SHUXUE

主编 曹程锦

全国高中数学联赛冲刺

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

SHUXUE

数学竞赛之窗丛书

◎ 高中数学省级预赛指南

◎ 高中数学竞赛真题评析

◎ 全国高中数学联赛冲刺

◎ 数学竞赛思维方法指导

ISBN 978-7-308-06051-6

9 787308 060516 >

定价:15.00元

全国高中数学联赛冲刺

主　编：曹程锦
编　委：黎金传　王卫华　宋　程　黄志军
李　潜　虞金龙　肖　军　曹志华
黄耀平　丁永清

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国高中数学联赛冲刺/曹程锦主编. —杭州：浙江大学出版社，2008.8
ISBN 978-7-308-06051-6

Ⅰ. 全… Ⅱ. 曹… Ⅲ. 数学课—高中—习题
Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 091732 号

全国高中数学联赛冲刺
曹程锦 主编

责任编辑 杨晓鸣 吴 慧(特邀)
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn)
电话：0571－88925592，88273066(传真)
排 版 杭州大漠照排印刷有限公司
印 刷 富阳市育才印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 10
字 数 240 千
版 印 次 2008 年 8 月第 1 版 2008 年 8 月第 1 次印刷
印 数 0001—8000
书 号 ISBN 978-7-308-06051-6
定 价 15.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88925591

前　　言

我国的数学竞赛活动在老一辈数学家的倡导和众多数学工作者、数学教师的共同努力下蓬勃发展，取得了丰硕的成果和丰富的经验，特别是在国际数学奥林匹克中，多次获得团体总分第一。

这一系列好成绩的取得，无疑与各学校对优秀学生的培养是分不开的，广大数学竞赛辅导老师在其中付出了很大的心血；同时，我国数学竞赛的深厚土壤和完善的竞赛选拔机制也应该是取得优秀成绩的一个重要因素。

随着中国科协《关于进一步加强全国五项学科竞赛省级赛区组织管理工作的通知》的颁发，我国数学竞赛活动基本形成了“省级预赛→全国高中数学联赛→中国数学奥林匹克(冬令营)→中国数学奥林匹克国家集训队→国际数学奥林匹克中国国家队”的一整套选拔模式。

在这样一个选拔机制下，一个优秀的同学要脱颖而出，必须“过五关，斩六将”，这就使得一个系统、有效的训练显得尤为必要。为此，我们组织了一些专家和中国奥数教学联盟学校的一些一线辅导老师编写了本套丛书。

在本丛书的编写过程中，我们引用了大量的国内外数学竞赛试题，这里对这些赛题的命题老师表示感谢；同时参考了大量的文章和研究资料，引用了一些解题成果，部分成果我们在书中作了说明，对这些成果的发表人表示感谢。

本丛书分为四册，分别是《高中数学省级预赛指南》、《高中数学竞赛真题评析》、《全国高中数学联赛冲刺》和《数学竞赛思维方法指导》。本丛书在构思和编写过程中，着重各项竞赛的针对性，既有知识和方法的系统介绍，又有竞赛真题的展示；既有对最新经典试题的评析，又有最新的模拟训练，使得广大同学可以作为一个系统训练教材使用。

《高中数学省级预赛指南》内容分为两部分：第一部分在 2007 年度全国各省、市、自治区的预赛试题和省市数学竞赛中精选出了 18 套试题，并对每个问题加以详细的分析解答(包括选择和填空题)，第二部分按照各地省级预赛的模式配备 5 套预赛模拟试题，该模拟题大部分为自编或改编试题，具有良好的测试功能。本册供参加预赛的学生使用。

《高中数学竞赛真题评析》对 2007 年度国内外一些大型竞赛的试题进行分类评析。具体分为五大板块：不等式问题评析，代数问题评析，数论问题评析，平面几何问题评析，组合问题评析。所选试题涵盖东南竞赛、女子竞赛、西部竞赛、冬令营、中国国家队选拔考试以及国际数学奥林匹克、中国香港地区、美国、俄罗斯、日本、韩国、英国、保加利亚、罗马尼亚、越南、加拿大、亚太地区、巴尔干

地区、伊朗等试题质量较高的数学竞赛。在全书的最后，附上了各项竞赛的完整索引。本册供参加全国高中联赛加试、冬令营、集训队的学生使用。

《全国高中数学联赛冲刺》内容分为三部分，第一部分是对最近两年联赛试题的评析，并对未来的联赛做一个展望和预测，第二部分是联赛模拟训练题，第三部分是联赛训练题的详细解答。本册适合作为全国联赛前的强化训练。

《数学竞赛思维方法指导》内容分为两个部分，第一部分是高中数学联赛专题讲座，对联赛中的重点内容，做专题辅导，并在每讲之后配备相应的练习题，旨在测试每讲的学习效果。第二部分是数学奥林匹克解题思想方法和技巧，着重讲解数学竞赛中的一些常用思想方法以及数学奥林匹克解题技巧。

由于编者水平有限，书中难免有不当之处，欢迎读者批评指正。

编者

2008年7月

目　　录

一、全国高中数学联赛试题解析

2005 年全国高中数学联赛试题解析

一、选择题(本题满分 36 分,每小题 6 分)

1. 使关于 x 的不等式 $\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}\geqslant k$ 有解的实数 k 的最大值是　　(　　)

A. $\sqrt{6}-\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{6}+\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

【答案】 D.

【解 1】 令 $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}$, $3\leqslant x\leqslant 6$,

则 $y^2=(x-3)+(6-x)+2\sqrt{(x-3)(6-x)}$

$\leqslant 3+[(x-3)+(6-x)]=6$.

$\therefore 0<y\leqslant\sqrt{6}$,

$\therefore$ 实数 k 的最大值为 $\sqrt{6}$.

【解 2】 易知 $3\leqslant x\leqslant 6$, 令 $\sqrt{x-3}=\sqrt{3}\sin\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2})$, 则 $x=3+3\sin^2\alpha$, $\sqrt{6-x}=\sqrt{3}\cos\alpha$.

故 $\sqrt{6}\geqslant\sqrt{3}(\sin\alpha+\cos\alpha)\geqslant\sqrt{3}$.

