奥林匹克金牌之路丛书

MATHS

数学 高考到竞赛

罗增儒 主编

$y=ax^2$

陕西师范大学出版社

奥林匹克金牌之路丛书

MATHS

数学 高考到竞赛

主　编　罗增儒

编　写　罗增儒　潘智民　杨忠新

陈　彪　王德生　赵晓玲

岳建良　薛党鹏　丁志勇

陕西师范大学出版社

图书代号:JF179000

图书在版编目(CIP)数据

高考到竞赛·数学/罗增儒主编. －西安:陕西师范大学出版社,2000.11
(奥林匹克金牌之路丛书)
ISBN 7－5613－2129－5/G·1535
Ⅰ.高… Ⅱ.罗… Ⅲ.数学课－高中－升学参考资料
Ⅳ.G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 76045 号

责任编辑 朱永庚
装帧设计 陶安惠
责任校对 朱永庚
出版发行 陕西师范大学出版社
社　　址 西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062)
E－mail: nuph@pub.xaonline.com
经　　销 新华书店
印　　刷 蓝田立新印刷厂
开　　本 850×1168 1/32
印　　张 15.625
字　　数 382 千字
插　　页 2
版　　次 2001 年 1 月第 1 版
印　　次 2001 年 1 月第 1 次
定　　价 16.00 元

开户行:西安工行小寨分理处 账 号:216－144610－44－815
读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与发行科联系、调换。
电 话:(029)5251046(传真) 5233753 5307864

作 者 简 介

罗增儒,教授。1945年生,广东惠州人,陕西师范大学教育考试研究所所长、硕士生导师。获曾宪梓教师奖,享受国务院的政府特殊津贴。是中国数学奥林匹克首批高级教练,长期从事数学竞赛的命题、解题、辅导和理论研究工作。1984年以来,已为全国初中联赛、高中联赛、冬令营提供了十余道正式试题,多次聘为高、初中联赛命题组成员。1992年,曾受到中国数学奥委会与中国数学普委会的联合表彰;1993年,他所主持的"奥林匹克数学学科建设"研究课题获全国高校优秀教学成果国家级二等奖。主编的小学、中学、大学数学奥林匹克丛书受到广泛的欢迎。代表作有《数学竞赛导论》、《数学解题学引论》。

内 容 简 介

本书以高考为起点，以竞赛为落点，以专题系统讲授为特点，将数学高考与竞赛的重点、热点组织为11章41小节.多数章节的内容是直接为高考服务的，同时兼为竞赛服务；少数章节（如第9、10、11章）则主要是为竞赛服务的.把两个层次的目标结合起来，是想使读者们“退可站稳高考脚跟，进可迈上竞赛高台”.

前言

☞由陕西师范大学出版社策划、出版的奥林匹克金牌之路丛书，以其一流的作者、精良的内在质量，赢得了读者的认可。自出版以来，一直常销不衰。1999 **年度被评为全国教育图书优秀畅销书**。

为了满足市场需要，完善本丛书的体系，形成规模效应，我们借势而动，对已出版的初、高中数、理、化进行了修订。新增了计算机、生物、英语三个科目。形成三大系列：**竞赛辅导系列、竞赛解题指导系列、高考到竞赛系列**。这三大系列图书跨越小学、初中、高中三个阶段，门类齐全，成龙配套，适用于不同层次的读者。在知识方面，以教材的加深加宽为基础，有较低的起点、较高的落点、较宽的跨度。在能力方面，通过课本知识与课外知识的相互渗透，使不同层次的学生都有机会能力超前。所聘请的作者均为全国各科竞赛方面的权威人士。

高考到竞赛图书的设计思路：

以高考为起点，以竞赛为落点，以专题系统讲授为特点。把两个层次的目标结合起来，使读者“退可站稳高考脚跟，进可摘取竞赛金牌”。

高考到竞赛图书的出版目的:

瞄准高考、覆盖竞赛。强化综合训练,拓展解题视野。使高中学生提早做好应考和夺冠的准备,达到高考和竞赛双丰收。

每章设三部分内容:

