课标本

教材完全解读

王后雄学案

总策划：熊 辉

高中数学 必修5

配人课A版

丛书主编：王后雄
本册主编：马春华

X导航 丛书系列

中国青年出版社

课标本

教材完全解读

王后雄学案

高中数学 必修5

配人课A版

丛书主编：王后雄
本册主编：马春华
编　　委：郑晓玲　章雄钢
周建国　左建华
吴海林　胡福民
秦　俭　程　林
马建华　丁仁贵
姚火生　郑祥贵
刘小燕　黄光文
张　莹　张新平
肖建章　王新佑

导航丛书系列

中国青年出版社

（京）新登字083号

图书在版编目（CIP）数据

教材完全解读：人教A版课标版. 高中数学. 5：必修/王后雄主编.
—3版. —北京：中国青年出版社，2008
ISBN 978-7-5006-6820-6

Ⅰ.教… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第030187号

策　　划：熊　辉
责任编辑：李　扬
封面设计：木头羊

教材完全解读
高中数学
必修5

中国青年出版社 出版发行

社址：北京东四12条21号　邮政编码：100708
网址：www.cyp.com.cn
编辑部电话：（010）64034328
读者服务热线：（027）61883306
孝感市三环印务有限责任公司印制　新华书店经销
889 × 1194　1/16　9.25印张　247千字
2008年5月北京第3版　2008年5月湖北第3次印刷
印数：10001—15000册
定价：16.30元
本书如有任何印装质量问题，请与承印厂联系调换
联系电话：（027）61883355

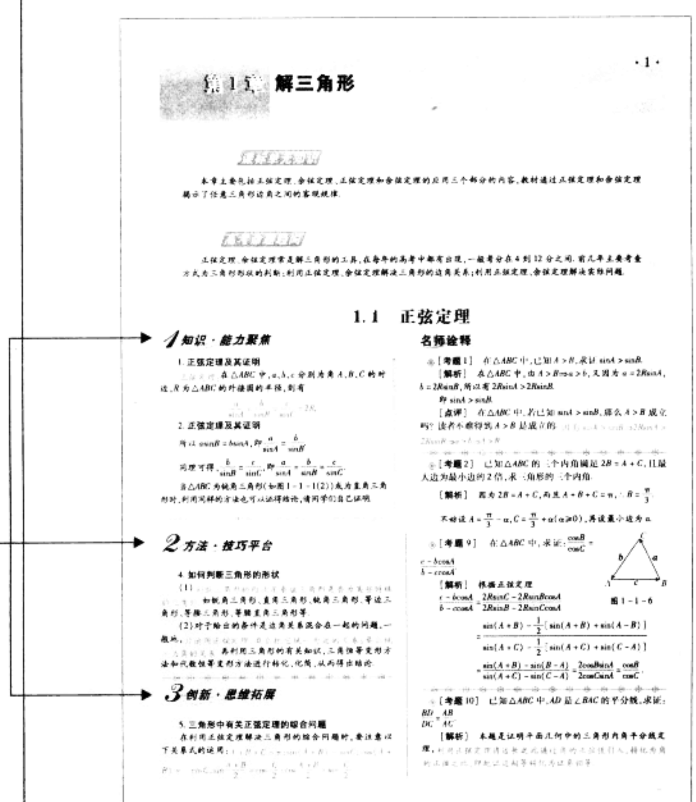
教材完全解读

本书特点

基础教育新课标改革已如火如荼地展开，新课程教材助学助考的开发问题已成为人们关注的焦点。应广大读者的要求，我们特邀来自国家新课程改革试验区和国家级培训班的专家编写课标版《教材完全解读》丛书。该系列丛书能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照课程理念和教材学习目标要求科学、高效地学习。该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨，助您走向成功。

这套丛书在整体设计上有两个突出的特点：一是双栏对照，对教材全解全析，在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色；另一个就是注重典型案例学习，突出鲜活、典型和示范的特点。

为了让您更充分地理解本书的特点，挑战学习的极限，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。


·1·

第1章 解三角形

1.1 正弦定理

1 知识·能力聚焦

名师诠释

2 方法·技巧平台

3 创新·思维拓展

从知识、方法、思维三个方面诠释教材知识点和方法点，帮您形成答题要点、解题思维，理清解题思路、揭示考点实质和内涵。

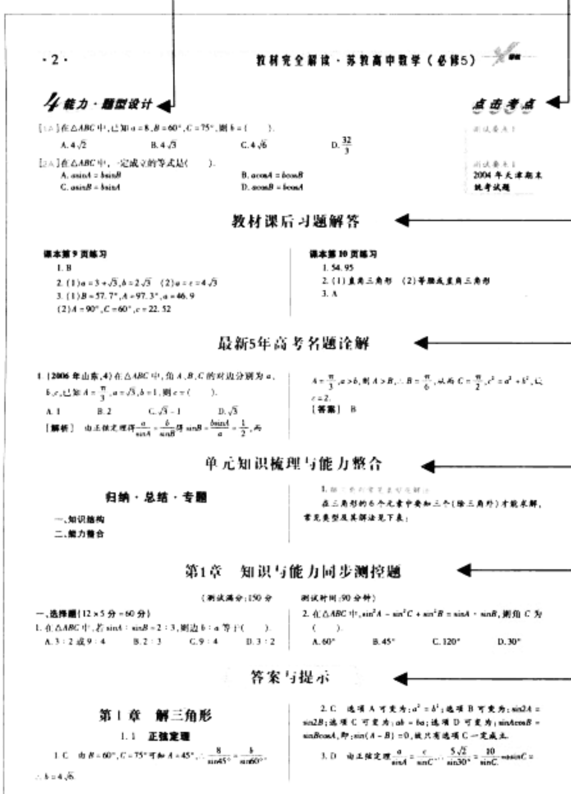
教辅大师王后雄教授、特级教师科学超前的体例设置，帮您赢得了学习起点，成就您人生的夙愿。

