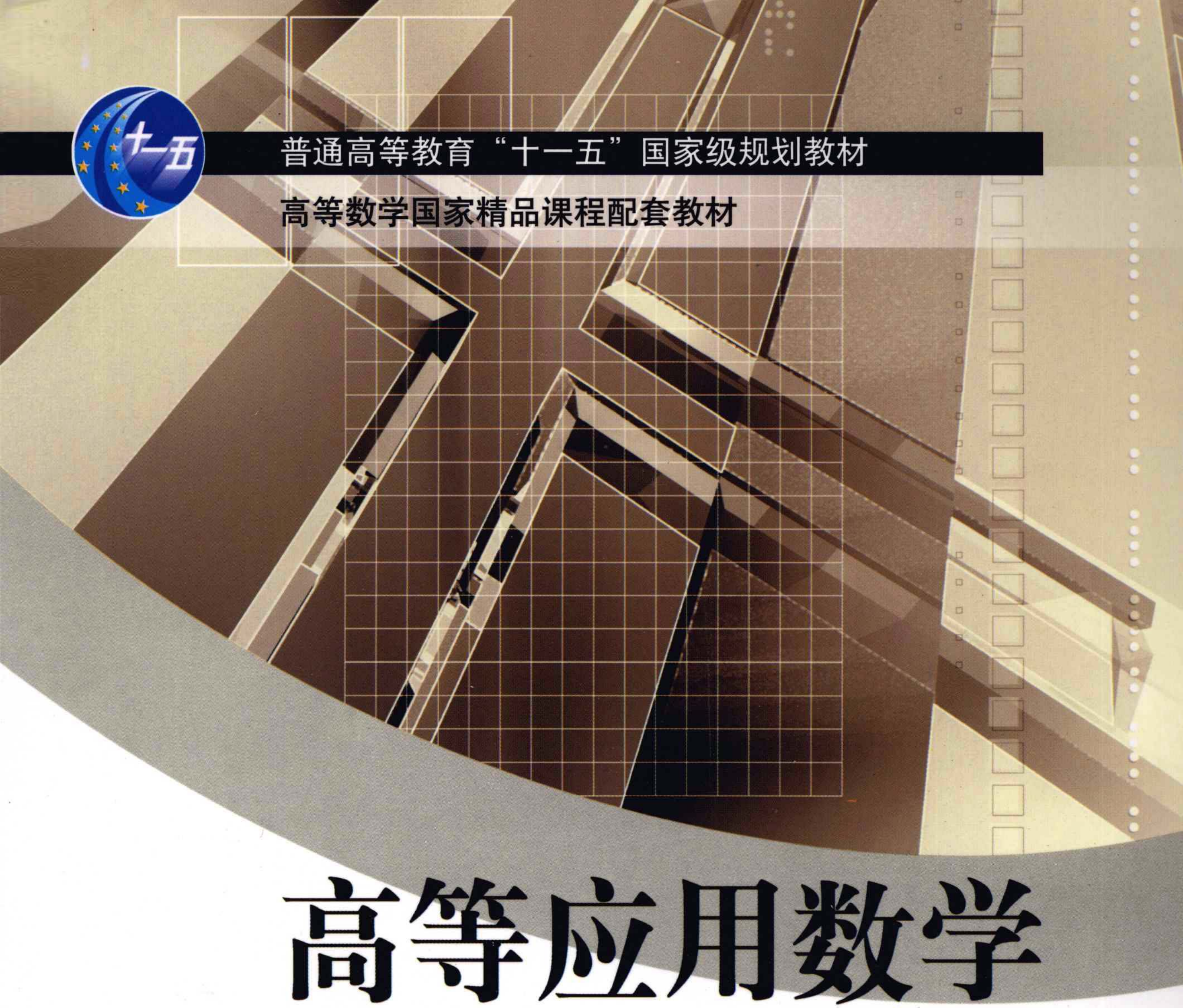


普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学国家精品课程配套教材

高等应用数学

颜文勇　柯善军　主编

高等教育出版社
Higher Education Press

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
高等数学国家精品课程配套教材

高等应用数学

颜文勇　柯善军　主编

高等教育出版社

内容提要

为适应新世纪对高素质应用型专门人才的新要求，在国家级精品课程建设以及全国大学生数学建模竞赛组委会立项课题研究成果的基础上，我们编写了这本理工类高职高专高等数学教材，并被列入普通高等教育"十一五"国家级规划教材。

