开拓智能的奇方

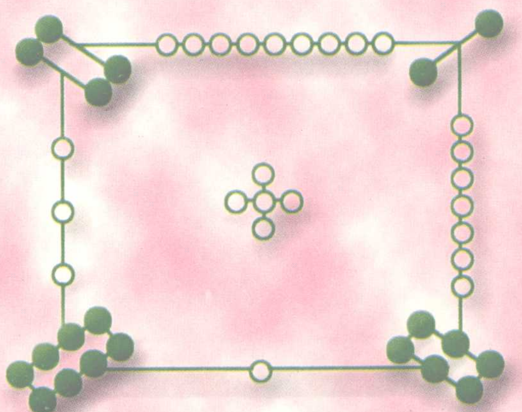
中国古代世界数学冠军之一 幻方

林正禄 著

思路万千妙不可言

增进智慧益寿延年

4	9	2
3	5	7
8	1	6



中国幻方研究者协会

幻方专辑

香港天马图书有限公司

庆祝中国幻方研究者协会成立三周年

勇于创新　　开拓进取

目　录

★　★　★　★　★　★　★　★　★　★

河洛之歌

高治源

宇宙运转象洛书，
时空变幻似河图。
幻方迷宫河洛开，
祖国文化传千古。
易理八卦是天书，
宇宙全息太极图。
数学能解其中谜，
未来科技中华有。

九宫诗

九宫奇变演玄机千古美妙慧无比

读法：九宫奇变演玄机，变演玄机千古美，
千古美妙慧无比，妙慧无比九宫奇。

序　言

多少年来，林正禄先生面对一个古老的传说，一直在思考着数字背后的深刻奥秘。他通过自己的探索，终于可以将自然数训练成由他自己随意指挥的大军，排成各种奇妙的方阵，于是他从中获得了各种聪敏的智慧，他感叹幻方真是一个“开拓智能的奇方”，并极力向他周围的人宣传，甚至搞出“幻方征解”的重头戏，成为一道“东北幻方研究”的风景线。

东北、东南、西北、西南，祖国到处有幻方研究的学子，随着林正禄幻方走向全国，又带来各地方聚集在东北的景象。林正禄先生征集了3m阶完美幻方，高次幻方，幻方佳作，获得不少资料和成果，使我国的幻方研究水平又上一层楼。当林正禄先生的《幻方专辑》送到全国幻方爱好者手里时，我想一定会再次引起大家深入研究幻方的热潮，而在那时，大家会惊喜地听到，幻方研究的大潮一浪高过一浪。

但侧耳听潮后，希望大家尽快掉过头来。看看当今网络时代。用电脑研究幻方，快速简便，如入自由天国。网上的幻方构造程序已流传很多，幻方研究工具也有了一些规模，用人工你一辈子也搞不完的数据，用电脑在几秒中内就完成了。如果能够编出一个好的程序来，就有可能构造出让你想象不来的幻方成果。你在惊奇中一定要思考一下，工具与方法是我们创造奇迹的金光大道！

愿林正禄先生《幻方专辑》给大家带来惊喜，带来快乐！

高冶源

2001年3月21日

第一篇　林正禄幻方专辑

开拓智能的奇方
——幻方

林　正　禄

摘　　要

本文所创立的幻方，不论是一般幻方，还是完美幻方，高次幂幻方都与众不同，独具特色，方法简单。既可以直接编写，也可以用方程求解幻方中所有数的分布。并解决用统一方法求解 $n>3$ 的完美幻方编制及计算，要计算 $n>1000$ 阶的幻方，已是随手可得的事。

构成完美幻方的方法繁多，到目前为止，当 n 为奇数，且 n 含有 3 的因子时，尚无简单办法解决完美幻方的编制。经研究，采用长方基砖（半幻阵）组合成广义全等和拉丁方，且与该方阵转阵相互正交，从而解决 n 为奇数，且含有 3 的因子完美幻方构成。进一步研究表明，该方法适用于编制任一奇数及双偶数完美幻方（兼对称）。该方法简单明了，易于计算。