——题记

针对本节重点、难点、考点及考试能力达标所设计的题目。题目难度适中,是形成能力、考试取得高分的必经阶梯。

解题错因导引

“点击考点”栏目导引每一道试题的“测试要点”。当您解题出错时，建议您通过“测试要点”的指向，弄清致错原因，找到正确答案。



帮助您弥补课堂上听课的疏漏。答案准确，讲解繁简适度、到位、透彻。

汇集高考名题，讲解细致入微，教纲、考纲，双向例释；练习、考试，讲解透彻；多学、精练，效果显著。

单元知识整合

单元知识与方法网络化，帮助您将本单元所学教材内容系统化，形成对考点知识的二次提炼与升华，全面提高学习效率。

考试高分保障

精心选编涵盖本章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明，与同步考试接轨，利于您同步自我测评，查缺补漏。

试题皆提供详细的解题步骤和思路点拨，鼓励一题多解。不但知其然，且知其所以然，帮助您养成良好规范的答题习惯。

目录

知识与方法

阅读索引

第一章　解三角形

第二章　数列

第三章 不等式

学法指津

1. 学习解三角形应把握好如下几点

(1)本章主要包括正弦定理与余弦定理、三角形中的几何计算、解三角形的实际应用举例三部分内容. 教科书以直角三角形为例引出正弦定理,然后给出了当三角形为钝角三角形时的证明方法. 接着用向量方法证明了余弦定理. 三角形中的几何计算主要介绍了正弦定理、余弦定理在几何中的应用,最后通过解决一些与三角形有关的实际问题,说明正弦定理、余弦定理的重要作用,正弦定理、余弦定理揭示了任意三角形边角之间的客观规律,是解三角形的重要工具.

(2)本章内容既与初中已学过的关于三角形的定性研究的结论相联系又与三角函数知识相联系. 同时,也体现了向量及其运算的应用,高考中常与三角函数、向量知识联系来考查.

(3)本章知识在现实生活中有广泛的应用,如天文测量、航海测量和地理测量等,解三角形的理论被用于解决许多测量问题,因此通过本章的学习,提高学生的数学建模能力.

(4)通过对任意三角形边长和角度关系的探究,掌握正弦定理、余弦定理,并能解决一些简单的三角度量问题.

(5)能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

(6)还应注意以下三点:

①要重视数学思想方法的应用. 解三角形作为几何度量问题,要突出几何背景,注意数形结合思想的运用,具体解题时,要注意函数与方程思想的应用.

②加强新旧知识的联系. 学习本章知识与初中学习的三角形的边、角关系,有密切联系,同时要注意与三角函数、平面向量等知识的联系,将新知识融入已有的知识体系,从而提高综合运用知识解决问题的能力.

③提高数学建模能力. 利用解三角形解决相关的实际问题,关键是读懂题意,找出量与量之间的关系,根据题意作出示意图,将实际问题抽象成解三角形模型.

2. 学习数列应把握好如下几点

(1)数列是中学数学的一项重要内容,而且是进行计算、推理等基本训练、综合训练的重要题材,它与高等数学有较为密切的联系,是进一步学习的必备基础知识,因而是高考命题的热点之一. 数列是每年高考必考的内容,十多年来,不仅每年都考选择题或填空题,而且解答题也几乎每年都考,有时还是压轴题.

(2)理解数列的概念,能用函数的观点认识数列,了解数列的通项公式和递推公式的意义,会根据数列的通项公式写出数列的任意一项,会根据数列的递推公式写出数列的前几项.

(3)理解等差数列的概念,掌握等差数列的通项公式和前 n 项和公式,并能运用公式解决一些简单问题.

(4)理解等比数列的概念,掌握等比数列的通项公式和前 n 项和公式,并能运用公式解决一些简单问题.

(5)熟练运用数列的有关知识研究日常经济生活中的有关问题.

(6)本章教材的重点:数列的概念,等差数列与等比数列的概念、性质、通项公式及前 n 项和公式.

(7)本章教材的难点:等差数列与等比数列的性质、通项公式及前 n 项和公式的灵活应用,通项公式及前 n 项和公式的结构特点,数列在实际问题中的应用.

(8)必须注意理解和掌握:

①数列是一种特殊的函数及数列的图象表示.

②等差、等比数列的前 n 项和公式的推导及方法,两数列的通项公式及前 n 项和公式的结构特点.

(9)此外还应注意如下三点:

①多结合实例,通过实例去理解数列的有关概念. 数列与函数密切相关,多角度比较两者之间的异同,加深对两方面内容的理解. 在解题或复习时,应自觉地运用函数的思想方法去思考和解决数列问题,特别是对等差或等比数列的问题. 运用函数思想方法以及利用它所得到的许多结论,不仅可以深化对数列知识的理解,而且可使这类问题的解答更为快速、合理.

②善于对比学习.学习等差数列后，再学等比数列时，可以以等差数列为模型，从等差数列研究过的问题入手，再探求出等比数列的相应问题，两相对照，可以发现，在这两种数列的定义、一般形式、通项形式、中项及性质中，用了一些相类似的语句和公式形式，但内容却不相同，之所以有这样的区别，原因在于“差”与“比”不同.通过对比学习，加深了对两种特殊数列本质的理解，会收到事半功倍的效果.

③要重视数学思想方法的指导作用.本章蕴含丰富的数学观点、数学思想和方法，学习时应给予充分注意，解题时多考虑与之相联系的数学思想方法.

通过本章学习提高观察、分析、归纳、猜想的能力.

“兴趣是最好的老师”，数列中的奥妙与趣味定会激发你去学习、去思考、去探索.

3. 学习不等式应把握好如下几点

(1)要注意一元二次不等式、整式方程、函数、三角函数等知识的联系，以便对不等式知识有一个全面、完整的了解与认识.