$\therefore k$ 最大值为 $\sqrt{6}$.

2. 空间四点 A、B、C、D 满足 $|\overrightarrow{AB}|=3$, $|\overrightarrow{BC}|=7$, $|\overrightarrow{CD}|=11$, $|\overrightarrow{DA}|=9$, 则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的取值　　(　　)

A. 只有一个　　B. 有二个

C. 有四个　　D. 有无穷多个

【答案】 A.

【解】 注意到 $3^2+11^2=130=7^2+9^2$, 由于 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\mathbf{0}$, 则

$$DA^2=\overrightarrow{DA}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2$$
$$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB})$$
$$=AB^2-BC^2+CD^2+2(\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB})$$
$$=AB^2-BC^2+CD^2+2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}),$$

即　$2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=AD^2+BC^2-AB^2-CD^2=0$,

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 只有一个值 0.

3. $\triangle ABC$ 内接于单位圆,三个内角 A、B、C 的平分线延长后分别交此圆于 A_1、B_1、C_1. 则 $\dfrac{AA_1\cos\frac{A}{2}+BB_1\cos\frac{B}{2}+CC_1\cos\frac{C}{2}}{\sin A+\sin B+\sin C}$ 的值为　　(　　)

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

【答案】 A.

【解 1】 连 BA_1, 则

$$AA_1=2\sin(B+\frac{A}{2})$$
$$=2\sin(\frac{A+B+C}{2}+\frac{B}{2}-\frac{C}{2})$$
$$=2\cos(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}).$$

$\therefore AA_1\cos\frac{A}{2}=2\cos(\frac{B}{2}-\frac{C}{2})\cos\frac{A}{2}$

$=\cos\frac{A+B-C}{2}+\cos\frac{A+C-B}{2}$

$=\cos(\frac{\pi}{2}-C)+\cos(\frac{\pi}{2}-B)$

$=\sin C+\sin B$,

同理, $BB_1\cos\frac{B}{2}=\sin A+\sin C$,

$CC_1\cos\frac{C}{2}=\sin A+\sin B$.

$\therefore AA_1\cos\frac{A}{2}+BB_1\cos\frac{B}{2}+CC_1\cos\frac{C}{2}$

$=2(\sin A+\sin B+\sin C)$,

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{2(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sin A+\sin B+\sin C}=2.$

【解 2】 特殊值法. 取 $\triangle ABC$ 为正三角形，则 AA_1,BB_1,CC_1 均为外接圆直径，且 $A=B=C=60^\circ$，从而所求分式等于

$$\frac{3\times 2\cos\dfrac{A}{2}}{3\sin A}=2.$$

4. 如图 1，$ABCD-A'B'C'D'$ 为正方体. 任作平面 α 与对角线 AC' 垂直，使得 α 与正方体的每个面都有公共点，记这样得到的截面多边形的面积为 S，周长为 l，则（　　）

A. S 为定值，l 不为定值

B. S 不为定值，l 为定值

C. S 与 l 均为定值

D. S 与 l 均不为定值

【答案】 B.

【解】 将正方体切去两个正三棱锥 $A-A'BD$ 与 $C'-D'B'C$ 后，得到一个以平行平面 $A'BD$ 与 $D'B'C$ 为上、下底面的几何体 V（如图 1），V 的每个侧面都是等腰直角三角形，截面多边形 W 的每一条边分别与 V 的底面上的一条边平行，将 V 的侧面沿棱 $A'B'$ 剪开，展平在一张平面上，得到一个 $\square A'B'B_1A_1$，而多边形 W 的周界展开后便成为一条与 $A'A_1$ 平行的线段（如图 2 中 $E'E_1$），显然 $E'E_1=A'A_1$，故 l 为定值.

当 E' 位于 $A'B'$ 中点时，多边形 W 为正六边形，而当 E' 移至 A' 处时，W 为正三角形，易知周长为定值 l 的正六边形与正三角形面积分别为 $\dfrac{\sqrt{3}}{24}l^2$ 与 $\dfrac{\sqrt{3}}{36}l^2$，故 S 不为定值.

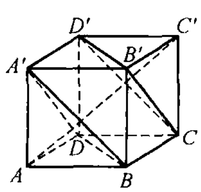

图 1

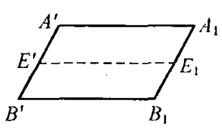

图 2

5. 方程 $\dfrac{x^2}{\sin\sqrt{2}-\sin\sqrt{3}}+\dfrac{y^2}{\cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3}}=1$ 表示的曲线是（　　）

A. 焦点在 x 轴上的椭圆

B. 焦点在 x 轴上的双曲线

C. 焦点在 y 轴上的椭圆

D. 焦点在 y 轴上的双曲线

【答案】 C.

【解】 $\because \sqrt{2}+\sqrt{3}>\pi$，$\therefore 0<\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{2}<\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \cos(\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{2})>\cos(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2})$，即 $\sin\sqrt{2}>\sin\sqrt{3}$. 又 $0<\sqrt{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\sqrt{3}<\pi$，$\therefore \cos\sqrt{2}>0$，$\cos\sqrt{3}<0$，

$\therefore \cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3}>0$，方程表示的曲线是椭圆.

$\because (\sin\sqrt{2}-\sin\sqrt{3})-(\cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3})$

$=2\sqrt{2}\sin\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\sin(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{4})$（*）

$\because -\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}<0$，

$\therefore \sin\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}<0.$

$\because \dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}<\dfrac{3\pi}{4}$，

$\therefore \dfrac{3\pi}{4}<\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{4}<\pi.$

$\therefore \sin(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{4})>0$，$\therefore$（*）式 <0.

即 $\sin\sqrt{2}-\sin\sqrt{3}<\cos\sqrt{2}-\cos\sqrt{3}$.

$\therefore$ 曲线表示焦点在 y 轴上的椭圆.

