高中数学
解题方法指导

林炳华　主编

气象出版社

社科新书目：371-134　定价：6.40元
ISBN 7-5029-1750-0/G·0481

高中数学解题方法指导

林炳华　主编

气象出版社

（京）新登字046号

内 容 简 介

本书内容分为代数、三角、立体几何和解析几何四部分，共八章。按章节为专题进行编写，与高中数学教学同步进行，紧扣双基，突出各章节重点、难点和关键，配备了典型范例并加以分析评讲，适合高中各年级师生使用。

本书范例的编写，突出了解题方法，在探讨解题方法的基础上，注意积累经验，认真总结解题规律．力求通过每一个范例分析，活跃思维，开阔视野，加深对现行课本所学知识的认识，提高双基训练的技能，从而达到培养能力，发展智力的目的。

高中数学解题方法指导
林炳华　主编
责任编辑：顾仁俭　终审：毛耀顺
封面设计：严瑜仲　责任技编：岳景增　责任校对：白凌燕
气象出版社出版
（北京西郊白石桥路46号）
北京市昌平环球科技印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行　全国各地新华书店经销
开本：787×1092　1/32　印张：10.125　字数：222千字
1994年12月第1版　1994年12月第1次印刷
印数：1—13500　定价：6.40元
ISBN 7-5029-1760-0/G·0481

编委会名单

前　言

本书紧密配合高中课本，并与高中数学课本同步进行编写，并注意解题方法和解题思路的研究，进一步加强了对基础知识的理解，培养了分析问题的能力，开拓解题思路，寻找解题规律，掌握解题方法。

每章节的内容主要包括：内容概要、范例分析、达标训练和答案或提示。其范例和练习还具有源于课本、高于课本、基础性强、灵活多变、深浅适度、题型多样和复盖面广等优点。

本书主要特点是抓纲扣本、纲本结合，从高中数学教学实际出发，既有于学生掌握数学知识、发展能力、提高学习成绩，也有利助于高中数学教师剖析教材、精心备课、提高教学水平。但愿此书的出版对高中数学教师和各年级学生有所帮助和提高。

由于经验不足，问题在所难免，恳请使用本书的师生提出宝贵的意见和建议。

编者著

1994年3月于福州

目　录

第一章 函　数

§1 集　合

（一）内容概要

1．理解集合、子集、并集、交集、补集的概念；了解空集、全集、属于、包含、相等关系的意义；能掌握有关的术语和符号，以及一些简单的性质，如交换律、结合律、分配律、反演律和补集法则等．

2．掌握集合的并、交、补运算，能结合数集的性质．

3．能结合集合的内容，进一步掌握数形结合，等价转化等数学思想．

（二）范例分析

例1 写出以集合$A=\{3,4,\{1,2\}\}$的所有子集为元素的集合．

解：ϕ是A的子集，A含有3个元素，A含有1个元素的集合有3个：$\{3\}$、$\{4\}$、$\{\{1,2\}\}$；A含有2个元素的子集也有3个：$\{3,4\}$、$\{3,\{1,2\}\}$、$\{4,\{1,2\}\}$．A含有3个元素的子集就是A本身．故A的所有子集为元素的集合为

$$\{\phi,\{3\},\{4\},\{1,2\},\{3,4\},\{3,\{1,2\}\},\{4,\{1,2\}\},A\}.$$

例2 已知$A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且$A=B$，求$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2001}+\frac{1}{y^{2001}}\right)$的值．

分析：从要求的结论看，必须先求出x，y，而这需要通过A与B相等的意义及元素的性质求解．

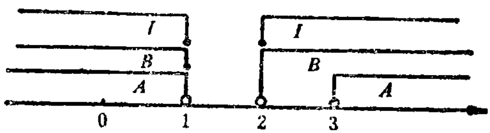
解：$\because A=B$，$\therefore 0\in A$，显然只能是 $\lg(xy)=0$，即 $xy=1$。

若 $x=|x|$，则 $xy=y$，可解得 $x=1$，$y=1$。这与集合中元素的互异性矛盾，因此有 $x=y$，且 $xy=|x|$，注意到已有 $xy=1$，所以解得 $x=y=-1$，代入所求式得值为 -2。

