玄海燕　马成业　编著

概率论与数理统计

PROBABILITY THEORY and MATHEMATICAL STATISTICS

甘肃民族出版社
GANSU NATIONALITIES PUBLISHING HOUSE

概率论与数理统计

PROBABILITY THEORY and MATHEMATICAL STATISTICS

玄海燕　马成业　编著

甘肃民族出版社
GANSU NATIONALITIES PUBLISHING HOUSE

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 玄海燕，马成业编著. —兰州：甘肃民族出版社，2008.5
ISBN 978-7-5421-1302-3

Ⅰ.概… Ⅱ.①玄…②马… Ⅲ.①概率论②数理统计 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第059069号

书　　名：概率论与数理统计
作　　者：玄海燕　马成业　编著
责任编辑：张兰萍
封面设计：王林强
出　　版：甘肃民族出版社（730030　兰州市南滨河东路520号）
发　　行：甘肃民族出版社发行部
（730030　兰州市南滨河东路520号）
印　　刷：甘肃北辰印务有限公司
开　　本：850毫米×1168毫米　1/32　印张：9.625　插页：2
字　　数：260千
版　　次：2008年9月第1版　2008年9月第1次印刷
印　　数：1~1 000册
书　　号：ISBN978-7-5421-1302-3
定　　价：29.00元

甘肃民族出版社图书若有破损、缺页或无文字现象可直接与本社联系调换。
邮编：730030　　地址：兰州市南滨河东路520号
电话：0931-8773261（编辑部　联系人：李青立　E-mail:lili295@sohu.com）
电话：0931-8773271（发行部　联系人：葛　慧　E-mail:gsmzgehui3271@tom.com）

前　　言

概率论与数理统计是一门专门研究和探索客观世界中随机现象统计规律性的科学，是广泛应用于金融、保险、经济与企业管理、工农业生产、军事、医学、地质学、空间技术、气象与灾害预报等几乎所有社会和科学技术领域的定量和定性分析的科学体系。

从学科性质讲，它是一门基础性学科，它为学生的后继专业课程的学习提供理论知识和应用方法。通过学习该课程，帮助学生掌握“概率论与数理统计”的基本概念、基本理论，熟悉数据处理、数据分析、统计推断的各种基本方法，并能用所掌握的理论和方法分析并解决社会、经济、科学等领域所遇到的相关问题。

本书是为适应21世纪高等院校对综合型、创新型人才培养的需要，依据编者多年来从事“概率论与数理统计”课程的教学经验的基础上编写的。第一、二、三、四、五章主要介绍概率论的基础理论知识及应用，由玄海燕负责编写；第六、七、八、九章主要介绍数理统计的基础知识与应用，由马成业负责编写。

本书系统地阐述了概率论与数理统计的基本概念、基本思想、基本原理与基本方法，注重理论联系实际，突出解题思路，介绍多种解题方法与方法之间的联系，并使解题方法条理化，使读者便于学习与记忆，并受到很好的基本训练。章节安排循序渐进，层次分明，前后呼应，便于教学，方便于更好、更快地学习掌握及运用概率

其分布，参数估计，假设检验，方差分析及回归分析.

本书对概率论的基础知识作了扼要的介绍，对一些定理和多维随机变量的内容作了简化处理. 对数理统计的基础知识作了比较详细的阐述，并配备了一定数量的有实践意义的例题和习题.（附有习题答案）另外还配有少量标有“*”号的内容及若干用到综合条件求解的习题（在分隔横线下）供不同专业的师生在教学中选用. 本书突出体现了少而精，强化应用的数学教育的新理念，可作为高等学校工科类、经济管理类概率论与数理统计课程的教材，也可作为其他非数学类专业同名课程的教学参考书.

本系列教材由王晓光副教授主持编写. 王群副教授和唐芳英副教授对本书的初稿提出了许多宝贵意见，在此一并表示感谢.

有于编者水平所限，书中难免有疏漏与不妥之处，敬请读者不吝指教.