6. 记集合 $T=\{0,1,2,3,4,5,6\}$，$M=\left\{\dfrac{a_1}{7}+\dfrac{a_2}{7^2}+\dfrac{a_3}{7^3}+\dfrac{a_4}{7^4}\,\middle|\, a_i\in T, i=1,2,3,4\right\}$，将 M 中的元素按从大到小的顺序排列，则第 2005 个数是（　　）

A. $\dfrac{5}{7}+\dfrac{5}{7^2}+\dfrac{6}{7^3}+\dfrac{3}{7^4}$

B. $\dfrac{5}{7}+\dfrac{5}{7^2}+\dfrac{6}{7^3}+\dfrac{2}{7^4}$

C. $\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7^2}+\dfrac{0}{7^3}+\dfrac{4}{7^4}$

D. $\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7^2}+\dfrac{0}{7^3}+\dfrac{3}{7^4}$

【答案】 C.

【解】 用 $[a_1,a_2,\cdots,a_k]_p$ 表示 k 位 p 进制

数，将集合 M 中的每个数乘以 7^4，得

$M'=\{a_1 7^3+a_2 7^2+a_3 7+a_4 \mid a_i\in T, i=1,2,3,4\}=\{[a_1a_2a_3a_4]_7 \mid a_i\in T, i=1,2,3,4\}$. M' 中的最大数为 $[6666]_7=[2400]_{10}$.

在十进制数中，从 2400 起从大到小顺序排列的第 2005 个数是 $2400-2004=396$. 而 $[396]_{10}=[1104]_7$ 将此数除以 7^4，便得 M 中的数 $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{4}{7^4}$.

二、填空题（本题满分 54 分，每小题 9 分）

7. 将关于 x 的多项式 $f(x)=1-x+x^2-x^3+\cdots-x^{19}+x^{20}$ 表为关于 y 的多项式 $g(y)=a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_{19}y^{19}+a_{20}y^{20}$，其中 $y=x-4$. 则 $a_0+a_1+\cdots+a_{20}=$ ________.

【答案】 $\frac{5^{21}+1}{6}$.

【解】 由题设知，$f(x)$ 和式中的各项构成首项为 1，公比为 $-x$ 的等比数列，由等比数列的求和公式，得：

$$f(x)=\frac{(-x)^{21}-1}{-x-1}=\frac{x^{21}+1}{x+1}.$$

令 $x=y+4$，得 $g(y)=\frac{(y+4)^{21}+1}{y+5}$，取 $y=1$，有 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}=g(1)=\frac{5^{21}+1}{6}$.

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的减函数，若 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-4a+1)$ 成立，则 a 的取值范围是________.

【答案】 $0<a<\frac{1}{3}$ 或 $1<a<5$.

【解】 $\because$ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上定义，又 $2a^2+a+1=2(a+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}>0$；$3a^2-4a+1=(3a-1)(a-1)$，仅当 $a>1$ 或 $a<\frac{1}{3}$ 时，$3a^2-4a+1>0$.（*）

$\because$ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，$\therefore$ $2a^2+a+1>3a^2-4a+1\Rightarrow a^2-5a<0$，$\therefore$ $0<a<5$，结合（*）知 $0<a<\frac{1}{3}$ 或 $1<a<5$.

9. 设 α、β、γ 满足 $0<\alpha<\beta<\gamma<2\pi$，若对于任意 $x\in\mathbf{R}$，$\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)+\cos(x+\gamma)=0$，则 $\gamma-\alpha=$ ________.

【答案】 $\frac{4\pi}{3}$.

【解】 设 $f(x)=\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)+\cos(x+\gamma)$，由 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=0$ 知，$f(-\alpha)=0$，$f(-\gamma)=0$，$f(-\beta)=0$，即 $\cos(\beta-\alpha)+\cos(\gamma-\alpha)=-1$，$\cos(\alpha-\beta)+\cos(\gamma-\beta)=-1$，$\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta-\gamma)=-1$，$\therefore$ $\cos(\beta-\alpha)=\cos(\gamma-\beta)=\cos(\gamma-\alpha)=-\frac{1}{2}$. $\because$ $0<\alpha<\beta<\gamma<2\pi$，$\therefore$ $\beta-\alpha,\gamma-\alpha,\gamma-\beta\in\{\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\}$，又 $\beta-\alpha<\gamma-\alpha$，$\gamma-\beta<\gamma-\alpha$. 只有 $\beta-\alpha=\gamma-\beta=\frac{2\pi}{3}$. $\therefore$ $\gamma-\alpha=\frac{4\pi}{3}$.

另一方面，当 $\beta-\alpha=\gamma-\beta=\frac{2\pi}{3}$，有 $\beta=\alpha+\frac{2\pi}{3}$，$\gamma=\alpha+\frac{4\pi}{3}$，对 $x\in\mathbf{R}$，记 $x+\alpha=\theta$，由于三点 $(\cos\theta,\sin\theta)$，$(\cos(\theta+\frac{2\pi}{3}),\sin(\theta+\frac{2\pi}{3}))$，$(\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}),\sin(\theta+\frac{4\pi}{3}))$ 构成单位圆 $x^2+y^2=1$ 上正三角形的三个顶点. 其中心位于原点，显然有 $\cos\theta+\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})+\cos(\theta+\frac{4\pi}{3})=0$. 即 $\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)+\cos(x+\gamma)=0$.

10. 如图 3，四面体 $DABC$ 的体积为 $\frac{1}{6}$，且满足 $\angle ACB=45°$，$AD+BC+\frac{AC}{\sqrt{2}}=3$，则 $CD=$ ________.

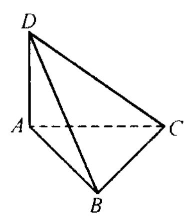

图 3

【答案】 $\sqrt{3}$.

【解】 $\because$ $\frac{1}{3}AD(\frac{1}{2}BC\,AC\sin45°)\geqslant V_{DABC}=\frac{1}{6}$，即 $AD\times BC\times\frac{AC}{\sqrt{2}}\geqslant 1$. 又 $3=AD+BC+\frac{AC}{\sqrt{2}}\geqslant 3\sqrt[3]{AD\times BC\times\frac{AC}{\sqrt{2}}}\geqslant 3$，等号当且仅当 $AD=BC=\frac{AC}{\sqrt{2}}=1$ 时成立，这时

$AB=1$，$AD\perp$ 面 ABC，$\therefore DC=\sqrt{3}$.