例3 已知 $I=\{x|x^2-3x+2\geqslant 0\}$，$A=\{x||x-2|>1\}$，$B=\{x|\frac{x-1}{x-2}\geqslant 0\}$，求 $\overline{A}$、$\overline{B}$、$A\cap B$、$A\cup B$、$A\cap\overline{B}$、$\overline{A}\cup B$、

分析：讨论集合与集合间的关系的问题常用画文氏图的方法；若集合的元素是某区间的实数时常画数轴；若集合的元素是点时常用直角坐标平面求解。本题画数轴注意集合的子、交、并、补的意义以及区间的"开"或"闭"即得解。

解：化简集合得：$I=\{x|2\leqslant x$ 或 $x\leqslant 1\}$，$A=\{x|x<1$ 或 $x>3\}$，$B=\{x|x\leqslant 1$ 或 $x>2\}$；如图：



$\therefore \overline{A}=\{x|x=1$ 或 $2\leqslant x\leqslant 3\}$，$\overline{B}=\{x|x=2\}$；

$A\cap B=\{x|x<1$ 或 $x>3\}$，$A\cup B=\{x|x\leqslant 1$ 或 $x>2\}=B$，

$A\cap\overline{B}=\varnothing$，$\overline{A}\cup B=\{x|x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 2\}=I$。

例4 已知 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，且 $A\cap B\supset\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求 a 的值。

分析：由条件知 $A\cap B$ 不空，$A\cap C$ 为空集，而 B 集合为 $B=\{2,3\}$，C 集合为 $C=\{-4,2\}$。$\therefore$ 元素 $3\in A$，即3为方程

$x^2-ax+a^2-19=0$的解，$\therefore a$可求。而$2\notin A$，若$2\in A$，则$A\cap C\neq\varnothing$不合。

解：$B=\{2,3\}$，$C=\{-4,2\}$，由题意：$3\in A$，代入A解得：$a=-2$或$a=5$。这时A中元素为：

当$a=-2$时，$A=\{3,-5\}$。

当$a=5$时，$A=\{2,3\}$。

显然$a=5$时，不合题意，$\therefore a=-2$。

说明：最后结果应注意检查是否满足元素的性质。

例5 已知R是全体实数，函数$f(x)=x^2+ax+b$，$(a,b\in R)$，$A=\{x|x=f(x),\ x\in R\}$，$B=\{x|f[f(x)]=x,\ x\in R\}$，(1)证明$A\subseteq B$；(2)当$A=\{-1,3\}$时，写出集合$B$。

分析：(1)只要证明对于$x_0\in A$，都有$x_0\in B$。(2)其实质是已知$-1=f(-1)$与$3=f(3)$，而要解方程$f[f(x)]=x$，$\therefore$只要先求出a，b，即可求解。

解：(1)若$x_0\in A$，则有$x_0=f(x_0)$。

$\therefore f[f(x_0)]=f[x_0]=x_0$，即$x_0$满足$f[f(x)]=x$，$x_0\in B$。证毕。

(2)由$A=\{-1,3\}$，$\therefore \begin{cases}-1=(-1)^2-a+b\\3=3^2+3a+b\end{cases}\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow\begin{cases}a=-1,\\b=-3.\end{cases}$$

$\therefore f(x)=x^2-x-3$。$\therefore f[f(x)]=x$化为：$(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$。

即：$(x^2-x-3)^2-x^2=0$，

$(x^2-3)(x^2-2x-3)=0$。

$\therefore\quad x_1=-1$，$x_2=3$，$y_{3,4}=\pm\sqrt{3}$。

$\therefore\quad B=\{-1,3,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$。

例6 设集合$A=\{(x,y)|y=ax^2,a>0\}$，$B=\{(x,y)|x^2+y^2-2by=0,b>0\}$，且$A\cap B=\{(0,0)\}$，求$b$的最大值。

分析：条件转化为方程$y=ax^2$与$x^2+y^2-2by=0$，只有零解时求b的最大值。

解：由$\begin{cases}y=ax^2\\x^2+y^2-2by=0\end{cases}\Longrightarrow x^2+a^2x^4-2bax^2=0$，