前　　言

我国古代的纵横图，现称幻方，是一个古老的数学趣题。由于它神秘，高深莫测，变化无穷，至今仍被许多学者，幻方爱好者发掘，探索，研究不止，使这颗数学科学中的明珠越发光彩夺目。

构造幻方的方法繁多，随着时间推移，不断推陈出新，而且构成的幻方充满神奇色彩，妙不可言。本文构造幻方的方法与众不同，独具特色。不论是一般幻方，完美幻方，高次幂幻方，都可以用数学方程表示幻方中的数的分布，也可以直接编写，一气呵成，方法简单，易掌握。尤其是在拉丁方理论基础上，利用组合数学原理，组合，巧合，一统方法编制出 $n>3$，非单偶数时，奇数，双偶数完美幻方（兼对称）及立方幻方 $n=2^{10}$ 的编制。

一　幻方入门

——猜想，联想，推理编幻方

本人第一次看到由 1，2，3……9 连续自然数编成的纵横图，三阶幻方，感到十分有趣。据说美国少年编出 105 阶幻方，真是了不起。幻方原是我国祖先在四千多年前，在数学领域中一个伟大创造，智慧的结晶，因此萌发编制更大幻方的欲望。

1.1　猜想编成第一个幻方（兼同心）

当时想比三阶大的幻方，该是五阶幻方（当时尚不知有四阶幻方）。如何下手，从三阶幻方中数的分布，猜想五阶幻方可能适用。即中心格填数是连续自然数的第一个数与最后一个数总和的一半，方阵中上下，左右及对角线上对称位置上两数和等于连续自然数第一个数与最后一个数之和。

基于以上的猜想,五阶幻方中心格填数为13,所有对称位置上的数分布分别填入1,25;2,24;3,23……。经过反反复复填数,试算,也不知过了多少时日,总算没白费心机,第一个幻方终于诞生了。见图1

5	4	9	23	24
14	11	10	18	12
19	20	13	6	7
25	8	16	15	1
2	22	17	3	21

图1

1.2 联想编制系列幻方

编好第一个五阶幻方,接着就是七阶幻方。联想到编制五阶幻方的实践经验,可以得到一些印象和规律:

1. 中心格填数 $C=(n^2+1)/2$。

2. 方阵中上下,左右,对角线上对称位置上二个数之和 $S=n^2+1$。

3. 方阵左半部在对角线上的各数分布有一定联系,如五阶幻方左半部对角线上的数的分布为2,5,8,11,成等差数列,公差 $d=(n+1)/2$。

4. 以方阵二条正对角线为界线,将方阵划分为上下,左右四个区,若知道左对角线以左的数的分布,则对角线以右位置上的数分布即可知道。

5. 还有一个重要的联想是:五阶幻方第一行左右角上的数为5,24,紧靠这二个数的数为4,23,分别比二角上的数小1。见图1。

根据以上联想,沿着这一思路走下去,经过大量试探,摸索,最终见到成效,编出七阶,九阶,十一阶……直至十九阶幻方。当时编的幻方不仅是一般幻方,而且还是同心幻方。见图2。

7	6	5	8	34	72	78	79	80
19	17	16	18	35	62	69	70	63
24	25	27	26	33	59	60	57	58
42	43	44	37	36	50	38	39	40
53	52	51	54	41	28	31	30	29
68	67	61	32	46	45	21	15	14
73	71	22	56	49	23	55	11	9
81	12	66	64	47	20	13	65	1
2	74	77	74	48	10	4	3	75

n=9

8	7	6	9	10	53	111	110	118	119	120
17	20	19	18	21	52	98	106	107	108	
35	34	32	31	33	54	86	95	96		
41	40	42	44	43	51	83	84			
62	63	64	65	56	55	72				
76	75	74	73	77	61					
93	94	92	85	50						
99	100	97	38							
117	109	26								
121	14									
2										