11. 若正方形 $ABCD$ 的一条边在直线 $y=2x-17$ 上，另外两个顶点在抛物线 $y=x^2$ 上．则该正方形面积的最小值为________.

【答案】 80.

【解】 设正方形的边 AB 在直线 $y=2x-17$ 上，而位于抛物线上的两个顶点坐标为 $C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，则 CD 所在直线 l 的方程 $y=2x+b$，将直线 l 的方程与抛物线方程联立，得 $x^2=2x+b\Rightarrow x_{1,2}=1\pm\sqrt{b+1}$.

令正方形边长为 a，则 $a^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=5(x_1-x_2)^2=20(b+1)$. ①

在 $y=2x-17$ 上任取一点 $(6,-5)$，它到直线 $y=2x+b$ 的距离为 a，

$$\therefore a=\frac{|17+b|}{\sqrt{5}}. \quad ②$$

①、② 联立解得 $b_1=3$，$b_2=63$.

$\therefore a^2=80$，或 $a^2=1280$．$\therefore a^2_{\min}=80$.

12. 如果自然数 a 的各位数字之和等于7，那么称 a 为"吉祥数"．将所有"吉祥数"从小到大排成一列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$，若 $a_n=2005$，则 $a_{5n}=$________.

【答案】 52000.

【解】 $\because$ 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=m$ 的非负整数解的个数为 C_{m+k-1}^{m}．而使 $x_1\geqslant1$，$x_i\geqslant0(i\geqslant2)$ 的整数解个数为 C_{m+k-2}^{m-1}．现取 $m=7$，可知，k 位"吉祥数"的个数为 $P(k)=C_{k+5}^{6}$.

$\because$ 2005 是形如 $\overline{2abc}$ 的数中最小的一个"吉祥数"，且 $P(1)=C_6^6=1$，$P(2)=C_7^6=7$，$P(3)=C_8^6=28$，对于四位"吉祥数" $\overline{1abc}$，其个数为满足 $a+b+c=6$ 的非负整数解个数，即 $C_{6+3-1}^{6}=28$ 个.

$\therefore$ 2005 是第 $1+7+28+28+1=65$ 个"吉祥数"，即 $a_{65}=2005$．从而 $n=65$，$5n=325$.

又 $P(4)=C_9^6=84$，$P(5)=C_{10}^6=210$，而 $\sum\limits_{k=1}^{5}P(k)=330$.

$\therefore$ 从大到小最后六个五位"吉祥数"依次是：70000，61000，60100，60010，60001，52000.

$\therefore$ 第 325 个"吉祥数"是 52000，即 $a_{5n}=52000$.

三、解答题（本题满分 60 分，每小题 20 分）

13. 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_0=1$，$a_{n+1}=\dfrac{7a_n+\sqrt{45a_n^2-36}}{2}$，$n\in\mathbf{N}$.

证明：(1) 对任意 $n\in\mathbf{N}$，a_n 为正整数；(2) 对任意 $n\in\mathbf{N}$，$a_na_{n+1}-1$ 为完全平方数.

【证明】 (1) 由题设得 $a_1=5$，且 $\{a_n\}$ 严格单调递增．将条件式变形得

$$2a_{n+1}-7a_n=\sqrt{45a_n^2-36},$$

两边平方整理得

$$a_{n+1}^2-7a_na_{n+1}+a_n^2+9=0 \quad ①$$

$$\therefore a_n^2-7a_{n-1}a_n+a_{n-1}^2+9=0 \quad ②$$

① $-$ ② 得

$$(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_{n-1}-7a_n)=0,$$

$$\because a_{n+1}>a_n，\therefore a_{n+1}+a_{n-1}-7a_n=0$$

$$\Rightarrow a_{n+1}=7a_n-a_{n-1}. \quad ③$$

由 ③ 式及 $a_0=1$，$a_1=5$ 可知，对任意 $n\in\mathbf{N}$，a_n 为正整数.

(2) 将 ① 两边配方，得

$$(a_{n+1}+a_n)^2=9(a_na_{n+1}-1),$$

$$\therefore a_na_{n+1}-1=\left(\frac{a_{n+1}+a_n}{3}\right)^2. \quad ④$$

记 $f(n)=a_na_{n+1}-\left(\dfrac{a_n+a_{n+1}}{3}\right)^2$，由于

$$f(n)-f(n-1)$$
$$=(a_na_{n+1}-a_{n-1}a_n)-\left[\left(\frac{a_n+a_{n+1}}{3}\right)^2-\left(\frac{a_{n-1}+a_n}{3}\right)^2\right]$$
$$=\frac{a_{n-1}-a_{n+1}}{9}(a_{n+1}+a_{n-1}-7a_n)=0,$$

从而 $f(n)=f(n-1)=\cdots=f(0)=a_0a_1-\left(\dfrac{a_0+a_1}{3}\right)^2=1$．$\therefore$ ④ 式成立.

$\therefore a_na_{n+1}-1$ 是完全平方数.

14. 将编号为 $1,2,\cdots,9$ 的九个小球随机放置在圆周的九个等分点上，每个等分点上各有一个小球．设圆周上所有相邻两球号码之差的绝对值之和为 S．求使 S 达到最小值的放法的概率．（注：如果某种放法，经旋转或镜面反射后可与另一种放法重合，则认为是相同的放法）

【解】 九个编号不同的小球放在圆周的九个等分点上，每点放一个，相当于九个不同元素在圆周上的一个圆形排列，故共有8!种放法，考虑到旋转因素，则本质不同的放法有$\frac{8!}{2}$种.

下求使 S 达到最小值的放法数：在圆周上，从1到9有优弧与劣弧两条路径，对其中任一条路径，设 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是依次排列于这段弧上的小球号码，则

$$|1-x_1|+|x_1-x_2|+\cdots+|x_k-9|$$
$$\geqslant|(1-x_1)+(x_1-x_2)+\cdots+(x_k-9)|$$
$$=|1-9|=8.$$

上式取等号当且仅当 $1<x_1<x_2<\cdots<x_k<9$，即每一弧段上的小球编号都是由1到9递增排列.