第一部分,知识要点。

1. 高考基本要点。结合 3 + X 最新的高考动向,将高考要求的内容列出并作出简要阐释。

2. 提高与延伸。参照高中竞赛大纲的要求,将提高和延伸的知识部分加以详释。

第二部分,典型例题。

围绕高考、竞赛的重点和热点,设置达到高考要求、适应竞赛需要的典型例题,使读者从中获得洞察力和创造机智。

第三部分,训练题。

有针对性地选择和设计一些对高考、竞赛有指导意义的名题、佳题、新题。为读者提供一个强化知识、开阔视野、提高素质能力的机会。

最后附有训练题的参考答案,对较难的题目,给出了解答提示。

《金牌之路》丛书选题策划组

2000 年 11 月

目录

第1章 集合与函数

本章的主要内容有：集合的有关概念与运算；容斥原理；函数的概念和性质；反函数的概念与图像；函数方程；幂函数、指数函数、对数函数的定义、图像和性质；指数方程与对数方程等15个知识点．其中容斥原理、函数方程为竞赛内容，其余13个知识点为高考内容．

高考考试要求：

（1）理解集合、子集、交集、并集、补集的概念．了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义．能掌握有关的术语和符号，能正确地表示一些较简单的集合．

（2）了解映射的概念，在此基础上理解函数及其相关概念．掌握互为反函数的函数图像间的关系．

（3）理解函数的单调性和奇偶性的概念，并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性与图像的对称性的关系描绘函数图像．

（4）掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图像和性质，并会解简单的指数方程和对数方程．

数学竞赛要求学生必须对集合与函数的高考范围的各知识点有更加深入、更高层次的理解和掌握．集合、函数的思想与方法，在竞赛数学中占有十分重要的地位．另外，学生还需掌握集合分拆、容斥原理、函数方程等方面的知识和方法．

无论是竞赛还是高考，都十分重视对二次函数的考查．

§1－1 集合

一、知识要点

集合，几乎是每年高考与竞赛的必考内容．一般而言，一是考查集合本身的知识，二是考查集合语言与集合思想的运用．对后者的学

习与训练，将主要分散在后续各章节中进行.

(一) 集合概念

首先要抓住元素这个关键，弄清集合里的元素是什么. 注意集合的元素具有的确定性、互异性和无序性. 另外，要掌握集合的表示方法(列举法、描述法)和表述方式(图形、字母和汉字语言)，牢固掌握集合间的包含关系与交、并、补运算.

(二) 集合相等

两集合相等是高考中要求考生"了解"的考点，一般以较容易的选择题形式出现. 这里我们将要求加强到"理解"层次，以接近竞赛的要求.

对有关两个集合相等的问题，可利用集合相等的定义以及对相等概念的理解，采用如下方法或思路去求解：

1. 验证两集合的元素相同，即两集合中各元素对应相等.

2. 利用定义，证两集合互为子集.

3. 若是用描述法表示的集合，则两集合的属性能够互推(充要条件)，即等价.

4. 对于两个有限集合，则元素个数相等、各元素之和相等、之积相等是两集合相等的必要条件.

(三) 有限集合的元素个数、容斥原理

记有限集合 M 的元素个数为 $n(M)$. 如下集合 A,B,C 等以及全集 I 都是有限集. 由图 1－1－1 和图 1－1－2 可知：

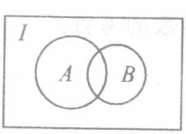

图 1－1－1

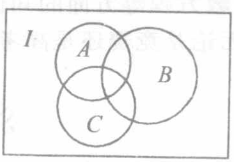

图 1－1－2

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B);$$

$$\begin{aligned}n(\overline{A\cup B})&=n(I)-n(A\cup B)\\&=n(I)-n(A)-n(B)+n(A\cap B);\end{aligned}$$

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$$
$$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C);$$
$$n(\overline{A\cup B\cup C})=n(I)-n(A\cup B\cup C)$$
$$=n(I)-n(A)-n(B)-n(C)$$
$$+n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-n(A\cap B\cap C).$$

一般地,有关于 n 个有限集合的并集合或并集的补集的元素个数的类似公式成立,称该结论为容斥原理.