本书包括函数的极限与连续、导数与微分及其应用、积分及其应用、微分方程、傅里叶级数与拉氏变换、多元函数微积分、线性代数初步和数学实验等八章。

本教材可作为高等职业技术学院、高等专科学校及成人高校的通用教材，也可作为数学建模培训、数学实验课程和经济、工程应用中的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学/颜文勇，柯善军主编. —北京：高等教育出版社，2008.8

ISBN 978-7-04-024344-4

Ⅰ.高… Ⅱ.①颜…②柯… Ⅲ.应用数学-高等学校-教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 113404 号

策划编辑 邓雁城 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 于文燕 **责任绘图** 杜晓丹
版式设计 陆瑞红 **责任校对** 姜国萍 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	版　　次	2008年8月第1版
印　　张	19	印　　次	2008年8月第1次印刷
字　　数	420 000	定　　价	25.80元

物料号 24344-00

前　言

为配合产业技术的提升和社会经济的迅速发展，在国家级精品课程建设的基础上，我们编写了这本《高等应用数学》教材。

本书以培养应用型人才为目标，借鉴数学建模在提高学生综合能力和素质方面的成功经验，将数学基本知识、数学建模和数学实验有机融合，主要有以下几个特点：

1．做到“一个突破，两个衔接”，实现内容和体系的创新

本书编写的指导思想是：“一个突破，两个衔接”。“一个突破”是指突破传统的大学数学教材的编写方法和数学的理论体系，根据高素质应用型专门人才培养的要求，形成新的理论和内容体系。“两个衔接”是指与技能型人才的培养需要相衔接和与我国目前高职学生的实际数学水平相衔接。做到精简内容、降低难度、突出应用。本书注重与实际应用联系较多的数学基础知识、基本方法和基本技能的训练，不追求复杂的计算和变换。注重揭示抽象概念的本质，如极限——分析事物发展变化规律的重要工具，导数——瞬时变化率，定积分——求总量的数学模型等，强化其与实际的联系。

2．应用性和启发性

本书采用“案例驱动”法编写。我们精心编写了大量与专业和实际生活联系紧密的，适合高职高专数学教学的应用案例，将理解概念落实到用数学思想及数学概念消化、吸纳工程概念及原理上。全书由实际生活和工程问题启发学生思维，引出数学知识，再列举大量浅显、贴近生活与专业的数学应用案例，在案例分析的基础上，安排实训，由浅入深，深入浅出，引人入胜。由于产业技术更新周期的缩短，该教材力图反映现代技术中的新知识、新技术、新内容、新工艺和新案例，充分体现高职教育紧密联系生产、建设、服务、管理一线的实际要求。

3．直观性

该书大量运用数表、图像和标注，简化了文字描述，使教材清晰、直观、明快，浅显易懂。同时，设计了图标和与案例匹配的图形，使教材风格新颖，形式活泼，提高了教材的“亲和力”。

本书包括函数的极限与连续、导数与微分及其应用、积分及其应用、微分方程、傅里叶级数与拉普拉斯变换、多元函数微积分、线性代数初步和数学实验等共8章。前四章为各专业的基础模块，不低于64学时，后四章为选学模块，各专业可根据专业培养目标的要求，选学相应的教学内容，如通信类可选学傅里叶级数与拉普拉斯变换，电类可选学多元函数微积分与线性代数初步等。另外，有条件的学校可开设数学实验。

参加本书编写的有成都电子机械高等专科学校的颜文勇、成和平，成都航空职业技术学院的

柯善军，北京工业职业技术学院的李月清等教师。全书由颜文勇完成最后的统稿.