(2)要注意一元二次方程式的解法与一元二次不等式的应用之间的联系.

(3)注意对不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a>0,b>0)$ 和 $a^2+b^2\geqslant 2ab(a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R})$ 的理解，灵活正确地使用其解决问题，尤其是在正确的使用上下功夫.

(4)要注意体会二元一次不等式(组)与平面区域的关系，借助几何直观解决简单的线性规划问题.

(5)本章重点内容是实数比较大小、一元二次不等式的解法及应用以及基本不等式求最值和简单的线性规划，基本不等式求最值方法较固定，但变形灵活、技巧性强，一元二次不等式的解法，特别是分式不等式与高次不等式的解法，注意穿针引线，要想学好本章还要注意以下几点：

①熟练掌握不等式的性质；基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a>0,b>0)$ 及重要不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab(a,b\in\mathbf{R})$.

②扎实掌握判断两个实数或因式大小的方法——比较法.

③注意不等式与其他知识的联系和综合运用.

④不断总结不等式解法的规律和技巧，不断地从实际应用中汲取解题的经验和教训.

⑤强化不等式的应用，历届高考中除单独考查不等式的试题外，常在一些函数、数列、立体几何、解析几何和实际应用的问题中涉及不等式的知识，因此在学习中一定要提高应用意识，不断地总结不等式的应用规律，努力提高分析和解决问题的能力.

⑥注意线性规划的意义，并会简单的应用，解决有关实际问题.

⑦在学习过程中加强等价转化思想的训练，解分式不等式的过程就是等价转化的过程，加强化归思想的提高，比较两个代数式的大小就是化归过程，加强分类讨论的思想的学习，会分析引起分类讨论的原因，并按一定标准进行讨论，做到合理分类、不重不漏，加强数形结合的思想，将一元二次不等式与二次函数的图象结合起来研究不等式的解集，更简捷、更清楚、更准确.

第一章　解三角形

课标单元知识

1. 本章主要包括正弦定理和余弦定理、应用举例与实习作业三个部分，教材以直角三角形为例引出正弦定理，然后利用向量方法证明余弦定理. 正、余弦定理揭示了任意三角形边角之间的客观规律，是解三角形的重要工具. 希望同学们在已有知识的基础上，通过对任意三角形边角关系的探究，发现并掌握三角形中边长与角度之间的数量关系，并认识到运用它们可以解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

2. 课标与考试大纲要求

(1) 正弦定理和余弦定理：掌握正弦定理、余弦定理，并能解决一些简单的三角形度量问题.

(2) 应用：能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

高考命题趋向

本单元知识，是高考必考内容，重点为正余弦定理及三角形的面积公式，考题灵活多样. 选择和填空题型，以考查用正、余弦定理解三角形为主，难度不大（如 2006 年北京，13）或与其他知识综合命题（如 2006 年全国Ⅰ，8），使涉及了数列内容. 解答题型主要与三角函数相结合实现边角互化，或用以解决实际问题，难度中等（如 2006 年江西，19、2006 年上海，18）. 上述情况近几年不会有大的变动.

1.1　正弦定理和余弦定理

1 知识 · 能力聚焦

1. 正弦定理及其证明

(1) 正弦定理：在 $\triangle ABC$ 中，a、b、c 分别为角 A、B、C 的对边，R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径，则有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

文字语言表述为：在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等.

[注]　教材中未给出比值为 $2R$，在此补上，请学有余力的同学注意理解.

(2) 正弦定理的证明：教材中给出用三角函数定义的证明，除此以外还可用向量法和几何法证明.

①向量法

[证明]　如图 1－1－1(1)，$\triangle ABC$ 为锐角三角形时，过 A 作单位向量 $\boldsymbol{j}$ 垂直于 $\overrightarrow{AB}$，则 $\boldsymbol{j}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角为 $90°$，$\boldsymbol{j}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}-B$，$\boldsymbol{j}$ 与 $\overrightarrow{CA}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}+A$，设 $AB=c$，$BC=a$，$AC=b$.

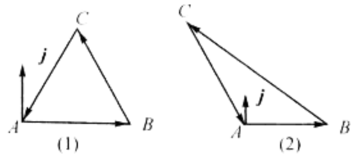


图1－1－1

因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$，

所以 $\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{BC}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{0}=0$.

名师诠释

◈ [考题 1]　(1) 在 $\triangle ABC$ 中，$A>B$ 是 $\sin A>\sin B$ 的(　　).

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

(2) 若 $\triangle ABC$ 的三内角 A、B、C 成等差数列，且最大边为最小边的 2 倍，则三内角之比为________.

[解析]　(1) 在 $\triangle ABC$ 中，$A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow 2R\sin A>2R\sin B\Leftrightarrow \sin A>\sin B$. 故选 C.

(2) 设 $\triangle ABC$ 的三内角从小到大依次为 $B-\alpha$，B，$B+\alpha$，

$\because A+B+C=\pi$，$\therefore B-\alpha+B+B+\alpha=\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

再设最小边为 a，则最大边为 $2a$.

由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\dfrac{2a}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$.

即　$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$，

即　$\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha=2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)$，

$\therefore \tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore \alpha=\frac{\pi}{6}$.

$\therefore$ 三内角分别为 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，它们的比为 $1:2:3$.

◈ [考题 2]　$\triangle ABC$ 的三个内角 A、B、C 的对边分别是 a、b、c，如果 $a^2=b(b+c)$，求证：$A=2B$.

[解析]　研究三角形问题一般有两种思路，一是边化角，二是角化边.

即 $|j||\overrightarrow{AB}|\cos\frac{\pi}{2}+|j||\overrightarrow{BC}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)+|j||\overrightarrow{CA}|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right)=0$.

所以 $a\sin B=b\sin A$，即 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

同理可得：$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，即 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

当$\triangle ABC$为钝角三角形（如图1－1－1(2)）或为直角三角形时，利用同样的方法可以证得结论，请同学们自己证明.