因此 $S_{最小}=2\cdot 8=16$.

由上知，当每个弧段上的球号 $\{1,x_1,x_2,\cdots,x_k,9\}$ 确定之后，达到最小值的排序方案便唯一确定.

在 $1,2,\cdots,9$ 中，除1与9外，剩下7个球号 $2,3,\cdots,8$，将它们分为两个子集，元素较少的一个子集共有 $C_7^0+C_7^1+C_7^2+C_7^3=2^6$ 种情况，每种情况对应有着圆周上使 S 值达到最小的唯一排法，即有利事件总数是 2^6 种，故所求概率 $P=\dfrac{2^6}{\frac{8!}{2}}=\dfrac{1}{315}$.

15. 过抛物线 $y=x^2$ 上的一点 $A(1,1)$ 作抛物线的切线，分别交 x 轴于 D，交 y 轴于 B. 点 C 在抛物线上，点 E 在线段 AC 上，满足$\frac{AE}{EC}=\lambda_1$；点 F 在线段 BC 上，满足$\frac{BF}{FC}=\lambda_2$，且 $\lambda_1+\lambda_2=1$，线段 CD 与 EF 交于点 P，当点 C 在抛物线上移动时，求点 P 的轨迹方程.

【解1】 过抛物线上点 A 的切线斜率为：$y'=2x|_{x=1}=2$，∴ 切线 AB 的方程为 $y=2x-1$，∴ B、D 的坐标为 $B(0,-1)$，$D(\frac{1}{2},0)$，

∴ D 是线段 AB 的中点.

设 $P(x,y)$、$C(x_0,x_0^2)$、$E(x_1,y_1)$、$F(x_2,y_2)$，则由$\frac{AE}{EC}=\lambda_1$ 知，

$$x_1=\frac{1+\lambda_1x_0}{1+\lambda_1},\ y_1=\frac{1+\lambda_1x_0^2}{1+\lambda_1};$$

又由$\frac{BF}{FC}=\lambda_2$，得

$$x_2=\frac{\lambda_2x_0}{1+\lambda_2},$$
$$y_2=\frac{-1+\lambda_2x_0^2}{1+\lambda_2}.$$

∴ EF 所在直线方程为：

$$\frac{y-\frac{1+\lambda_1x_0^2}{1+\lambda_1}}{\frac{-1+\lambda_2x_0^2}{1+\lambda_2}-\frac{1+\lambda_1x_0^2}{1+\lambda_1}}=\frac{x-\frac{1+\lambda_1x_0}{1+\lambda_1}}{\frac{\lambda_2x_0}{1+\lambda_2}-\frac{1+\lambda_1x_0}{1+\lambda_1}},$$

化简得 $[(\lambda_2-\lambda_1)x_0-(1+\lambda_2)]y=[(\lambda_2-\lambda_1)x_0^2-3]x+1+x_0-\lambda_2x_0^2$. ①

当 $x_0\neq\frac{1}{2}$ 时，直线 CD 的方程为：

$$y=\frac{2x_0^2x-x_0^2}{2x_0-1}. \quad ②$$

联立①、②解得$\begin{cases}x=\dfrac{x_0+1}{3}\\ y=\dfrac{x_0^2}{3}\end{cases}$，消去 x_0，得

P 点轨迹方程为：$y=\frac{1}{3}(3x-1)^2$.

当 $x_0=\frac{1}{2}$ 时，EF 方程为：

$$-\frac{3}{2}y=(\frac{1}{4}\lambda_2-\frac{1}{4}\lambda_1-3)x+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\lambda_2,$$

CD 方程为：$x=\frac{1}{2}$，联立解得$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\ y=\dfrac{1}{12}.\end{cases}$ 也在 P 点轨迹上. 因 C 与 A 不能重合，∴ $x_0\neq1$，

∴ $x\neq\frac{2}{3}$.

∴ 所求轨迹方程为

$$y=\frac{1}{3}(3x-1)^2(x\neq\frac{2}{3}).$$

【解2】 由解一知，AB 的方程为 $y=2x-1$，$B(0,-1)$，$D(\frac{1}{2},0)$，故 D 是 AB 的中点.

令 $\gamma=\frac{CD}{CP}$，$t_1=\frac{CA}{CE}=1+\lambda_1$，$t_2=\frac{CB}{CF}=1+\lambda_2$，则 $t_1+t_2=3$. 因 AD 为 $\triangle ABC$ 的中线，∴ $S_{\triangle CAB}=2S_{\triangle CAD}=2S_{\triangle CBD}$.

而 $\frac{1}{t_1t_2}=\frac{CE\cdot CF}{CA\cdot CB}$

$$=\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CAB}}$$

$$=\frac{S_{\triangle CEP}}{2S_{\triangle CAD}}+\frac{S_{\triangle CFP}}{2S_{\triangle CBD}}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{t_1\gamma}+\frac{1}{t_2\gamma})$$

$$=\frac{t_1+t_2}{2t_1t_2\gamma}=\frac{3}{2t_1t_2\gamma},$$

$\therefore\ \gamma=\frac{3}{2}$，$\therefore$ P 是 $\triangle ABC$ 的重心.

设 $P(x,y)$，$C(x_0,x_0^2)$，因点 C 异于 A，则 $x_0\neq1$，故重心 P 的坐标为

$$x=\frac{0+1+x_0}{3}=\frac{1+x_0}{3},(x\neq\frac{2}{3}),$$

$$y=\frac{-1+1+x_0^2}{3}=\frac{x_0^2}{3}.$$

消去 x_0，得 $y=\frac{1}{3}(3x-1)^2$.

故所求轨迹方程为

$$y=\frac{1}{3}(3x-1)^2(x\neq\frac{2}{3}).$$

加　试

一、（本题满分 50 分）

如图 4，在 $\triangle ABC$ 中，设 $AB>AC$，过 A 作 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 l，又以 A 为圆心，AC 为半径作圆分别交线段 AB 于 D；交直线 l 于 E、F.