由于水平所限，成书时间也比较仓促，本书难免有不足之处，敬请读者指正。

编　者

2008年4月

目　录

第一章　函数的极限与连续

第二章　导数与微分及其应用

第三章　积分及其应用

第四章　微分方程

第五章　傅里叶级数与拉普拉斯变换

第六章 多元函数微积分

第七章 线性代数初步

第八章 数学实验

第一章

函数的极限与连续

【目标】复习函数知识,建立实际问题的函数关系,理解函数极限与连续的概念,能用极限的思想方法分析实际问题.

极限概念是微积分学一个最基本、最重要的概念.一方面,它是建立微积分学的基础;另一方面,极限的思想和分析方法将贯穿微积分学的始终,函数的连续性、导数与积分等都将借助于极限方法来描述.本章主要讨论函数的极限与连续的基本概念、基本性质和基本运算,并介绍它们的一些实际应用.

第一节　函数及函数关系的建立

自然界没有绝对静止或绝对孤立的事物.函数能准确地刻画各事物或各因素之间的相依关系,它提供了进行数量研究的方法.1837 年,德国数学家狄利克雷(Dirichlet,1805—1859)提出了现今通用的函数定义,使函数关系更加明确.微积分学的主要研究对象是函数.

一、常量与变量

定义 1.1.1　在某一过程中始终保持一定数值的量称为**常量**,常用 a、b、c 等符号表示;而在过程进行中可以取不同数值的量称为**变量**,常用 x、y、z 等符号表示.

如某间教室的长、宽、高等都是常量,物体运动的速度、人的身高等都是变量.另外,加热密闭容器内的气体,气体的体积和气体的分子个数保持一定,是常量,而气体的温度和压力是变量.

二、 函数的概念与表示

在同一自然现象或技术过程中，往往有多个变量在变化着，这些变量并不是孤立地在变化，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 如某地一天的气温随时间的变化而变化. 如何准确地表示气温与时间之间的变化关系呢？以下我们考虑两个变量之间的简单情形.

引例 1[圆的面积] 圆的面积 A 与半径 r 的关系可表示为

$$A = \pi r^2.$$

引例 2[自由落体运动方程] 在自由落体运动中，物体下落的距离 S 随下落时间 t 的变化而变化，下落距离 S 与时间 t 之间的依赖关系可以用下式表示

$$S = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 为重力加速度.

在研究事物内部、事物与事物各因素间的关系时，我们常常通过对客观事物的分析，建立各因素之间的关系式. 这种关系式可以充分揭示各因素之间的数量关系，也是我们揭示事物发展规律，对事物进行分析和研究的重要基础.

1. 函数的概念

定义 1.1.2 设 x 和 y 是两个变量，D 是一给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y = f(x)$，其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为函数的**定义域**，$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的**值域**.

图 1－1 简明地标注了函数的定义域、值域、对应法则、自变量、因变量（函数）等.

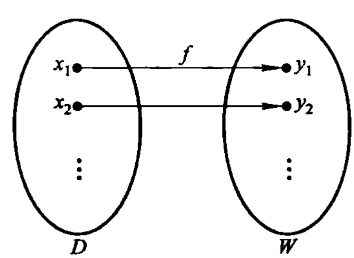


图 1－1

2. 函数的表示方法

函数常用的表示法有三种：解析法、列表法和图形法.

（1）解析法

$$\underset{\text{因变量}}{y} = \underset{\text{对应法则}}{f}(\underset{\text{自变量}}{x})$$

如函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ 的定义域为 $D = \{x \mid -3 < x < 3\}$，值域为

$$W=\left\{y\left|\frac{1}{3}\leqslant y<+\infty\right.\right\}.$$

解析法的优点是便于数学上的分析和计算. 本书主要讨论用解析式表示的函数.