②几何法

[证明]　如图1－1－2所示，设O为$\triangle ABC$的外接圆的圆心，连结BO并延长交$\odot O$于A'，连结$A'C$，则$A'=A$或$A'=\pi-A$，$\therefore \sin A=\sin A'=\frac{BC}{A'B}=\frac{a}{2R}$，即 $\frac{a}{\sin A}=2R$，同理可证 $\frac{b}{\sin B}=2R$，$\frac{c}{\sin C}=2R$. 故有 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

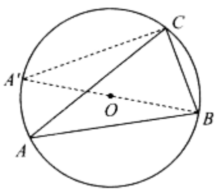


图1－1－2

(3)注意：在运用时，有时需对它进行变形，如：$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$；$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.

(4)当$\triangle ABC$是钝角三角形时，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$仍然成立的证明方法.

[证明]　如图1－1－3，设B为钝角，过C作AB的垂线与AB的延长线交于D点，由三角函数的定义得，

$$CD=b\sin A,\ CD=a\sin(180^\circ-B)=a\sin B,$$

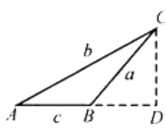


图1－1－3

$\therefore b\sin A=a\sin B$，即 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

同理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

2. 余弦定理

(1)余弦定理：在$\triangle ABC$中，有：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$；$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

(2)注意：定理变形后的运用，如

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

[例]　若2，3，x三边组成一个锐角三角形，求x的取值范围.

[解析]　由于x的大小不确定，故须分情况讨论.

若$x<3$，则3对应的角最大，由余弦定理得

$$\cos\theta=\frac{x^2+2^2-3^2}{2\cdot x\cdot 2}=\frac{x^2-5}{4x},$$

$\because$ 三角形为锐角三角形，$\therefore \cos\theta>0$.

$\therefore x^2-5>0$，$x>0$，$\therefore \sqrt{5}<x<3$.

若$x\geqslant 3$，则边x对应的角最大. 同理可得，$2^2+3^2>x^2$，即$x^2<13$，又$x\geqslant 3$，$\therefore 3\leqslant x<\sqrt{13}$.

故x的取值范围是$(\sqrt{5},\sqrt{13})$.

(3)余弦定理的证明

证明：用正弦定理，$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，代入$a^2=b(b+c)$中，得 $\sin^2A=\sin B(\sin B+\sin C)\Rightarrow \sin^2A-\sin^2B=\sin B\sin C\Rightarrow\frac{1-\cos 2A}{2}-\frac{1-\cos 2B}{2}=\sin B\sin(A+B)\Rightarrow\frac{1}{2}(\cos 2B-\cos 2A)=\sin B\sin(A+B)\Rightarrow \sin(A+B)\sin(A-B)=\sin B\sin(A+B)$，因为$A$、$B$、$C$为三角形的三内角，所以$\sin(A+B)\neq 0$. 所以$\sin(A-B)=\sin B$. 所以只能有$A-B=B$，即$A=2B$.

◈ **[考题3]**　(1)在$\triangle ABC$中，已知$A=45^\circ$，$B=30^\circ$，$c=10$，求b.

(2)在$\triangle ABC$中，已知$A=45^\circ$，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，求B.

[解析]　(1)由正弦定理知，要求b的值，已知边c，为此需由$A+B+C=180^\circ$求出C，从而使问题解决.(2)运用正弦定理时，要注意解的个数.

解：(1)$\because A+B+C=180^\circ$，$\therefore C=105^\circ$.

$\because \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，$\therefore b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{10\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ}$，

即　$b=5(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

(2)$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$\therefore \sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}\sin 45^\circ}{2}=\frac{1}{2}$.

$\because a>b$，$\therefore A>B$，即B为锐角，$B=30^\circ$.

◈ **[考题4]**　$\triangle ABC$中，a、b、c分别是角A、B、C的对边，设$a+c=2b$，$A-C=\frac{\pi}{3}$，求$\sin B$的值.

[解析]　$a+c=2b$，由正弦定理$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$得$\sin A+\sin C=2\sin B$.

由和差化积公式得 $2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\sin B$.

$\because \quad A+B+C=\pi$，

$\therefore \sin\frac{A+C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)=\cos\frac{B}{2}$. 又 $A-C=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$.

又$\because 0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \cos\frac{B}{2}\neq 0$.

$\therefore \sin\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. $\therefore \cos\frac{B}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{B}{2}}=\frac{\sqrt{13}}{4}$.

$\therefore \sin B=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{39}}{8}$.

◈ **[考题5]**　在$\triangle ABC$中，$a:b:c=2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$，求$\triangle ABC$的内角的度数.

[解析]　设$a=2k$，$b=\sqrt{6}k$，$c=(\sqrt{3}+1)k$，由余弦定理，有

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6k^2+(\sqrt{3}+1)^2k^2-4k^2}{2(\sqrt{3}+1)k\cdot\sqrt{6}k}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore \qquad A=45^\circ$.

同理可得 $\cos B=\frac{1}{2}$，$\therefore B=60^\circ$，

$\therefore \qquad C=180^\circ-A-B=75^\circ$.

[点评]　(1)要熟练掌握余弦定理及它的三个变式，即已知三边求三角.

(2)灵活运用正弦定理解题，这里将$\sin A:\sin B:\sin C$转化为三边之比$a:b:c$，进而可求出$\cos C$.

教材中给出了用向量证明余弦定理的方法,体现了向量在解决三角形度量问题中的作用.另外,还可以用解析法、三角法证明余弦定理.