(四) 有限集合的子集个数

此问题也属于高考考查内容.

另知,集合 $\{a\}$ 的子集有 $\varnothing$、$\{a\}$,共 2 个;集合 $\{a,b\}$ 的子集有 $\varnothing$、$\{a\}$、$\{b\}$、$\{a,b\}$,共 2^2 个;集合 $\{a、b、c\}$ 的子集有 $\varnothing$,$\{a\}$、$\{b\}$、$\{c\}$、$\{a,b\}$、$\{b,c\}$、$\{c,a\}$、$\{a,b,c\}$,共有 2^3 个;一般地,集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的子集共有 2^n 个,可在排列组合一章中得到证明.①

二、典型例题

例 1 已知集合 $M=\{$直线$\}$,$N=\{$抛物线$\}$,则 $M\cap N$ 中元素的个数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 不确定

□**解**　M 中的元素为直线,N 中的元素为抛物线(它们都是无限集),由于既是直线且又是抛物线的图形不存在,故 $M\cap N=\varnothing$,$n(M\cap N)=n(\varnothing)=0$,选 A.

【评注】 若误以为 M,N 中的元素分别是一条直线或一条抛物线上点,则 $M\cap N$ 中元素即为交点,势必选 D.

例 2 设集合 $A=\{1,a,b\}$,$B=\{a,a^2,ab\}$,且 $A=B$,求实数 a,b.

【分析】 由 $A=B$,则可利用元素对应相等列方程,也可利用各

---

① 除了转化为 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n$ 一法外,还可用乘法原理去解:作一个子集可通过 n 个步骤去完成,每一步,即对每一个元素 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$,有两种做法,或"放入"子集中,或"放在"子集外,故完成方法有 2^n 种,从而子集共有 2^n 个.

元素的和相等与积相等列方程，解出 a、b.

□解　由元素的互异性知，$a\neq 1, b\neq 1, a\neq 0$. 又由 $A=B$ 得两集合的元素之积、之和分别相等，有

$$\begin{cases}1\cdot a\cdot b=a\cdot a^2\cdot ab,\\ 1+a+b=a+a^2+ab.\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}ab(a-1)(a^2+a+1)=0,\\ (a-1)(1+a+b)=0.\end{cases}$$

由 $a\neq 0, a^2+a+1>0$ 知，$b=0$，进而有 $a=-1$.
检验知，此时 $A=B=\{1,-1,0\}$，故 $a=-1, b=0$ 为所求.

【评注】 若采用元素对应相等确定等量关系，可先从 A、B 中去掉共有的 a 后，列出等式

$$\begin{cases}a^2=1,\\ ab=b;\end{cases} \text{或} \begin{cases}ab=1,\\ a^2=b.\end{cases}$$

注意到集合元素互异性，仅解到 $a=-1, b=0$.

例3 设 $A=\{x\mid x^2+ax+b=0\}, B=\{x\mid x^2+cx+15=0\}$，若 $A\cup B=\{3,5\}, A\cap B=\{3\}$，全集 $I=\{1,2,3,4,5\}$，求 $\overline{A}\cap B$.

【分析】 要求 $\overline{A}\cap B$，需通过 $A\cup B$、$A\cap B$ 提供方程解的信息，确定出两个方程，进而确定出 A、B 即可.

□解　B 中的方程有已知数 15，以此作为解题的突破口. 由 $A\cap B=3$ 知，$3\in B$，据韦达定理，有

$$\begin{cases}3+x_2=-c,\\ 3x_2=15.\end{cases}$$

得　$x_2=5, c=-8$.

这时，$B=\{3,5\}=A\cup B$，但 $A\cap B=\{3\}$，故 $A=\{3\}$（即二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有等根 3，方程为 $x^2-6x+9=0$）. 进而得 $\overline{A}\cap B=\{5\}$.