n=11

图2

读者可以从 n=5,7,9,11 幻方中数的分布规律,试编 n=15,17……的幻方。

以上摸索方法编成的幻方,当 n 为任意奇数时是否具有普遍性,只能回答可能,尚不敢说

一定。我们也不可能一一摸索下去，验算下去。因此要把实践提高到理论上进行推理，论证其可行性，普遍性。

1.3 推理编制 $n \geqslant 3$ 奇数幻方

从实践中编出 $n=5,7,9\cdots\cdots19$ 阶幻方，这是为深入研究幻方数的分布规律，打下坚实基础。经分析：这些幻方中隐藏大量等差数列，因此只要抓住数列首项位置，数列公差，幻方中数的分布即可用方程表示出来，然后进一步论证其方法普遍性，正确性。

根据已编出的同心幻方具有对称性，将方阵以二条正对角线为界线，把方阵划分为上下，左右四个区，分别建立上区，左区幻方数的分布方程。

1.3.1 建立方阵上部对角线，上区上的数的分布方程：

设 $A(I,J)$ 为方阵位置上的数

当 $(n-1)/2$ 为偶数时：

$A_0(I,J)=(3-n)/2+(n+1)\times I$ ……(1.1)

其中：$I=1,2,3\cdots\cdots(n-1)/2,\quad J=I$

$A[(n+1)/2,(n+1)/2]=(n^2+1)/2$ ……(1.2)

$A_1(I,J)=(2n^2-3n+1)/4+M$ ……(1.3)

其中：$I=1,2,3\cdots\cdots(n-1)/2, J=(n+1)/2$

$M=INT[(I/2)\times(-1)^I+0.5]$

INT 为取整函数，例 $INT(1.5)=1$

$A_1(I,J)=(n+1)\times I-(n-3)/2-i_1$ ……(1.4)

其中：$I=1,2,3\cdots\cdots(n-3)/2,$

$Q_1=INT[(I+1)/2+0.5]$

$i_1=1,2,3\cdots\cdots[(n+3)/4-Q_1]$

$J=I+i_1$

$A_1(I,J)=(3-n)/2+(n+1)\times I+i_2$ ……(1.5)

其中：$I=1,2,3\cdots\cdots(n-5)/2,$

$Q_2=INT[I/2+0.5]$

$i_2=1,2,3\cdots\cdots[(n-1)/4-Q_2]$

$J=(n+3)/4+I+i_2-Q_1$

$A_1(I,J)=n^2-(n+1)\times I+i_3$ ……(1.6)

其中：$I=1,2,3\cdots\cdots(n-5)/2,$

$Q_3=INT[I/2+0.5]$

$i_3=1,2,3\cdots\cdots[(n-1)/4-Q_3]$

$J=(n+1)/2+i_3$

$A_1(I,J)=(n^2+n)-(n+1)\times I-i_4$ ……(1.7)

其中：$I=1,2,3\cdots\cdots(n-3)/2,$

$Q_4=INT[(I+1)/2+0.5]$

$i_4=1,2,3\cdots\cdots[(n+3)/4-Q_4]$

$J=n+1-I-i_4$

方阵下区各数分布辅助方程

$A_0[(n+1-I),(n+1-J)]=n^2+1-A_0(I,J)$

$A_1[(n+1-I),J]=n^2+1-A_1(I,J)$

1.3.2 建立方阵下右对角线，左区上的数分布方程

$A_0(I,J)=1-n+(n+1)\times J$ ……(1.8)

其中：$J=1,2,3\cdots\cdots(n-1)/2, I=n+1-J$

$A_2(I,J)=(n^2+1)/2+J$ ……(1.9)

其中：$J=1,2,3\cdots\cdots(n-3)/2, I=(n-1)/2$

$A_2(I,J)=(n^2+3n)/2$ ……(1.10)

其中：$J=(n-1)/2, I=(n+1)/2$

$A_2(I,J)=(n^2+3n)/2-J$ ……(1.11)

其中：$J=1,2,3\cdots\cdots(n-3)/2, I=(n+1)/2$

$A_2(I,J)=n^2-(n+1)(J-1)$ ……(1.12)