(2) 列表法

要获得某地一天中气温与时间的变化关系,可以每间隔一段时间测量一些数据. 表 1－1 列出了某地从上午 10 时到中午 12 时每隔 20 分钟测得的气温数据,由此可以观察出在这段时间内该地气温的变化规律.

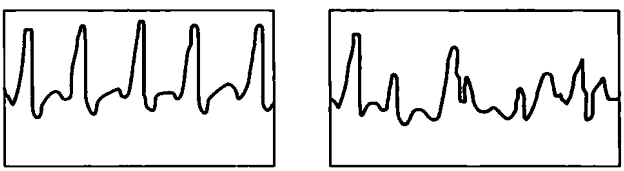
表 1－1

时间 t(单位:分钟)	10:00	10:20	10:40	11:00	11:20	11:40	12:00
气温 T(单位:℃)	18	18	18.5	19	20	21	23

列表法的优点是简明、直观. 一些科技手册也采用了这种方法.

(3) 图形法

通过心电图的比较,医生可以诊断出该人是否患有心脏病. 如图 1－2(a)为健康人的心电图,而图 1－2(b)为患有严重心脏病病人的心电图.



(a)　　(b)

图 1－2

图形法的优点是直观、通俗、容易比较. 它的缺点是不便于作精细的理论研究.

在实际生活和工程技术中,经常用到以上三种函数表示形式. 下面再给出一些案例.

案例 1[波形函数]　在电子科学中,有大量波形函数,图 1－3 为一周期为 T 的锯齿形波. 此函数在一个周期$[0,T)$上可用解析法表示为

$$y=\frac{h}{T}x\quad(0\leqslant x<T).$$

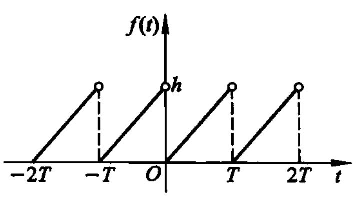


图 1－3

案例 2[股票曲线]　股票在某天的价格和成交量随时间的变化常用图形直观地表示. 图 1－4 为某只股票在某天的分时图. 从此曲线可以看出该只股票当天的价格和成交量随时间的波动情况.

***案例 3[物理实验]**　设某一物理现象的数学关系为

$y=\varphi(t)$，用实验测得 t_i 时刻 $\varphi(t_i)$ 的值，见表 1－2.