编　者

2005 年 7 月

目　录

第一章　概率论的基本概念

本章给出了随机事件及其概率的概念，并建立了一系列计算概率的基本公式，如加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式等。此外，给出了在概率论中地位十分重要的独立性概念，并着重讨论了两种基本概率模型——古典概型和伯努利概型等内容。

§1.1　随机现象与随机试验

一、随机现象

概率论是数学的一个分支，它研究随机现象的数量规律。

所谓随机现象，是相对于确定性现象而言的。在一定条件下必然发生某一结果的现象称为**确定性现象**。例如，在没有外力作用下，作匀速直线运动的物体必然继续作匀速直线运动；又如在标准大气压下，纯水加热到 100℃ 时必然会沸腾等等。这些条件完全决定结果的现象就是确定性现象。在自然界和社会上发生的现象中还广泛存在着与确定性现象有着本质区别的一类现象。例如，抛一枚质地均匀的对称的硬币，结果可能是正面向上，或反面向上；新生的婴儿可能是男或是女；过马路交叉口时，可能遇上各种颜色的交通指挥灯；在相同海况与气象条件下，某定点海面的浪高时起时伏；当空气阻力等不能忽略时，弹道不能根据初始条件完全确定，可能向不同方向作不同程度的偏移。这些现象的特点是在基本条件不变的情况下，一系列实验或观察会得到不同的结果。在每一次实验或观察之前，不能完全肯定会出现哪种结果。究竟

出现哪种结果，呈现出偶然性。在一定条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在实验或观察之前不能预知确切的结果的现象称为**随机现象**。概率论研究随机现象有其独特的方法，它不是企图追索出现每一结果的一切物理因素，从而像研究确定性现象那样确定无疑地预报在哪一个条件下出现某一确定的结果，而是通过对随机现象的大量观察，揭示其规律性。

随机现象揭示条件和结果之间的非确定性联系，其数量关系无法用函数加以描述。随机现象虽然在一次实验或观察中出现什么结果具有偶然性，但在大量重复实验或观察中，这种结果的出现具有一定的**统计规律性**。例如，连续多次抛一枚硬币，随着所抛次数的增加，出现正面的次数与所抛次数之比逐渐稳定于 1/2，从而揭示"出现正面"这一结果发生的可能性大小为 1/2；多次测量一个物体的长度，其测量结果的平均值随着测量次数的增加逐渐稳定于一个常数等等。

由于随机现象的普遍性，概率论与其他数学分支有着紧密的联系，它是现代数学的重要组成部分。概率论的广泛应用几乎遍及所有的科学技术领域，例如天气预报、地震预报、产品的抽样调查，工农业生产和国民经济的各个部门，在通讯工程中可用以提高信号的抗干扰性、分辨率等等。

如何来研究随机现象？随机现象是通过随机试验来研究的。

二、随机试验

在科学研究和工程技术中，经常会在不变的条件下重复地进行多次实验或观测。抽去这些实验或观测的具体性质，就得到试验的概念。为了叙述方便，我们把对某种自然现象和社会现象作一次观察或进行一次科学实验，统称为一个**试验**。试验通常用 E 来表示。试验是一个含义广泛的术语，它包括各种各样的科学实验，甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验。下面

举一些试验的例子。

E_1:抛一枚硬币,观察正面 H、反面 T 出现的情况。

E_2:将一枚硬币抛三次,观察出现正面的次数。

E_3:掷一颗骰子,观察出现的点数。

E_4:记录车站售票处一天内售出的车票数。

E_5:在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命。

E_6:记录某地一昼夜的最高温度和最低温度。

上面举出了六个试验的例子,它们有共同的特点。例如,试验 E_1 有两种可能结果,出现 H 或者出现 T,但在抛掷之前不能确定出现 H 还是出现 T,这个试验可以在相同的条件下重复地进行。又如试验 E_6,我们知道灯泡的寿命（以小时计）$t \geqslant 0$,但在测试之前不能确定它的寿命有多长,这一试验也可以在相同的条件下重复地进行。概括起来,这些试验都具有以下的特点:

(1)在相同的条件下可以重复地进行。

(2)每次试验的可能结果不止一个,但试验的一切可能结果是预先可以明确的。

(3)每次试验之前不能预先判断哪一个结果会出现。

在概率论中,我们将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**。以后所说的试验都是指随机试验。

§1.2　样本空间与随机事件

一、样本空间

在相同的条件下重复地进行试验,虽然可以明确知道每次试验的一切可能的结果,但是在试验之前却无法预知试验的哪一个结果会发生。我们把随机试验 E 的一切可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**,记为 S。样本空间的元素,即 E 的每个结果,称

为**样本点**。例如，§1.1 的六个随机试验的样本空间分别为：

$S_1 = \{H,T\}$;

$S_2 = \{0,1,2,3\}$;

$S_3 = \{1,2,3,4,5,6\}$;