证明：直线 DE、DF 分别通过 $\triangle ABC$ 的内心与一个旁心.

（注：与三角形的一边及另两边的延长线均相切的圆称为三角形的旁切圆，旁切圆的圆心称为旁心.）

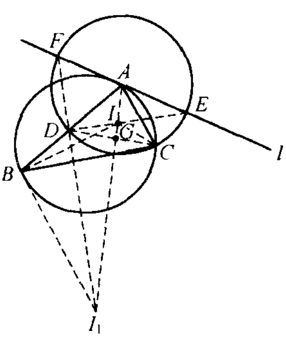

图 4

【证明】（1）先证 DE 过 $\triangle ABC$ 的内心.

如图 4，连 DE、DC，作 $\angle BAC$ 的平分线分别交 DE 于 I、DC 于 G，连 IC，则由 $AD=AC$，得 $AG\perp DC$，$ID=IC$. 又 D、C、E 在 $\odot A$ 上，

$\therefore\ \angle IAC=\frac{1}{2}\angle DAC=\angle IEC$，

$\therefore$ A、I、C、E 四点共圆，

$\angle CIE=\angle CAE=\angle ABC$，

而 $\angle CIE=2\angle ICD$.

$\therefore\ \angle ICD=\frac{1}{2}\angle ABC$.

$\therefore\ \angle AIC=\angle IGC+\angle ICG$

$$=90^\circ+\frac{1}{2}\angle ABC,$$

$\therefore\ \angle ACI=\frac{1}{2}\angle ACB$，

$\therefore$ I 为 $\triangle ABC$ 的内心.

（2）再证 DF 过 $\triangle ABC$ 的一个旁心.

连 FD 并延长交 $\angle ABC$ 的外角平分线于 I_1，连 II_1、BI_1、BI，由(1)知，I 为内心，

$\therefore\ \angle IBI_1=90^\circ=\angle EDI_1$，

$\therefore$ D、B、I_1、I 四点共圆.

$\because\ \angle BII_1=\angle BDI_1=90^\circ-\angle ADI$

$=(\frac{1}{2}\angle BAC+\angle ADG)-\angle ADI$

$=\frac{1}{2}\angle BAC+\angle IDG$，

$\therefore$ A、I、I_1 共线.

$\therefore$ I_1 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边外的旁心.

二、（本题满分 50 分）

设正数 a、b、c、x、y、z 满足 $cy+bz=a$；$az+cx=b$；$bx+ay=c$.

求函数 $f(x,y,z)=\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}$ 的最小值.

【解】 由条件得，$b(az+cx-b)+c(bx+ay-c)-a(cy+bz-a)=0$，即 $2bcx+a^2-b^2-c^2=0$，

$\therefore\ x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，同理，得

$$y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

$\because$ a、b、c、x、y、z 为正数，据以上三式知，

$b^2+c^2>a^2, a^2+c^2>b^2, a^2+b^2>c^2$，

故以 a、b、c 为边长，可构成一个锐角三角形 ABC，

$\therefore x=\cos A, y=\cos B, z=\cos C$，问题转化为：在锐角 $\triangle ABC$ 中，求函数 $f(\cos A,\cos B,\cos C)=\dfrac{\cos^2 A}{1+\cos A}+\dfrac{\cos^2 B}{1+\cos B}+\dfrac{\cos^2 C}{1+\cos C}$ 的最小值.

令 $u=\cot A, v=\cot B, w=\cot C$，则 $u,v,w\in\mathbf{R}^+$，$uv+vw+wu=1$.

且 $u^2+1=(u+v)(u+w)$，$v^2+1=(u+v)(v+w)$，$w^2+1=(u+w)(v+w)$.

$$\therefore \frac{\cos^2 A}{1+\cos A}=\frac{\frac{u^2}{u^2+1}}{1+\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}}$$
$$=\frac{u^2}{\sqrt{u^2+1}(\sqrt{u^2+1}+u)}$$
$$=\frac{u^2(\sqrt{u^2+1}-u)}{\sqrt{u^2+1}}$$
$$=u^2-\frac{u^3}{\sqrt{u^2+1}}$$
$$=u^2-\frac{u^3}{\sqrt{(u+v)(u+w)}}$$
$$\geqslant u^2-\frac{u^3}{2}\left(\frac{1}{u+v}+\frac{1}{u+w}\right).$$

同理，$\dfrac{\cos^2 B}{1+\cos B}\geqslant v^2-\dfrac{v^3}{2}\left(\dfrac{1}{u+v}+\dfrac{1}{v+w}\right)$，$\dfrac{\cos^2 C}{1+\cos C}\geqslant w^2-\dfrac{w^3}{2}\left(\dfrac{1}{u+w}+\dfrac{1}{v+w}\right)$.

$\therefore f\geqslant u^2+v^2+w^2-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u^3+v^3}{u+v}+\dfrac{v^3+w^3}{v+w}+\dfrac{u^3+w^3}{u+w}\right)=u^2+v^2+w^2-\dfrac{1}{2}[(u^2-uv+v^2)+(v^2-vw+w^2)+(u^2-uw+w^2)]$
$=\dfrac{1}{2}(uv+vw+uw)=\dfrac{1}{2}$.

（取等号当且仅当 $u=v=w$，此时 $a=b=c$，$x=y=z=\dfrac{1}{2}$），

$\therefore [f(x,y,z)]_{\min}=\dfrac{1}{2}$.

三、（本题满分 50 分）

对每个正整数 n，定义函数

$$f(n)=\begin{cases}0 & \text{当 } n \text{ 为平方数，}\\ \left[\dfrac{1}{\{\sqrt{n}\}}\right] & \text{当 } n \text{ 不为平方数.}\end{cases}$$

（其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，$\{x\}=x-[x]$）. 试求：$\sum\limits_{k=1}^{240} f(k)$ 的值.