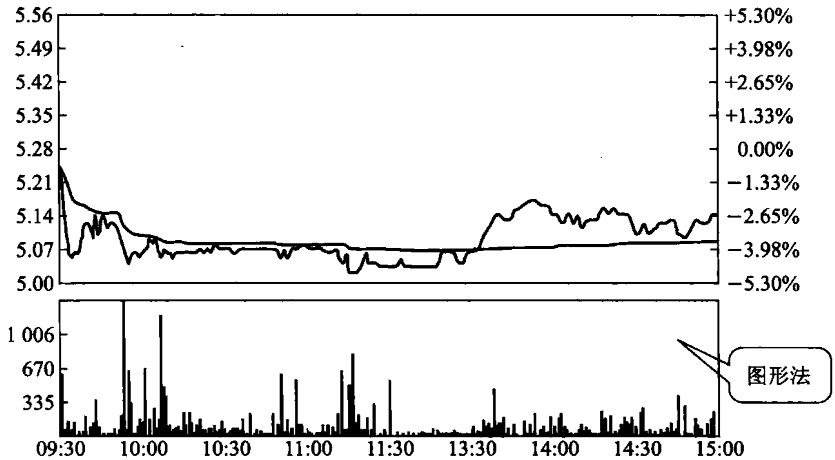


图 1－4

列表法

表 1－2

t	0	t_1	t_2	…	t_m
$\varphi(t)$	φ_0	φ_1	φ_2	…	φ_m

三、 基本初等函数

基本初等函数为以下五类函数：

(1) 幂函数　$y=x^{\mu}$，μ 是常数；

(2) 指数函数　$y=a^x$（a 是常数且 $a>0,a\neq1$），$x\in(-\infty,+\infty)$；

(3) 对数函数　$y=\log_a x$（a 是常数且 $a>0,a\neq1$），$x\in(0,+\infty)$；

(4) 三角函数

正弦函数　$y=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in[-1,1]$，

余弦函数　$y=\cos x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in[-1,1]$，

正切函数　$y=\tan x$，$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，$y\in(-\infty,+\infty)$，

余切函数　$y=\cot x$，$x\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$y\in(-\infty,+\infty)$；

(5) 反三角函数

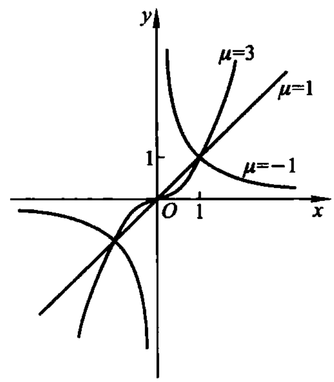
反正弦函数　$y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$，$y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，

反余弦函数 $y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$,

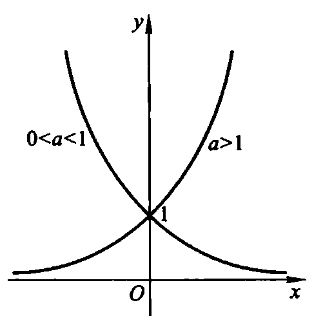
反正切函数 $y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty), y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty), y\in(0,\pi)$.

以上五种基本初等函数在初等数学中已经学习过，其函数图形如图 1-5 所示.

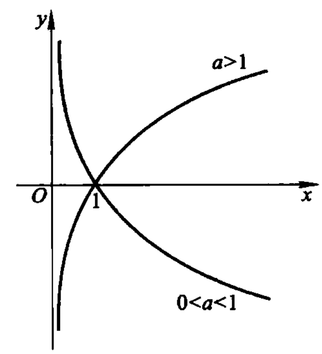


(a) $y=x^{\mu}$ (μ是常数)



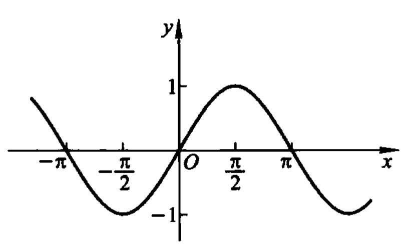
(b) $y=a^x$

(a是常数且$a>0, a\neq 1$)