$S_4 = \{1,2,\cdots,n\}$,这里的 n 是售票处一天内准备出售的车票数 n;

$S_5 = \{t \mid t \geqslant 0\}$;

$S_6 = \{(x,y) \mid T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}$,这里 x 表示最低温度,y 表示最高温度,并设这一地区的温度不会小于 T_0,也不会大于 T_1。

这些例子表明,试验的样本点与样本空间是根据试验的内容而确定的。对于同一试验,若试验的目的不同,则对应的样本空间也不同。例如,对于同一试验:“将一枚硬币抛掷三次”。若观察正面 H、反面 T 出现的情况,则样本空间为 $S = \{HHH,THH,HTH,HHT,HTT,THT,TTH,TTT\}$。若观察出现正面的次数,则样本空间为 $S_2 = \{0,1,2,3\}$。所以在具体问题的研究中,描述随机现象的第一步就是建立样本空间。

二、随机事件

在随机试验中,对一次试验可能发生也可能不发生而在大量重复试验中却具有某种规律性的结果称为**随机事件**,简称为**事件**。随机事件通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示,它是样本空间 S 的子集。在每次试验中,当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时,称**事件 A 发生**。

例如在 E_3 中,如果用 A 表示结果“掷出奇点数”,那么 A 是一个随机事件。由于在一次抛掷中,当且仅当掷出的点数是 1,3,5 中的任何一个时才称为事件 A 发生了,所以我们把事件 A 表示为 $A = \{1,3,5\}$。同样地,若用 B 表示结果“掷出偶点数”,那么 B 也

是一个随机事件，$B=\{2,4,6\}$。

特别，由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**。例如，试验 E_1 有两个基本事件$\{H\}$和$\{T\}$，试验 E_3 有 6 个基本事件$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$，$\{6\}$。

对于一个试验 E，在每次试验中必然发生的事件，称为 E 的**必然事件**；在每次试验中都不发生的事件，称为 E 的**不可能事件**。例如在 E_3 中，"掷出的点数不超过 6"就是必然事件，用集合表示这一事件就是 E_3 的样本空间 $S_3=\{1,2,3,4,5,6\}$。而事件"掷出的点数大于 6"是不可能事件，这个事件不包括 E_3 的任何一个可能结果，所以用空集$\varnothing$表示。对于一个试验 E，它的样本空间 S 是 E 的必然事件；空集$\varnothing$是不可能事件。必然事件与不可能事件虽已无随机性可言，但在概率论中，为了便于处理，常把它们当做两个特殊的随机事件。

三、事件间的关系与运算

因为任一随机事件是样本空间的一个子集，所以事件之间的关系和运算与集合论中集合之间的关系和运算是完全类似的。下面我们按照集合之间的关系和运算引进事件之间的一些重要关系和运算，这将有利于以后对事件和它的概率的叙述和研究。

设试验 E 的样本空间为 S，而 $A,B,C,A_k(k=1,2\cdots)$ 是 S 的子集。

(1)**事件的包含与相等**　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称**事件 A 包含于事件 B** 或**事件 B 包含事件 A**，记为 $A\subset B$ 或者 $B\supset A$。若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与事件 B **相等**。

(2)**事件的和**　事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的**和事件**，记为 $A\cup B$。事件 $A\cup B$ 发生意味着：或事件 A 发生，或事件 B 发生，或事件 A 与事件 B 都发生。

事件的和可以推广到多个事件的情形。n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$

中至少有一个发生的事件称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$。可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots A_n,\cdots$ 中至少有一个发生的事件称为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和事件，记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$。

(3) **事件的积**　事件 A 与事件 B 都发生的事件称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，记为 $A\cap B$，也简记为 AB。事件 $A\cap B$（或 AB）发生意味着：事件 A 发生且事件 B 也发生，即 A 与 B 都发生。

类似地，事件的积也可推广到多个事件的情形。n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生的事件称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$。可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 都发生的事件称为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积事件，记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$。

(4) **事件的差**　事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，记为 $A-B$。

(5) **互不相容事件（互斥事件）**　若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B **互不相容**，或称事件 A 与 B **互斥**。通常两个互不相容事件 A 与 B 的和记为 $A+B$。

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个事件都互不相容，即

$$A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant n),$$

则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，或称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互斥。通常 n 个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$。

若可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中的任意两个事件都互不相容，即

$$A_iA_j=\varnothing,i\neq j,(i,j=1,2,\cdots,n,\cdots),$$

则称可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相容，或称可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互斥。可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots$。