[证明] 证明一:如图1-1-4,以A点为原点,以$\triangle ABC$的边AB所在直线为x轴,以过点A与AB垂直的直线为y轴,建立直角坐标系,则$A(0,0)$,$C(b\cos A,b\sin A)$,$B(c,0)$,由两点间的距离公式得

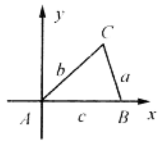


图1-1-4

$BC^2=(b\cos A-c)^2+(b\sin A-0)^2$,

$a^2=b^2\cos^2A-2bc\cos A+c^2+b^2\sin^2A$,

即$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理可证$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

证明二:如图1-1-5,当$\triangle ABC$为锐角三角形时,过点C作$CD\perp AB$于点D,则$CD=b\sin A$,$BD=AB-AD=c-b\cos A$.

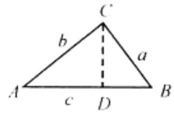


图1-1-5

在Rt$\triangle BCD$中,由勾股定理得

$$BC^2=CD^2+BD^2,$$

即$a^2=b^2\sin^2A+(c-b\cos A)^2$.

整理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理可证$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

当$\triangle ABC$为钝角三角形时,如图1-1-6.

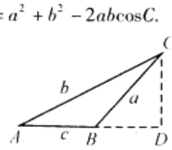


图1-1-6

$CD=b\sin A$,$BD=b\cos A-c$,

在Rt$\triangle BCD$中,$BC^2=CD^2+BD^2$,

$a^2=b^2\sin^2A+(b\cos A-c)^2$,

即:$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理可证:$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

3. 三角形的有关公式

(1)射影公式:

$a=b\cos C+c\cos B$,$b=c\cos A+a\cos C$,$c=a\cos B+b\cos A$.

(2)三角形面积公式:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}=\frac{1}{2}(a+b+c)r$$

$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|)^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

$$=2R^2\sin A\sin B\sin C=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}.$$

其中r为$\triangle ABC$内切圆半径,R为外接圆半径,

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

2 方法·技巧平台

4. 斜三角形的基本类型及解法

(1)已知两角和一边(如A,B及边c)

[解法] $C=180°-(A+B)$;$a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}$;$b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}$.

(3)余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$还可改写为$\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C-2\sin B\sin C\cos A$(正余弦定理),有时应用它求三角函数值时很方便.

◈ [考题6] 在$\triangle ABC$中,已知$a=7$,$b=10$,$c=6$,判断$\triangle ABC$的形状.

[解析] $\triangle ABC$的形状由最大边b和角B的范围决定,故问题转化为求角B的范围.

于是由余弦定理知$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{7^2+6^2-10^2}{2\times7\times6}=-\dfrac{5}{28}$.

在$\triangle ABC$中,$0°<B<180°$,$\therefore 90°<B<180°$;

$\therefore \triangle ABC$为钝角三角形.

[点评] 在$\triangle ABC$中,当角B为钝角时,有$b^2>a^2+c^2$.

变式引申:已知$\triangle ABC$中,$b=8$,$c=3$,$\sin A=\dfrac{\sqrt{247}}{16}$,求$a$的值,并判断三角形的形状.

解:在$\triangle ABC$中,$\because \sin A=\dfrac{\sqrt{247}}{16}$,$\therefore \cos A=\dfrac{3}{16}$.

由余弦定理得

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=8^2+3^2-2\times8\times3\times\dfrac{3}{16}=64$,$\therefore a=8$.

$\because a=b=8$,$\therefore \triangle ABC$为等腰三角形.

◈ [考题7] 在$\triangle ABC$中,若$B=30°$,$AB=2\sqrt{3}$,$AC=2$,则$\triangle ABC$的面积是________.

[解析] 由正弦定理得$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$,$\sin C=\dfrac{AB\sin B}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because AB>AC$,$\therefore C=60°$或$120°$.

当$C=60°$时,$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot AB\sin A=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}\sin90°=2\sqrt{3}$;

当$C=120°$时,$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot AB\sin A=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}\sin30°=\sqrt{3}$.

◈ [考题8] 在$\triangle ABC$中,三个内角A、B、C的对边分别为a、b、c,且角A为$80°$,$a^2=b(b+c)$,$A-B=B$,求角C的度数.

[解析] 已知条件有角也有边,为了求角C,可考虑把已知边都转化为角,联想到正弦定理,进行三角恒等变形.

解:由正弦定理知$a^2=b(b+c)$得$\sin^2A=\sin B(\sin B+\sin C)$,

$\therefore \sin^2A-\sin^2B=\sin B\sin C$,$\therefore (\sin A-\sin B)(\sin A+\sin B)=\sin B\cdot\sin C$,即$2\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\sin\dfrac{A-B}{2}\cdot2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}=\sin B\sin C$,

即$\sin(A+B)\cdot\sin(A-B)=\sin B\sin C$.而$A+B=\pi-C$,

$\therefore \sin C\cdot\sin(A-B)=\sin B\cdot\sin C$.

$\because \sin C\neq0$,$\therefore \sin(A-B)=\sin B$.又$a^2-b^2=bc>0$,$\therefore a>b$,

$\therefore A>B$,$\therefore 0°<A-B<80°$.

$\because 0°<B<80°$,且$A-B=B$,

$\therefore B=\dfrac{1}{2}A=40°$,$\therefore C=180°-80°-40°=60°$.

◈ [考题9] 不解三角形,判断下列三角形解的个数.

(1)$a=5$,$b=4$,$A=120°$; (2)$a=7$,$b=14$,$A=150°$;

(2) 已知两边及夹角[如 a、b 及 $C(a\geqslant b)$]

[解法]　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，$\sin B=\dfrac{b\sin C}{c}$（$B$ 为锐角），$A=180°-(B+C)$.

(3) 已知三边(如 a,b,c)

[解法]　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，同样可求出 B、C.

(4) 已知两边和其中一边的对角(如 a、b、A)

[解法]　$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$（$B$ 有没有解，有几解需要讨论），$C=180°-(A+B)$，$c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}$.