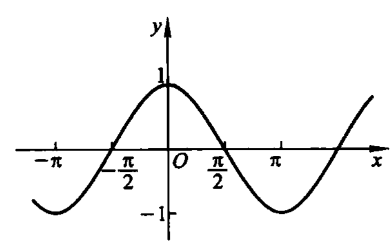


(c) $y=\log_a x$

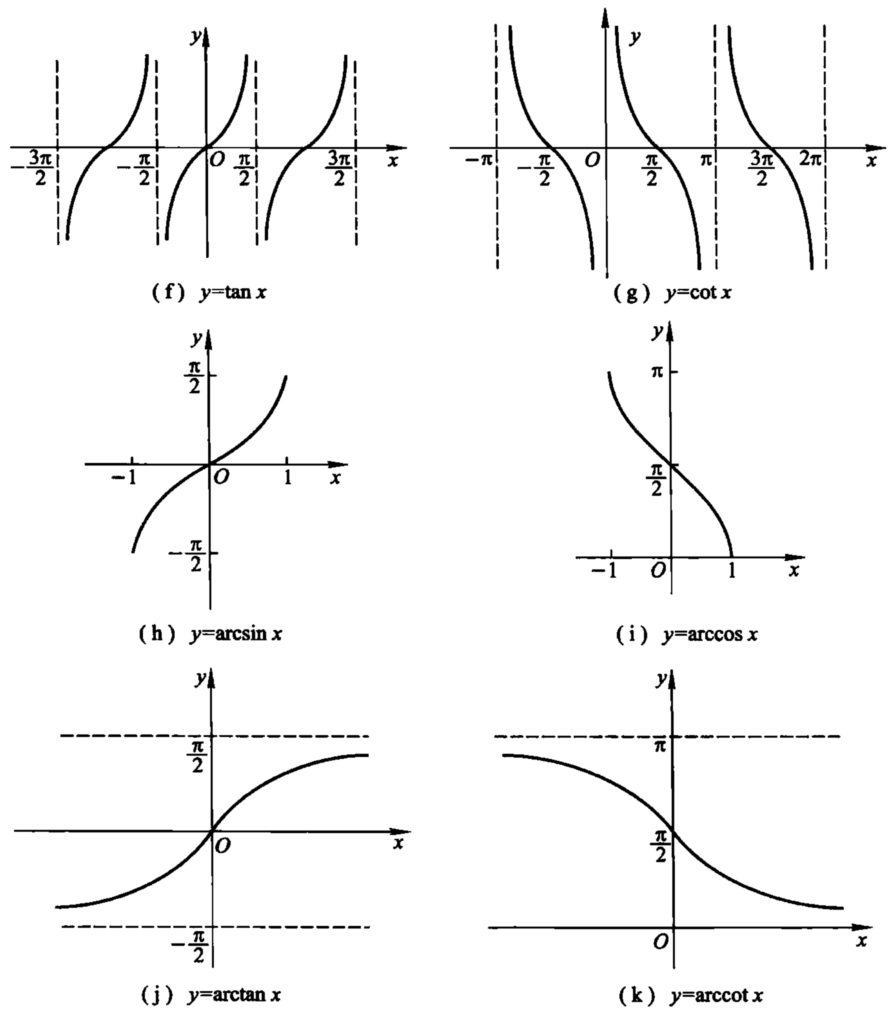
(a是常数且$a>0, a\neq 1$)



(d) $y=\sin x$



(e) $y=\cos x$



(f) $y=\tan x$ (g) $y=\cot x$

(h) $y=\arcsin x$ (i) $y=\arccos x$

(j) $y=\arctan x$ (k) $y=\text{arccot}\, x$

图 1－5

四、复合函数与初等函数

事实上，大量函数并不是基本初等函数，而是由基本初等函数构成的函数. 如 $y=\dfrac{1}{5x}$，$y=\sin 2x$ 等.

1. 复合函数

定义 1.1.3 若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，当 x 在 $u=\varphi(x)$ 的定义域

或其一部分取值时,$\varphi(x)$的值均在$y=f(u)$的定义域内,从而得到一个以x为自变量,y为因变量的函数,这个函数称为由函数$y=f(u)$和$u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**,u称为**中间变量**,记作

$$\underset{\text{因变量}}{y}=\underset{\text{外层函数}}{f}[\underset{\text{内层函数}}{\varphi(x)}].$$

如复合函数　$y=\arcsin\sqrt{x}$是由$y=\arcsin u$,$u=\sqrt{x}$构成的;$y=\lg\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$是由$y=\lg u$,$u=1+\sqrt{v}$,$v=1+x^2$构成的.

2. 初等函数

定义1.1.4　由常数及基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的复合所构成并且可以用一个式子表示的函数,称为**初等函数**.

如$y=\ln(\sin 2x)+x^2$,$y=e^{\sqrt{\arctan x}}+\cos x$等都是初等函数,而$y=x^x$却不是初等函数.