$\therefore$ $x=0$或$a^2x^2-2ab+1=0$。

由$\begin{cases}x=0\\y=ax^2\end{cases}$ 得：$x=0$，$y=0$。

$\because$ $A\cap B=\{(0,0)\}$，

$\therefore$ $a^2x^2-2ab+1=0$只有$x=0$的解或无实根，

若 $x=0$，则 $b=\dfrac{1}{2a}$。

若无实根，则$\Delta=0-4a^2(1-2ab)<0$， 得：$b<\dfrac{1}{2a}$。

$\therefore$ b的最大值为$\dfrac{1}{2a}$。

说明：要正确理解集合表述条件的实际意义。平面上两条曲线的交点问题等价于它们对应的函数组成的方程组的实数解问题。

例7 已知集合$A=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{y-2}=a+1\right.\right\}$，$B=\{(x,y)|(a^2-1)x+(a-1)y=15\}$，当实数$a$为何值时，$A\cap B=\varnothing$。

解：A的图形为l_1：$(a+1)x-y=2a-1$，但除去点(2，3)。

若$a=1$时，$B=\varnothing$，满足$A\cap B=\varnothing$。

若$a\neq 1$时，B的图形为l_2：$(a+1)x+y=\frac{15}{a-1}$。

如果$l_1 /\!/ l_2$，这时$a+1=0$，$\therefore a=-1$。

如果$l_1 \not/\!/ l_2$，又l_2过点$(2,3)$，则由$(a+1)\cdot 2+3=\frac{15}{a-1}$ 解得：$a=-4$或$a=\frac{5}{2}$。

$\therefore$ 综上可得：$a=1$，-1，-4，$\frac{5}{2}$。

对于用集合形式给出已知条件的综合题，要十分重视数形结合、以形助数的解题思想方法的运用。

（三）练习题

1．选择题

(1) 集合$\{0\}$与$\varnothing$的关系是（　　）

(A) $\{0\}=\varnothing$　　(B) $\{0\}\in\varnothing$

(C) $\varnothing\in\{0\}$　　(D) $\varnothing\subseteq\{0\}$

(2) 设$I=\{实数\}$，$M=\{x|x\geqslant 1\}$，$N=\{x|0\leqslant x<5\}$，则$\overline{M\cap N}=$（　　）

(A) $\{x|\leqslant x<5\}$　　(B) $\{x|x\geqslant 5\}$

(C) $\{x|x<1\}$　　(D) $\{x|x<1或x\geqslant 5\}$

2．填空题

(1)设$A=\{x|x=2n，n\in N\}$，$B=\{x|x=3n，n\in N\}$，$C=\{x|x=4n-2，n\in N\}$，则$(A\cup C)\cap B=$________。

(2)设$I=R$，$M=\{x|x\geqslant 1\}$，$N=\{x|x<0\}$，则$\overline{M\cup N}=$________。

3．已知$A=\{x||x-1|<C，C>0\}$，$B=\{x||x-3|>4\}$，且$A\cap B=\varnothing$，求C的范围。

4．已知$M=\{(x,y)||x|\leqslant a，|y|\leqslant a，a\geqslant 0\}$，$N=$

$\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$。问$a$为何值时：(1)$M\cup N=N$；(2)$M\cap N=M$。

5．若$A=\{x||x+1|<m\}$，$B=\left\{x\left|\frac{x^2+2x-8}{x^2+2x+4}<0\right.\right\}$，当$m$为何值时：

(1) $A=B$；　(2) $A\subset B$；　(3) $A\cap B=\varnothing$。

6．某班学生共50人，其中会下围棋的有35人，会打乒乓球的有40人，求：(1)只会下围棋不会打乒乓球的人数；(2)既会下围棋又会打乒乓球的人数。（学生中每人至少会一样）

（四）答案

1．(1)D，(2)D　2．(1)$\{x|x=6n,n\in N\}$，(2)$\{x|0\leqslant x<1\}$　3．$0<C\leqslant 2$　4．(1)$a\geqslant 1$，(2)$0\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$　5．(1)$m=3$，(2)$m<3$，(3)$m\leqslant 0$　6．(1)10人，(2)25人