[说明]　在(4)中由 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ 确定 B 可按下述步骤进行讨论：

①当 $\sin B>1$ 时，无解；②当 $\sin B=1$ 时，(a)当 $A+\dfrac{\pi}{2}<\pi$ 时，$B=\dfrac{\pi}{2}$；(b)当 $A+\dfrac{\pi}{2}\geqslant\pi$ 时，无解；③当 $\sin B<1$ 时，先求出在 $[0,\pi)$ 上满足 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ 的两角 B_1、$B_2(B_1<B_2)$，再看 $A+B$ 是否小于 π，若小于 π 则有两解 B_1、B_2；若 $B_1+A\geqslant\pi$，则无解；若 $B_1+A<\pi$ 且 $B_2+A\geqslant\pi$，则有惟一解 B_1.

(5) 熟练掌握下列知识对解三角形有帮助：

① $\sin(A+B)=\sin C$，$\cos(A+B)=-\cos C$，$\tan(A+B)=-\tan C$，$\cos\dfrac{C}{2}=\sin\dfrac{A+B}{2}$，….

②在 $\triangle ABC$ 中，熟记并会证明：$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$.

③ A，B、C 成等差数列的充要条件是 $B=60°$.

④ $\triangle ABC$ 是正三角形的充要条件是 A，B、C 成等差数列且 a，b，c 成等比数列.

⑤三角形中，任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边.

⑥等边对等角，等角对等边，大边对大角，大角也对大边.

5. 如何判断三角形的形状

(1) 判断三角形的形状是看该三角形是否为某些特殊的三角形(如锐角、直角、钝角、等腰、等边三角形等)；

(2) 对于给出条件是边角关系混合在一起的问题，一般地，应运用正弦定理和余弦定理，要么把它统一为边的关系；要么统一为角的关系. 再利用三角形的有关知识，三角恒等变形方法、代数恒等变形方法进行转化、化简，从而得出结论.

(3) 常见结论：

设 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的角 A、B、C 的对边：

①若 $a^2+b^2=c^2$，则 $C=90°$；

②若 $a^2+b^2>c^2$，则 $C<90°$；

③若 $a^2+b^2<c^2$，则 $C>90°$；

④若 $\sin 2A=\sin 2B$，

(3) $a=9$，$b=10$，$A=60°$；　(4) $c=50$，$b=72$，$C=135°$.

[解析]　(1) $\because\ \sin B=\dfrac{b}{a}\sin 120°=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\ \triangle ABC$ 有一解.

(2) $\because\ \sin B=\dfrac{b}{a}\sin 150°=1$，$\therefore\ \triangle ABC$ 无解.

(3) $\because\ \sin B=\dfrac{b}{a}\sin A=\dfrac{10}{9}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$，而 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{5\sqrt{3}}{9}<1$，$\therefore$ 当 B 为锐角时，满足 $\sin B=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ 的 B 的取值范围为 $60°<B<90°$，故对应的钝角 B 有 $90°<B<120°$. 也满足 $A+B<180°$，故 $\triangle ABC$ 有两解.

(4) $\because\ \sin B=\dfrac{b\sin C}{c}=\dfrac{72}{50}\sin C>\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore\ B>45°$，

$\therefore\ B+C>180°$，故 $\triangle ABC$ 无解.

[点评]　已知 a，b，A 解 $\triangle ABC$ 的讨论可用下面的几何方法：如图 1－1－7 所示，①当 $a<b\sin A$ 时，$\triangle ABC$ 无解；②当 $a=b\sin A$ 时，$\triangle ABC$ 有一解；③当 $a>b\sin A$ 时，$\triangle ABC$ 有两解.

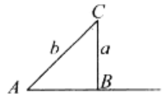


图 1－1－7

◈ **[考题 10]**　在 $\triangle ABC$ 中，$c=2\sqrt{2}$，$a>b$，$C=\dfrac{\pi}{4}$，且有 $\tan A\cdot\tan B=6$，试求 a、b 及此时三角形的面积.

[解析]　由已知可求出 $\tan A+\tan B$ 的值，这样便可求 $\tan A$、$\tan B$ 的值，只要求出 $\sin A$、$\sin B$，利用正弦定理便可求 a、b.

$\because\ \tan A+\tan B=\tan(A+B)(1-\tan A\tan B)=-\tan C\cdot(1-\tan A\tan B)=-\tan\dfrac{\pi}{4}(1-6)=5$，

又 $\because\ \tan A\cdot\tan B=6$ 且 $a>b$，则 $\tan A>\tan B$.

$\therefore\ \tan A=3$，$\tan B=2$. 又 $0<A$、$B<\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore\ \sin A=\dfrac{3}{10}\sqrt{10}$，$\sin B=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$. 由正弦定理得

$b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\dfrac{2}{5}\sqrt{5}=\dfrac{8}{5}\sqrt{5}$，$a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\dfrac{3}{10}\sqrt{10}=\dfrac{6}{5}\sqrt{10}$.

$\therefore\ S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{24}{5}$.

[点评]　正、余弦定理解三角形及三角函数知识的综合是高考命题的热点，应加强所学知识的前后联系.

◈ **[考题 11]**　已知方程 $x^2-(b\cos A)x+a\cos B=0$ 的两根之积等于两根之和，a、b 为 $\triangle ABC$ 的两边，A、B 为两内角，试判断这个三角形的形状.

[解析]　解法一：设方程的两根为 x_1、x_2，由韦达定理知：$x_1+x_2=b\cos A$，$x_1\cdot x_2=a\cos B$. 依题意 $b\cos A=a\cos B$.

由余弦定理得：$b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$.

所以 $b^2+c^2-a^2=a^2+c^2-b^2$，即 $2b^2=2a^2$，即 $a=b$，

所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

解法二：设方程的两根为 x_1、x_2，由韦达定理及题意得

$$b\cdot\cos A=a\cdot\cos B,$$

由正弦定理得：　$2R\sin B\cos A=2R\sin A\cos B$，

即 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=0$，$\sin(A-B)=0$.