案例4[生产费用]　某工厂生产计算机的日生产能力为0到100台,工厂维持生产的日固定费用为4万元,生产一台计算机的直接费用(含材料费和劳务费等)是4 250元.试建立该厂日生产x台计算机的总费用函数,并指出其定义域.

解　设该厂日生产x台计算机的总费用为y(单位:元),则y为日固定费用和生产x台计算机所需总费用之和,即

$$F(x)=40\ 000+4\ 250x,$$

由于该厂每天最多能生产100台计算机,所以定义域为$\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 100,x\in\mathbf{N}\}$.

五、分段函数

在工程技术中,还有一类常见函数——**分段函数**,它在不同的定义域上用不同的函数表达式表示.

下面列举几个常用的分段函数.

(1)绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

如图1-6所示.

(2)符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$$

如图1-7所示.

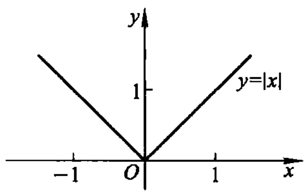


图 1－6

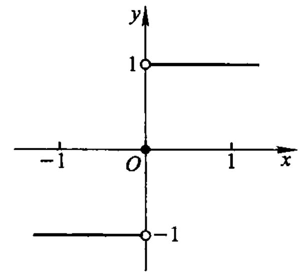


图 1－7

（3）特征函数

$$y=\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A,\end{cases}$$

其中 A 是数集，此函数常用于计数统计.

（4）单位阶跃函数

$$u(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

单位阶跃函数是电学中的一个常用函数.

（5）取整函数

$$y=[x],$$

它表示不超过 x 的最大整数部分，如图 1－8 所示.

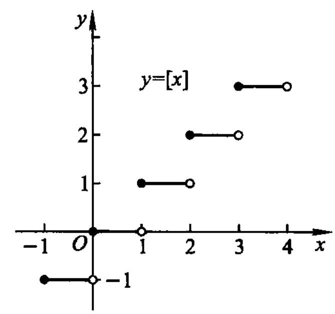


图 1－8

如 $[3.7]=3,[-3.7]=-4$.

案例 5［个人所得税］ 我国于 1993 年 10 月 31 日发布的《中华人民共和国个人所得税法》规定月收入超过 800 元为应纳税所得额（即个人所得税的起征点）. 随着人民生活水平的提高，从 2007 年 1 月 1 日起，个人所得税的起征点由 800 上调为1 600 元，从 2008 年 3 月 1 日起，个人所得税的起征点又由 1 600 元改为 2 000 元（表 1－3 仅保留了原表中前 4 级的税率）.

表 1－3

级　数	全月应纳税所得额	税 率（%）
1	不超过 500 元部分	5
2	超过 500 元至 2 000 元部分	10
3	超过 2 000 元至 5 000 元部分	15
4	超过 5 000 元至 20 000 元的部分	20

若某单位现有员工的月收入都不超过 22 000 元，请建立该单位员工月收入与纳税金额间的函数关系.

解　设某人月收入为 x 元,应交纳所得税为 y 元.

当 $0 \leqslant x \leqslant 2\ 000$ 时,$y=0$;

当 $2\ 000 < x \leqslant 2\ 500$ 时,$y=(x-2\ 000)\times 5\%$;

当 $2\ 500 < x \leqslant 4\ 000$ 时,

$y=(2\ 500-2\ 000)\times 5\%+(x-2\ 500)\times 10\%=25+(x-2\ 500)\times 10\%$,

依此类推,函数关系为

$$y=\begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 2\ 000, \\ 0.05\times(x-2\ 000), & 2\ 000 < x \leqslant 2\ 500, \\ 0.1\times(x-2\ 500)+25, & 2\ 500 < x \leqslant 4\ 000, \\ 0.15\times(x-4\ 000)+175, & 4\ 000 < x \leqslant 7\ 000, \\ 0.2\times(x-7\ 000)+625, & 7\ 000 < x \leqslant 22\ 000. \end{cases}$$

函数图形如图 1-9 所示.