§2　映射与函数

（一）内容概要

理解并掌握对应、映射和函数等概念，注意对映射、一一映射、逆映射、函数和反函数这些概念之间的区别和联系。能根据函数的解析式写出它的定义域、值域，并会求之。能将现实中的某些变量间的关系转换成解析式表示的函数关系。熟悉掌握函数的单调性、奇偶性等性质，会运用其性质解决有关问题。

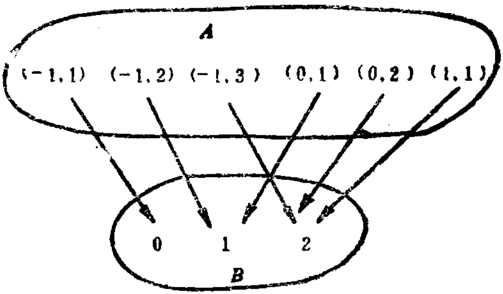
（二）范例分析

例1　记$A=\{(x,y)||x|<2\ \ x\in Z,\ \ y\in N$ 且 $x+y<3\}$，$B=\{0,1,2\}$，从A到B的对应关系f：$(x,y)\to x+y$，

试画出对应图，并判断这个对应是否为映射？为什么？

解：由$|x|<2$，$x\in Z$得：$x=\{-1,0,1\}$。又由$y\in N$，$x+y<3$得：$x=0$时，$y=1,2$；$x=1$时，$y=1$；$x=-1$时，$y=1,2,3$。

于是集合$A=\{(-1,1)$，$(-1,2)$，$(-1,3)$，$(0,1)$，



$(0,2)$，$(1,1)\}$，从集合A到集合B对应图见下图。在f的作用下，集合A中的每一个元素在B中有唯一确定的元素与它对应，所以这个对应是从集合A到集合B的映射。

评注：用集合的观点深刻理解映射的涵义。判断映射必须满足三个条件：①集合A，B及对应法则是确定的，②对应法则f具"有序性"。③对f：$A\to B$要求对任意$a\in A$有唯一$b\in B$与之对应。

例2 已知$A=N$，$B=\left\{\frac{1}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{7}\cdots\cdots\right\}$，$f$是从集合$A$到集合$B$的映射，且$f$：$x\to y=\frac{2x-1}{2x+1}$（$x\in A$，$y\in B$）。

(1)求在f作用下，象是$\frac{15}{17}$的原象；（2）求f^{-1}。

解：(1)$\frac{15}{17}\in B$，设$\frac{15}{17}$在A中的原象是x_0，则由$\frac{2x_0-1}{2x_0+1}=\frac{15}{17}$解得$x_0=8$，即在$f$的作用下，$\frac{15}{17}$的原象是8。

(2)由 $y=\frac{2x-1}{2x+1}$得$2(y-1)x=-(y+1)$。

依题意$y\in B$　$\therefore y\neq 1$，故$x=\frac{1+y}{2(1-y)}$。

$\therefore$　f^{-1}：$y\to x=\frac{1+y}{2(1-y)}$。$(y\neq 1)$

评注：通过本题的求解对映射中象和原象的意义有了深刻理解，并明确了求逆映射的方法。

例3　试证映射f：$N\to M$，$n\to m=2n+1$，是一一映射．其中N是自然数集，$M=\{m\mid m=2n+1,\ n\in N\}$。

证明：(1)设n_1，$n_2\in N$，且$n_1\neq n_2$，则$m_1=2n_1+1\in M$，$m_2=2n_2+1\in M$，并且$m_1-m_2=2(n_1-n_2)\neq 0$，即$m_1\neq m_2$。这说明N中不同的元素，在M中有不同象。

(2)设$m_3\in M$，且$m_3=2n_3+1$，则$n_3=\frac{m_3-1}{2}\in N$，即对于M中的任一元素m_3，均有N中的唯一元素$\frac{m_3-1}{2}=n_3$作为它的原象，故f：$N\to M$是N到M上的一一映射。

评注：一一映射与"一对一"是同义的，它要求集合A中每一个元素在集合B中有不同的象，而且集合B中的每一个元素在A中都有原象。本题是严格按一一映射定义证明的。

例4　若y是x的函数，$x=\frac{3t^2}{1+t^2}$，$y=\frac{5-t^2}{1+t^2}$，求y与x