S_{全}$)	体积(V)
棱柱	棱柱	直截面周长$\times l$	$S_{侧}+2S_{底}$	$S_{底}\cdot h=S_{直截面}\cdot l$
	直棱柱	ch		$S_{底}\cdot h$
棱锥	棱锥	各侧面面积之和	$S_{侧}+S_{底}$	$\frac{1}{3}S_{底}\cdot h$
	正棱锥	$\frac{1}{2}ch'$		
棱台	棱台	各侧面面积之和	$S_{侧}+S_{上底}+S_{下底}$	$\frac{1}{3}h(S_{上底}+S_{下底}+\sqrt{S_{上底}\cdot S_{下底}})$
	正棱台	$\frac{1}{2}(c+c')h'$		

表中S表示面积,c',c分别表示上、下底面周长,h表示高,h'表示斜高,l表示侧棱长.

2. 旋转体的面积和体积公式

名称	圆柱	圆锥	圆台	球
$S_{侧}$	$2\pi rl$	πrl	$\pi(r_1+r_2)l$	
$S_{全}$	$2\pi r(l+r)$	$\pi r(l+r)$	$\pi(r_1+r_2)l+\pi(r_1^2+r_2^2)$	$4\pi R^2$
V	πr^2h(即πr^2l)	$\frac{1}{3}\pi r^2h$	$\frac{1}{3}\pi h(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$	$\frac{4}{3}\pi R^3$

表中l,h分别表示母线、高,r表示圆柱、圆锥与球冠的底半径,r_1,r_2分别表示圆台上、下底面半径,R表示半径.

赛题探究

例 1 一个长方体的全面积是 20cm^2，所有棱长的和是 24cm，求长方体的对角线长.

讲解 设长方体的长、宽、高、对角线长分别为 $x$cm，$y$cm，$z$cm，$l$cm.

依题意得 $\begin{cases} 2(xy+yz+zx)=20, & ① \\ 4(x+y+z)=24. & ② \end{cases}$

由 ② 式等号两边平方得 $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=36.$ ③

由 ③ − ① 得 $x^2+y^2+z^2=16$，即 $l^2=16$，所以 $l=4(\text{cm})$.

小结 涉及棱柱面积问题的题目多以直棱柱为主，而直棱柱中又以正方体、长方体的表面积多被考查. 我们在平常的学习中要多建立一些重要的几何要素(对角线、内切)与面积、体积之间的关系.

例 2 如图 1 所示，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AB=5$，$AD=4$，$AA_1=3$，$AB\perp AD$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\frac{\pi}{3}$.

(1) 求证：顶点 A_1 在底面 $ABCD$ 上的射影 O 在 $\angle BAD$ 的平分线上；

(2) 求这个平行六面体的体积.

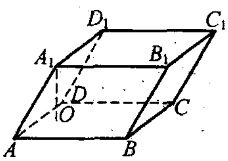


图 1

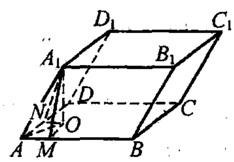


图 2

讲解 (1) 如图 2 所示，连结 A_1O，则 $A_1O\perp$ 底面 $ABCD$. 作 $OM\perp AB$ 交 AB 于点 M，作 $ON\perp AD$ 交 AD 于点 N，连结 A_1M，A_1N. 由三垂线定理得 $A_1M\perp AB$，$A_1N\perp AD$.

因为 $\angle A_1AM=\angle A_1AN$，

所以 $\text{Rt}\triangle A_1NA\cong\text{Rt}\triangle A_1MA$，

所以 $A_1M=A_1N$，从而 $OM=ON$.

所以点 O 在 $\angle BAD$ 的平分线上.

(2) 因为 $AM=AA_1\cos\frac{\pi}{3}=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，所以 $AO=\dfrac{AM}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

又因为在 $\text{Rt}\triangle AOA_1$ 中，$A_1O^2=AA_1{}^2-AO^2=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$，

所以 $A_1O=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以平行六面体的体积 $V=5\times4\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=30\sqrt{2}$.

例 3 一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，这个长方体对角线的长是 ( )

A. $2\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{2}$

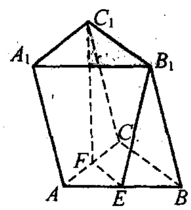
C. 6 D. $\sqrt{6}$

答案 D

讲解 易知长方体共一顶点的三边长分别为 $a=1$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}$，则对角线 l 的长为 $l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{6}$，故选 D.

小结 解题思路是将三个面的面积转化为解棱柱面积、体积的几何要素之一——棱长.

例 4 如图所示，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若点 E，F 分别为 AB，AC 的中点，平面 EB_1C_1 将三棱柱分成体积为 V_1，V_2 的两部分，那么 $V_1:V_2=$________.