【评注】 通过对交集概念的实质的理解，一般在求 $M\cap N$ 时，在已知集合 M 的全部元素的情况下，只需在 M 中确定出哪些同时属于 N 的元素，便可构成 $M\cap N$，而不必确定出 N 的全部元素. 这种思想很重要，也很常用. 例如在本题中，抓住补集概念的实质，只确

定 B 中哪些元素不在 A 中(不等于 3),而不必求出 $\overline{A}$.

例 4 有 100 种食品,其中含维生素 A 的 72 种,含维生素 C 的有 54 种,求同时含维生素 A、C 的食品种数的最大值和最小值.

【分析】 显然在此题中,并集的元素个数的最值易解决,故可应用容斥原理,将交集的元素个数的最值问题化为并集的相应问题.

□**解** 设含有维生素 A、C 的食品种类的集合分别为 M、N. 则 $n(M)=72$, $n(N)=54$. 得

$$n(M\cap N)=72+54-n(M\cup N)$$

显然 $n(M\cup N)$最大值为 100,最小值为 72,故 $n(M\cap N)$的最小值为 26,最大值为 54. 即同时含有维生素 A、C 的食品种数的最小值为 26,最大值为 54.

【评注】 应用文氏图,能直观地求得最值(取 100 种食品作为全集 I):

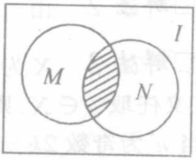

图 1-1-3

显然当 M、N 被"拉开"到最大限度,即 $M\cup N$ 充满 I 时,M、N 掺合部分最小,这时 $n(M\cup N)=100$, $n(M\cap N)$的最小值为 26. 而 M、N 掺合部分最大时,即 $M\supset N$ 时 $n(M\cap N)$最大,其值为 54.

例 5* 一次会议有 1990 位数学家参加,每人至少有 1327 位合作者,求证,可以找到 4 位数学家,他们中每两个人都合作过.[②]

□**解** 记数学家们 $a_i(i=1,2,\cdots,1990)$,与 a_i 合作过的数学家组成集合 A_i. 任取合作过的两位数学家记为 a_1,a_2,由

$$n(A_1)\geqslant 1327,\ n(A_2)\geqslant 1327,\ n(A_1\cup A_2)\leqslant 1990.$$

得 $n(A_1\cap A_2)=n(A_1)+n(A_2)-n(A_1\cup A_2)\geqslant 1327\times 2-1990>0$.
从而存在数学家 $a_3\in A_1\cap A_2$, $a_3\neq a_1$, $a_3\neq a_2$.

又
$$\begin{aligned} & n(A_1\cap A_2\cap A_3)\\ &=n(A_1\cap A_2)+n(A_2)-n((A_1\cap A_2)\cup A_3)\\ &\geqslant(1327\times 2-1990)+1327-1990=1. \end{aligned}$$

② 标有 * 的题目,或者难度较大(为竞赛培训之用),或者涉及后续知识,可留待后面再做处理. 此仅供学有余力者选用. 以下同.

从而存在数学家 $a_4\in A_1\cap A_2\cap A_3$，$a_4\neq a_1,a_2,a_3$. 得数学家 a_1,a_2,a_3,a_4 两两合作过.

【评注】 本题的实质是证明 $A_1\cap A_2\cap A_3\neq\varnothing$，通过容斥原理的计算来完成.

例 6 (1984 年高考题)如果集合 $X=\{x\mid x=2n+1,n\in Z\}$，$Y=\{y\mid y=4k\pm1,k\in Z\}$，那么(　　).

(A) $X\subset Y$ (B) $Y\subset X$ (C) $X=Y$ (D) $X\neq Y$

□**解法 1** 由

$$X=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\},$$
$$Y=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\},$$

有 $X=Y$. 选 C.

□**解法 2** 由 $2n+1=\begin{cases}4k+1, & n=2k,\\ 4k-1, & n=2k-1,\end{cases}$ 知 $X=Y$，选 C.