【解】 对任意 a、$k\in\mathbf{N}_+$，若 $k^2<a<(k+1)^2$，则 $1\leqslant a-k^2\leqslant 2k$，设 $\sqrt{a}=k+\theta$，$0<\theta<1$，则 $\dfrac{1}{\{\sqrt{a}\}}=\dfrac{1}{\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{a}-k}=\dfrac{\sqrt{a}+k}{a-k^2}=\dfrac{2k+\theta}{a-k^2}<\dfrac{2k}{a-k^2}+1$，

$$\therefore \left[\frac{1}{\{\sqrt{a}\}}\right]=\left[\frac{2k}{a-k^2}\right].$$

让 a 跑遍区间 $(k^2,(k+1)^2)$ 中的所有整数，则 $\sum\limits_{k^2<a<(k+1)^2}\left[\dfrac{1}{\{\sqrt{a}\}}\right]=\sum\limits_{i=1}^{2k}\left[\dfrac{2k}{i}\right]$，

$$\text{于是}\sum_{a=1}^{(n+1)^2} f(a)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{2k}\left[\frac{2k}{i}\right] \qquad ①$$

下面计算 $\sum\limits_{i=1}^{2k}\left[\dfrac{2k}{i}\right]$：画一张 $2k\times 2k$ 的表，第 i 行中，凡是 i 的倍数处填写“*”号，则这行的“*”号共 $\left[\dfrac{2k}{i}\right]$ 个，全表的“*”号共 $\sum\limits_{i=1}^{2k}\left[\dfrac{2k}{i}\right]$ 个；另一方面，按列收集“*”号数，第 j 列中，若 j 有 $T(j)$ 个正因数，则该列便有 $T(j)$ 个“*”号，故全表的“*”号个数共 $\sum\limits_{j=1}^{2k}T(j)$ 个，因此 $\sum\limits_{i=1}^{2k}\left[\dfrac{2k}{i}\right]=\sum\limits_{j=1}^{2k}T(j)$.

示例如下：

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	*	*	*	*	*	*
2		*		*		*
3			*			*
4				*		
5					*	
6						*

则 $\sum\limits_{k=1}^{(n+1)^2} f(a)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{2k}T(j)=n[T(1)+$

$T(2)]+(n-1)[T(3)+T(4)]+\cdots+[T(2n-1)+T(2n)]$ ②

由此，$\sum\limits_{k=1}^{16^2} f(k)=\sum\limits_{k=1}^{15}(16-k)[T(2k-1)+T(2k)]$ ③

记 $a_k=T(2k-1)+T(2k)$，$k=1,2,\cdots,15$。易得 a_k 的取值情况如下：

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_k	3	5	6	6	7	8	6	9	8	8	8	10	7	10	10

因此，$\sum\limits_{k=1}^{256} f(k)=\sum\limits_{k=1}^{15}(16-k)a_k=783$ ④

据定义 $f(256)=f(16^2)=0$，

又当 $k\in\{241,242,\cdots,255\}$，

设 $k=15^2+r(16\leqslant r\leqslant 30)$，

$$\sqrt{k}-15=\sqrt{15^2+r}-15=\frac{r}{\sqrt{15^2+r}+15},$$

$$\frac{r}{31}<\frac{r}{\sqrt{15^2+r}+15}<\frac{r}{30},$$

$1\leqslant\frac{30}{r}<\frac{1}{\{\sqrt{15^2+r}\}}<\frac{31}{r}<2$，则

$\left[\frac{1}{\{\sqrt{k}\}}\right]=1$，$k\in\{241,242,\cdots,255\}$ ⑤

从而 $\sum\limits_{k=1}^{240} f(k)=783-\sum\limits_{k=241}^{256} f(k)=783-15=768$.

2006 年全国高中数学联赛试题解析

第一试

一、选择题(本题满分 36 分,每小题 6 分)

1. 已知 $\triangle ABC$,若对任意 $t \in \mathbf{R}$,$|\overrightarrow{BA} - t\overrightarrow{BC}| \geqslant |\overrightarrow{AC}|$,则 $\triangle ABC$ 一定为 ( )

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 直角三角形　　D. 答案不确定

【答案】 C.

【解】 令 $\angle ABC = \alpha$,过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D.

由 $|\overrightarrow{BA} - t\overrightarrow{BC}| \geqslant |\overrightarrow{AC}|$,推出

$$|\overrightarrow{BA}|^2 - 2t\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + t^2|\overrightarrow{BC}|^2 \geqslant |\overrightarrow{AC}|^2,$$

令 $t = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2}$,代入上式,并化简得

$$|\overrightarrow{BA}|^2 \sin^2\alpha \geqslant |\overrightarrow{AC}|^2,$$

即 $|\overrightarrow{BA}|\sin\alpha \geqslant |\overrightarrow{AC}|$. 则有 $|\overrightarrow{AD}| \geqslant |\overrightarrow{AC}|$.

由此可得 $\angle ACB = \dfrac{\pi}{2}$.

2. 设 $\log_x(2x^2 + x - 1) > \log_x 2 - 1$,则 x 的取值范围为 ( )

A. $\dfrac{1}{2} < x < 1$　　B. $x > \dfrac{1}{2}$,且 $x \neq 1$

C. $x > 1$　　D. $0 < x < 1$

【答案】 B.

【解】 因为 $\begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ x > 0, \text{且 } x \neq 1 \end{cases}$,

解得 $x > \dfrac{1}{2}$,$x \neq 1$.

由 $\log_x(2x^2 + x - 1) > \log_x 2 - 1$

$\Rightarrow \log_x(2x^3 + x^2 - x) > \log_x 2$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2x^3 + x^2 - x < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 1$;

或 $\begin{cases} x > 1 \\ 2x^3 + x^2 - x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 1$,

所以 x 的取值范围为 $x > \dfrac{1}{2}$,且 $x \neq 1$.

3. 已知集合 $A = \{x \mid 5x - a \leqslant 0\}$,$B = \{x \mid 6x - b > 0\}$,$a, b \in \mathbf{N}$,且 $A \cap B \cap \mathbf{N} = \{2,3,4\}$,则整数对 (a,b) 的个数为 ( )

A. 20　　B. 25

C. 30　　D. 42

【答案】 C.

【解】 $5x - a \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant \dfrac{a}{5}$;

$6x - b > 0 \Rightarrow x > \dfrac{b}{6}$.