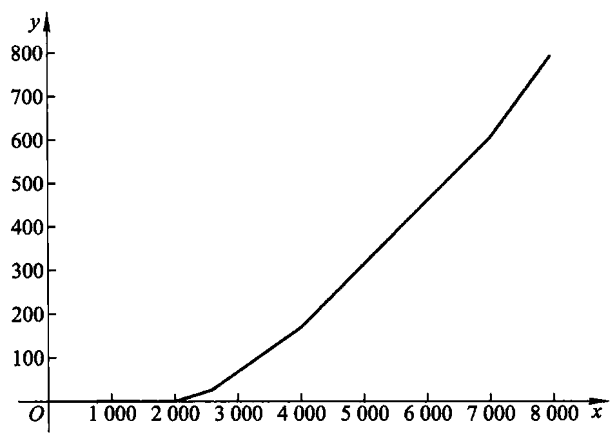


图 1-9

若某人月收入为 3 650 元,则应使用公式 $y=0.1(x-2\ 500)+25$ 求值,所交税为 $y\big|_{x=1850}=0.1\times 1\ 150+25=140$(元).

实训 1-1

1. 函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x\neq 1, \\ 0, & x=1 \end{cases}$ 是否为初等函数?

2. 确定下列函数的定义域:

(1) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　　(2) $y=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x<0,\\ \sqrt{3-x}, & 0<x<2.\end{cases}$

3. 指出下列复合函数的构成：

(1) $y=\cos x^4$;　　(2) $y=\sqrt{\sin^2 x}$;

(3) $y=\frac{1}{\arccos\sqrt{x}}$;　　(4) $y=\left[\frac{1-(1-x^2)^2}{1+(1-x^2)^2}\right]^3$.

4. 请列举生活和学习中的一些函数及其常用表示.

5. [产品收入] 某工厂第 t 年生产某种产品的产量为 $120+2t+3t^2$ 单位，单位产品的价格为 $6000+700t$. 试建立该厂第 t 年的年收入函数.

6. [矩形波] 写出如图 1-10 所示的矩形波函数 $f(x)$ 在一个周期 $[-\pi,\pi)$ 上的函数表达式(解析式).

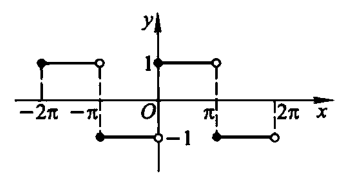


图 1-10

7. [汽车租赁] 一汽车租赁公司出租某种汽车的收费标准为：每天的基本租金 200 元，另外每千米收费为 15 元/km.

(1) 试建立每天的租车费与行车路程 x km 之间的函数关系；

(2) 若某人某天付了 400 元租车费，问他开了多少 km?

8. [邮资费用] 我国 2001 年 8 月 1 日公布的包裹邮寄费收费标准如表 1-4 所示.

表 1-4

质量 / 资费 / 里程	首重 1000 克	5000 克以内续重每 500 克	5001 克以上续重每 500 克
500 km 及 500 km 以内	5 元	2 元	1 元

试建立在 500 km 及 500 km 以内包裹资费 y(单位:元)与包裹质量 x(单位:克)间的函数关系.

第二节 数列的极限

极限概念最初产生于求曲边梯形的面积与求曲线在某一点处的切线斜率. 19 世纪以前，人们用朴素的极限思想计算了圆的面积、球的体积等. 19 世纪之后，柯西(Cauchy,1789—1851)以物体运动为背景，结合几何直观，引入了极限概念. 后来，维尔斯特拉斯(Weierstrass,1815—1897)给出了形式化的数学语言描述. 有了极限概念，我们可以计算许多具体的量，如圆周长、圆面积、