□**解法 3** X 为奇数的集合，而 Y 中的元素为奇数，故有 $Y\subseteq X$.

又任取 $x\in X$，则 $x=2n+1$，当 n 为偶数 $2k$ 时，$x=4k+1\in Y$；当 n 为奇数 $2k-1$ 时，$x=4k-1\in Y$，故 $X\subseteq Y$.

所以 $X=Y$.

□**解法 4** (选择题的逻辑分析法)首先 $X\supseteq Y$，若 $X\supset Y$ 真，从而 D 真，这与选择支"有且仅有一项成立"矛盾，故 B 不真. 得 $X=Y$.

□**解法 5** (选择题的逻辑分析法)(C)、(D)是矛盾关系，必有一真一假，从而(A)，(B)均假，又由 $X\supseteq Y$ 且(B)假，得(C)真.

例 7 一个集合含有 10 个互不相同的两位数. 试证，这个集合必有 2 个无公共元素的子集合，此两子集的各数之和相等.

证明 已知集合有 $2^{10}-1=1023$ 个不同的非空子集，每个子集内各数之和都不超过 $99+98+\cdots+90=945<1023$，故一定存在 2 个不同的子集，其元素之和相等. 划去它们共有的数字，可得两个无公共元素的非空子集，其所含各数之和相等.

【评注】 此题事实上构造了一个抽屉原理模型. 计算数字和得最多有 945 个"抽屉"，计算子集得 1023 个"苹果"，由此得出两个数字和相等的子集.

习题 1－1

（一）选择题

1. 在下列关系中，正确的是（　　）.③

(A) $\varnothing \in \{\varnothing\}$ 且 $\varnothing \subset \{\varnothing\}$　　(B) $0 \subseteq \{0\}$ 且 $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

(C) $0=\{0\}$ 且 $\varnothing=\{\varnothing\}$　　(D) $\varnothing \subseteq \{0\}$ 且 $0 \in \{\varnothing\}$

2.（上海 1995 年高考题）已知全集 $I=N$，集合 $A=\{x \mid x=2n, n \in N\}$，$B=\{x \mid x=4n, n \in N\}$，则 $I=$（ D ）.

(A) $A \cup B$　　(B) $\overline{A} \cup B$

(C) $A \cup \overline{B}$　　(D) $\overline{A} \cup \overline{B}$

3. $x \in A \cap B$ 的否定命题是（ D ）.

(A) $x \notin B$ 且 $x \notin A$　　(B) $x \notin A \cup B$

(C) $x \in A$ 但 $x \notin B$　　(D) $x \notin A$ 或 $x \notin B$

4. 若集合 $P \subseteq Q$，I 为全集，则下列关系中不正确的是（ D ）.

(A) $P \cup Q \subseteq Q$　　(B) $P \cap Q \supseteq P$

(C) $\overline{P} \supseteq \overline{Q}$　　(D) $P \cap Q \subset P \cup Q$

（二）填空题

1. 已知 $A=\{x, xy, \lg(xy)\}$，$B=\{0, |x|, y\}$，且 $A=B$，则 $x=$ -1，$y=$ -1.

2. 设全集 $I=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{2,|a+1|\}$，则 $\overline{A}=$________.

3. 已知集合 $M=\left\{x \left| \dfrac{x+1}{2} \in N\right.\right\}$，$P=\{x \mid x=3k, k \in N\}$，$I=N$. 则 $\overline{M} \cap P=$ 6k

4. 设非空集合 $A \subseteq \{1,2,\cdots,7\}$，且当 $a \in A$ 时必有 $8-a \in A$，这样的 A 共有______个.

（三）对于集合 $M=\{x \mid x=3n, n=1,2,3,4\}$，$N=\{x \mid x=3^k, k=1,2,3\}$. 若有集合 S 满足 $M \cap N \subseteq S \subseteq M \cup N$，则这样的 S 有多

③ 以空集为元素的集合 $\{\varnothing\}$ 不是空集，可形象称为：空箱子放进空房间，空房不空.