$\because\ A$、B 为 $\triangle ABC$ 的内角，$\therefore\ 0<A<\pi$，$0<B<\pi$，$\therefore\ -\pi<A-B<\pi$.

$\therefore\ A-B=0$，即 $A=B$，故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

则 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$.

6. 如何证明三角形中的恒等式(或不等式)

证明三角形中的恒等式(或不等式)的关键在于:利用正弦定理和余弦定理以及其他公式,对边角关系相互转化,再利用有关知识求解.

[例]　在△ABC 中,$\frac{\pi}{3}\leqslant B\leqslant\frac{\pi}{2}$,求证:$a+c\leqslant 2b$.

[证明]　$\because B\geqslant\frac{\pi}{3}$,

$\therefore A+C=\pi-B\leqslant\frac{2\pi}{3}\leqslant 2B$,

$\therefore 0<\frac{A+C}{2}\leqslant B<\frac{\pi}{2}$,$\therefore \sin\frac{A+C}{2}\leqslant\sin B$,

又 $-\frac{\pi}{2}<\frac{A-C}{2}<\frac{\pi}{2}$,$\therefore 0<\cos\frac{A-C}{2}<1$.

$\therefore a+c=2R\sin A+2R\sin C=4R\cdot\sin\frac{A+C}{2}\cdot\cos\frac{A-C}{2}\leqslant 4R\sin\frac{A+C}{2}\leqslant 4R\sin B=2b$.

3 创新·思维拓展

7. 如何求三角形中有关最值的问题

解决三角形中的有关最值问题的关键在于:利用正弦定理或余弦定理、三角恒等变换思想将有关问题转化为某一个角的三角函数,或某一边的函数,进而求出其最值.

[例]　已知圆 O 的半径为 R,它的内接△ABC 满足 $2R(\sin^2A-\sin^2C)=(\sqrt{2}a-b)\sin B$,求△ABC 面积的最大值.

[解析]　先可将已知等式转化为边的关系式,再由边的关系式的结构特征联想到余弦定理可求角 C,最后利用三角函数的有界性确定面积的最大值.

解:利用正弦定理可将已知等式变为

$$a^2-c^2=b(\sqrt{2}a-b),$$

即 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$,

$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore C=\frac{\pi}{4}$,

$\therefore S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin A\cdot 2R\sin B\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}R^2\sin A\sin B=-\frac{\sqrt{2}}{2}R^2\cdot\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos(A-B)\right]$.

$\therefore$ 当 $A=B$ 时,$S_{\triangle}$ 有最大值 $\frac{1+\sqrt{2}}{2}R^2$.

8. 三角形的综合问题

利用正弦定理、余弦定理在解决三角形的综合问题时,要注意以下关系式的运用:$A+B+C=\pi$;$\sin(A+B)=\sin C$;$\cos(A+B)=-\cos C$;

◈ **[考题12]**　在△ABC 中,$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$,$2\cos A\sin B=\sin C$,试判断△ABC 的形状.

[解析]　由 $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$,得 $a^2+b^2-c^2=ab$,

$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$,$\therefore C=60^\circ$,$\therefore A+B=120^\circ$.

又 $2\cos A\sin B=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$,

$\therefore \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B=0$,$\therefore A=B=60^\circ$,

故△ABC 为等边三角形.

◈ **[考题13]**　在△ABC 中,角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c,证明 $\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

[解析]　此题主要考查正、余弦定理在证明恒等式中的应用.由等号左边的 a^2、b^2、c^2,运用余弦定理进行转化,由等号右边的正弦值,想到运用正弦定理转化.

证明:由余弦定理知 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$,两式相减得 $a^2-b^2=b^2-a^2-2bc\cos A+2ca\cos B$,$\therefore \frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{a\cos B-b\cos A}{c}$.由正弦定理知 $\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}$,$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$,$\therefore \frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin A\cos B-\sin B\cos A}{\sin C}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

[点评]　利用正、余弦定理证明与三角形有关的三角恒等式,要紧紧把握正、余弦定理中所反映的三角形中的边角关系来处理.正弦定理常用来把边转化为角,余弦定理常用来把角转化为边.另外还要运用三角形及三角函数的其他运算性质.

◈ **[考题14]**　如图 1-1-8,在四边形 $ABCD$ 中,A、B 为定点,C、D 是动点,$AB=\sqrt{3}$,$BC=CD=AD=1$,△ABD 与△BCD 的面积分别为 S 与 T.(1)求 S^2+T^2 的取值范围;(2)当 S^2+T^2 取得最大值时,求∠BCD 的值.

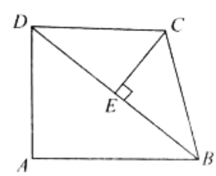


图 1-1-8

[解析]　(1)设 $BD=2x$,

则 $\sqrt{3}-1<2x<2$,$\therefore \frac{\sqrt{3}-1}{2}<x<1$.

在△CDB 中,作 $CE\perp BD$ 交 BD 于点 E,

$\because CD=CB=1$,$\therefore DE=BE=x$,故 $CE^2=1-x^2$,

从而 $T^2=\left(\frac{1}{2}BD\cdot CE\right)^2=x^2(1-x^2)=x^2-x^4$.

又 $S^2=\left(\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin A\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)^2=\frac{3}{4}(1-\cos^2A)$

$$=\frac{3}{4}\left[1-\left(\frac{1+3-4x^2}{2\sqrt{3}}\right)^2\right]=\frac{3}{4}-(1-x^2)^2=-x^4+2x^2-\frac{1}{4}.$$

所以,$S^2+T^2=-x^4+2x^2-\frac{1}{4}+x^2-x^4=-2\left(x^2-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$.

所以,当 $x^2=\frac{3}{4}$ 时,S^2+T^2 取得最大值为 $\frac{7}{8}$,

$\because 1-\frac{\sqrt{3}}{2}<x^2<1$,$\therefore \frac{2\sqrt{3}-3}{4}<S^2+T^2\leqslant\frac{7}{8}$.