要使 $A \cap B \cap \mathbf{N} = \{2,3,4\}$,则

$$\begin{cases} 1 \leqslant \dfrac{b}{6} < 2, \\ 4 \leqslant \dfrac{a}{5} < 5. \end{cases} \text{即} \begin{cases} 6 \leqslant b < 12, \\ 20 \leqslant a < 25. \end{cases}$$

所以数对 (a,b) 共有 $C_6^1 C_5^1 = 30$.

4. 在直三棱柱 $A_1B_1C_1 - ABC$ 中,$\angle BAC = \dfrac{\pi}{2}$,$AB = AC = AA_1 = 1$. 已知 G 与 E 分别为 A_1B_1 和 CC_1 的中点,D 与 F 分别为线段 AC 和 AB 上的动点(不包括端点). 若 $GD \perp EF$,则线段 DF 的长度的取值范围为 ( )

A. $\left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}, 1\right)$　　B. $\left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}, 2\right)$

C. $[1, \sqrt{2})$　　D. $\left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{2}\right)$

【答案】 A.

【解】 建立直角坐标系,以 A 为坐标原点,AB 为 x 轴,AC 为 y 轴,AA_1 为 z 轴,则

$F(t_1, 0, 0)(0 < t_1 < 1)$,$E(0, 1, \dfrac{1}{2})$,$G(\dfrac{1}{2}, 0, 1)$,$D(0, t_2, 0)(0 < t_2 < 1)$.

所以,$\overrightarrow{EF} = (t_1, -1, -\dfrac{1}{2})$,$\overrightarrow{GD} = (-\dfrac{1}{2},$

$t_2,-1)$. 因为 $GD\perp EF$,所以 $t_1+2t_2=1$,由此推出 $0<t_2<\frac{1}{2}$.

又 $\because \overrightarrow{DF}=(t_1,-t_2,0)$,

$\therefore |\overrightarrow{DF}|=\sqrt{t_1^2+t_2^2}=\sqrt{5t_2^2-4t_2+1}$

$=\sqrt{5(t_2-\frac{2}{5})^2+\frac{1}{5}}$,

从而有 $\sqrt{\frac{1}{5}}\leqslant|\overrightarrow{DF}|<1$.

5. 设 $f(x)=x^3+\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$,则对任意实数 $a,b,a+b\geqslant0$,是 $f(a)+f(b)\geqslant0$ 的 ( )

A. 充分必要条件

B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】 A.

【解】 显然 $f(x)=x^3+\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 为奇函数,且单调递增.

于是,若 $a+b\geqslant0$,则 $a\geqslant-b$,有 $f(a)\geqslant f(-b)$,即 $f(a)\geqslant-f(b)$,从而有 $f(a)+f(b)\geqslant0$.

反之,若 $f(a)+f(b)\geqslant0$,则 $f(a)\geqslant-f(b)=f(-b)$,推出 $a\geqslant-b$,即 $a+b\geqslant0$.

6. 数码 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2006}$ 中有奇数个 9 的 2007 位十进制数 $\overline{2a_1a_2a_3\cdots a_{2006}}$ 的个数为 ( )

A. $\frac{1}{2}(10^{2006}+8^{2006})$

B. $\frac{1}{2}(10^{2006}-8^{2006})$

C. $10^{2006}+8^{2006}$

D. $10^{2006}-8^{2006}$

【答案】 B.

【解】 出现奇数个 9 的十进制数个数有

$A=C_{2006}^{1}9^{2005}+C_{2006}^{3}9^{2003}+\cdots+C_{2006}^{2005}9$.

又由于 $(9+1)^{2006}=\sum\limits_{k=0}^{2006}C_{2006}^{k}9^{2006-k}$,

以及 $(9-1)^{2006}=\sum\limits_{k=0}^{2006}C_{2006}^{k}(-1)^k9^{2006-k}$,

从而得 $A=C_{2006}^{1}9^{2005}+C_{2006}^{3}9^{2003}+\cdots+C_{2006}^{2005}9$

$=\frac{1}{2}(10^{2006}-8^{2006})$.

二、填空题(本题满分 54 分,每小题 9 分)

7. 设 $f(x)=\sin^4x-\sin x\cos x+\cos^4x$,则 $f(x)$ 的值域是________.

【答案】 $\left[0,\frac{9}{8}\right]$.

【解】 $f(x)=\sin^4x-\sin x\cos x+\cos^4x$

$=1-\frac{1}{2}\sin2x-\frac{1}{2}\sin^2 2x$.

令 $t=\sin2x$,则

$f(x)=g(t)=1-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t^2$

$=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2})^2$.

$\therefore \min\limits_{-1\leqslant t\leqslant1}g(t)=g(1)=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}=0$,

$\max\limits_{-1\leqslant t\leqslant1}g(t)=g(-\frac{1}{2})=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\cdot0=\frac{9}{8}$.

即得 $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{9}{8}$.

8. 若对一切 $\theta\in\mathbf{R}$,复数 $z=(a+\cos\theta)+(2a-\sin\theta)\mathrm{i}$ 的模不超过 2,则实数 a 的取值范围为________.

【答案】 $\left[-\frac{\sqrt5}{5},\frac{\sqrt5}{5}\right]$.

【解】 依题意,得 $|z|\leqslant2$

$\Leftrightarrow(a+\cos\theta)^2+(2a-\sin\theta)^2\leqslant4$

$\Leftrightarrow2a(\cos\theta-2\sin\theta)\leqslant3-5a^2$

$\Leftrightarrow-2\sqrt5a\sin(\theta-\varphi)\leqslant3-5a^2$

($\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}$)(对任意实数 θ 成立)

$\Rightarrow2\sqrt5|a|\leqslant3-5a^2\Rightarrow|a|\leqslant\frac{\sqrt5}{5}$.

故 a 的取值范围为 $\left[-\frac{\sqrt5}{5},\frac{\sqrt5}{5}\right]$.

9. 已知椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左右焦点分别为 F_1 与 F_2,点 P 在直线 $l:x-\sqrt3y+8+2\sqrt3=0$ 上. 当 $\angle F_1PF_2$ 取最大值时,比 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值为________.