答案 7∶5

讲解 设三棱柱的高为 h，上下底的面积为 S，体积为 V，则 $V=V_1+V_2=Sh$.

因为点 E，F 分别为 AB，AC 的中点，

所以 $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{4}S$，

$V_1=\frac{1}{3}h\left(S+\frac{1}{4}S+\sqrt{S\cdot\frac{1}{4}}\right)=\frac{7}{12}Sh$，

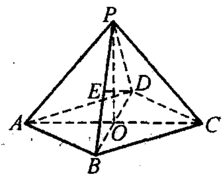
$V_2=Sh-V_1=\frac{5}{12}Sh$，

所以 $V_1:V_2=7:5$.

小结 解题的关键是棱柱、棱台间的转

化关系，先建立起求解体积的几何元素之间的对应关系，然后用统一的量建立比值，即可得到结论.

例 5 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面是边长为 2 的菱形，$\angle DAB=60^\circ$，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$PO\perp$ 平面 $ABCD$，PB 与平面 $ABCD$ 所成的角为 60°，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



讲解 (1) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，由 $PO\perp$ 平面 $ABCD$ 得 $\angle PBO$ 是 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角，$\angle PBO=60^\circ$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$BO=AB\sin30^\circ=1$，

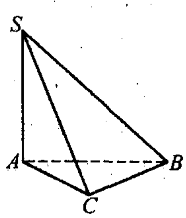
由 $PO\perp BO$ 得 $PO=BO\tan60^\circ=\sqrt{3}$.

而底面菱形的面积为 $2\sqrt{3}$，

所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=2$.

小结 本题重点考查线面垂直、面面垂直、二面角及其平面角、棱锥体积的求解问题. 在能力方面主要考查空间想象能力.

例 6 如图所示，在三棱锥 $S-ABC$ 中，$\angle SAB=\angle SAC=\angle ACB=90^\circ$，且 $AC=BC=5$，$SB=5\sqrt{5}$.



(1) 求证：$SC\perp BC$；

(2) 求侧面 SBC 与底面 ABC 所成二面角的大小；

(3) 求三棱锥的体积 V_{S-ABC}.

讲解 (1) 因为 $\angle SAB=\angle SAC=90^\circ$，

所以 $SA\perp AB$，$SA\perp AC$.

又因为 $AB\cap AC=A$，

所以 $SA\perp$ 平面 ABC.

由于 $\angle ACB=90^\circ$，即 $BC\perp AC$，

由三垂线定理得 $SC\perp BC$.

(2) 因为 $BC\perp AC$，$SC\perp BC$，

所以 $\angle SCA$ 是侧面 SCB 与底面 ABC 所成二面角的平面角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle SCB$ 中，$BC=5$，$SB=5\sqrt{5}$，$SC=\sqrt{SB^2-BC^2}=10$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle SAC$ 中 $AC=5$，$SC=10$，$\cos\angle SCA=\frac{AC}{SC}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$，

所以 $\angle SCA=60^\circ$，即侧面 SBC 与底面 ABC 所成的二面角的大小为 60°.

(3) 在 $\mathrm{Rt}\triangle SAC$ 中，

因为 $SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{75}$，

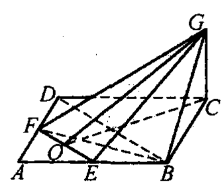
$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times5\times5=\frac{25}{2}$，

所以 $V_{S-ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ACB}\cdot SA=\frac{1}{3}\times\frac{25}{2}\times\sqrt{75}=\frac{125\sqrt{3}}{6}$.

小结 本题比较全面地考查了空间点、线、面的位置关系，要求对图形必须具备一定的洞察力，并进行一定的逻辑推理.

例 7 已知四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，点 E，F 分别是 AB，AD 的中点，GB 垂直于正方形 $ABCD$ 所在的平面，且 $GC=2$，求点 B 到平面 EFG 的距离.

讲解 如图所示，取 EF 的中点 O，连结 GB，GO，CD，FB 构造三棱锥 $B-EFG$.



设点 B 到平面 EFG 的距离为 h，$BD=4\sqrt{2}$，$EF=2\sqrt{2}$，$CO=\frac{3}{4}\times4\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

$GO=\sqrt{CO^2+GC^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{18+4}=\sqrt{22}$.

而 $GC\perp$ 平面 $ABCD$，且 $GC=2$，

由 $V_{B-EFG}=V_{G-EFB}$ 得 $\frac{1}{6}EF\cdot GO\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle EFB}\cdot GC$，即有 $h=\frac{2S_{\triangle EFB}\cdot GC}{EF\cdot GO}=\frac{\sqrt{22}}{11}$.

小结 该问题主要的求解思路是将点面的距离问题转化为体积问题. 构造以点 B 为顶