即 S^2+T^2 的取值范围是 $\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{4},\frac{7}{8}\right]$.

(2)当 $S^2+T^2=\frac{7}{8}$ 时,$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$BD=\sqrt{3}$,此时∠BCD $=120^\circ$.

$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$；$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$.

［例］　在△ABC中，a、b、c分别是角A、B、C的对边，设$a+c=2b$，$A-C=\frac{\pi}{3}$，求$\sin B$的值.

（全国高考题）

［解］　$\because a+c=2b$，

$\therefore \sin A+\sin C=2\sin B.$

$\therefore 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\sin B.$

$\because \sin\frac{A+C}{2}=\sin\frac{\pi-B}{2}=\cos\frac{B}{2}$，

且$A-C=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$且$\cos\frac{B}{2}\neq 0$，

$\therefore \quad \sin\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

从而$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{B}{2}}=\frac{\sqrt{13}}{4}.$

$\therefore \quad \sin B=\frac{\sqrt{39}}{8}.$

再如：已知$(a^2+bc)x^2+2\sqrt{b^2+c^2}x+1=0$是关于$x$的二次方程，其中$a$、$b$、$c$是△$ABC$的三边，(1)若$A$为钝角，试判断方程的根的情况；(2)若方程有两个相等的实根，求A的度数；(3)若方程有两个不等的实根，试求A的取值范围.

［解］　(1)由于A为钝角，

$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}<0$，

即$b^2+c^2<a^2$.

此时，$\Delta=4(b^2+c^2)-4(a^2+bc)\cdot 1$

$=4(b^2+c^2-a^2-bc)<-4bc.$

又$b>0$，$c>0$，

$\therefore \Delta<0$，此时方程无实根.

(2)由已知得，$\Delta=0$，

即　$b^2+c^2-a^2-bc=0$，

$\therefore \quad b^2+c^2-a^2=bc.$

又由余弦定理得，

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，

又$A\in(0°,180°)$，

$\therefore \quad A=60°.$

(3)由已知有$\Delta>0$，

即　$b^2+c^2-a^2-bc>0$，

$\therefore b^2+c^2-a^2>bc.$

$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}.$

而$y=\cos x$在$(0,\pi)$上递减，

故所求A的取值范围为$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$.

◈［考题15］　如图1－1－9所示，三角形ABC中，$AB=2$，$\cos C=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，$D$是$AC$上一点，$AD=2DC$且$\angle DBC=\arccos\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

求：(1)$\angle BDA$的大小；(2)$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$.

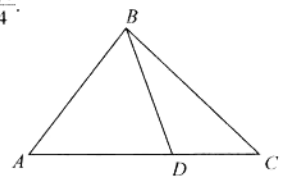


图1－1－9

［解析］　(1)由已知可求出C、$\angle DBC$的三角函数值，由$\angle BDA=C+\angle DBC$，可找到解题思路；(2)$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cdot\cos(\pi-C)$，因此求$|\overrightarrow{AD}|$、$|\overrightarrow{CB}|$是解决问题的关键，可利用正、余弦定理解决问题.

解：(1)由已知得　$\cos\angle DBC=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，$\cos C=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

从而$\sin\angle DBC=\frac{\sqrt{21}}{14}$，$\sin C=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

$\therefore \cos\angle BDA=\cos(\angle DBC+C)=\frac{5\sqrt{7}}{14}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}-\frac{\sqrt{21}}{14}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \qquad \angle BDA=\frac{\pi}{3}.$

(2)设$DC=x$，则$AD=2x$，$AC=3x$，设$BC=a$，则在△DBC中，由正弦定理得：

$$\frac{x}{\sin\angle DBC}=\frac{a}{\sin\angle BDC},$$

$\therefore \qquad a=\sqrt{7}x.$

在△ABC中，由余弦定理得$4=(3x)^2+(\sqrt{7}x)^2-2\cdot 3x\cdot\sqrt{7}x\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

$\therefore x=1$，$\therefore |\overrightarrow{AC}|=3$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{7}$，

$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cdot\cos(\pi-C)=2\cdot\sqrt{7}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)=-4.$

◈［考题16］　现有一块直径为30cm的钢板，需截去直径分别为20cm、10cm的圆形钢板各一块，现需在剩余的钢板中再截出同样大小的钢板两块，问这两块钢板的半径最大为多少厘米？

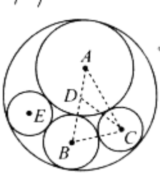


图1－1－10

［解析］　如图1－1－10，设⊙A、⊙B分别为直径20cm和10cm的圆，⊙D为直径30cm的圆，则⊙A、⊙B相外切且与⊙D内切，再设截下的两个最大的圆为⊙C、⊙E，则它们与⊙A、⊙B相外切，且与⊙D相内切，连结AB、AC、BC、CD. 设⊙C的半径为r.

在△ABC中，$AB=15$，$AC=10+r$，$BC=5+r$，$AD=5$，$CD=15-r$，

由余弦定理得$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$

$=\frac{15^2+(10+r)^2-(5+r)^2}{2\times 15\times(10+r)}=\frac{30+r}{30+3r}.$

在△ADC中，$\cos\angle DAC=\frac{AD^2+AC^2-CD^2}{2AD\cdot AC}$

$=\frac{(10+r)^2+5^2-(15-r)^2}{2\cdot(10+r)\cdot 5}=\frac{5r-10}{r+10}.$

故　$\frac{30+r}{30+3r}=\frac{5r-10}{r+10}$，

整理得：$7r^2+40r-300=0$，$\therefore r=\frac{30}{7}$（负的舍去）.

所以在剩余的钢板中还可以截去半径为$\frac{30}{7}$cm的同样大小的圆形钢板两块.