其中：$J=1,2,3\cdots\cdots(n-3)/2, I=n-J$

$A_2(I,J)=(2n^2-n+3)/4-2(n+1)\times j_1+M$ ……(1.13)

其中：$J=1,2,3\cdots\cdots(n-7)/2$

$Q_1=\mathrm{INT}[(J+1)/2\times(-1)^J+0.5]$

$M=\mathrm{INT}[J/2\times(-1)^J+0.5]$

$j_1=1,2,3\cdots\cdots[(n-1)/4-Q_5]$

$I=(n-1)/2-2j_1$

$A_2(I,J)=(2n^2+n+5)/4-2(n+1)\times j_2+M$ ……(1.14)

其中：$J=1,2,3\cdots\cdots(n-5)/2$

$Q_2=\mathrm{INT}[J/2+0.5]$

$M=\mathrm{INT}[J/2\times(-1)^J+0.5]$

$j_2=1,2,3\cdots\cdots[(n-1)/4-Q_2]$

$I=(n+1)/2-2j_2$

$A_2(I,J)=(2n^2+3n+3)/4+2(n+1)\times j_3-M$ ……(1.15)

其中：$J=1,2,3\cdots\cdots(n-5)/2$

$Q_3=\mathrm{INT}[J/2+0.5]$

$M=\mathrm{INT}[J/2\times(-1)^J+0.5]$

$j_3=1,2,3\cdots\cdots[(n-1)/4-Q_3]$

$I=(n-1)/2+2j_3$

$A_2(I,J)=(2n^2+5n+5)/4+2(n+1)\times j_4-M$ ……(1.16)

其中：$J=1,2,3\cdots\cdots(n-7)/2$

$Q_4=\mathrm{INT}[(J+1)/2+0.5]$

$M=\mathrm{INT}[J/2\times(-1)^J+0.5]$

$j_4=1,2,3\cdots\cdots[(n-1)/4-Q_4]$

方阵右半部各数分布辅助方程

$A_0[(n+1-I),(n+1-J)]=n^2+1-A_0(I,J)$

$A_2[I,(n+1-J)] = n^2+1-A_2(I,J)$

经证明(略)由以上方程所求出的数,是由 1,2,3……n^2 组成,且方阵中任一行,任一列及正对角线上各数和等于幻方常数 $S_n = n\times(n^2+1)/2$。因此本文所建立的幻方方程适用于 $n\geqslant3$ 的所有奇数 n 阶幻方:现已计算出 n=153,n=499 奇数同心幻方。

$(n-1)/2$ 为奇数时幻方方程与 $(n-1)/2$ 为偶数时略有差别。略。

1.4 直接编写奇数幻方(兼同心)

本文所编制的奇数幻方,可以直接编写,只需计算少量几个特定位置上的数,然后按数的分布规律,直接填数。

编制步骤:$(n-1)/2$ 为偶数,以 n=13 为例,见图 3。

1.4.1 填上区左、右对角线及上区上的数

(1)计算特殊位置上的数:$A=A[(n-1)/2,(n+1)/2]=n(n-1)/2$,

$C=A[(n+1)/2,(n+1)/2]=(n^2+1)/2$,$E=A(1,1)=(n+5)/2$

$F=A(1,n)=n^2-1$

当 n=13 时, $A=A(6,7)=78$, $C=A(7,7)=85$

$E=A(1,1)=9$, $F=A(1,13)=168$

(2)填方阵中心格 $A(7,7)=85$

(3)填方阵上部左、右对角线上的数列:

左上对角线填上 E 数列,公差 $d=(n+1)=14$,递增,其数列为:9,23,37,51,65,79。

右上对角线填 F 数列,公差 $d=(n+1)=14$,递减,其数列为:168,154,140,126,98。

(4)填方阵上区中间列 A 数列,公差 d=1,递减,其数列为 78,77,76,75,74,73。填数规律:从下向上填数,填一数跳一格,遇上边框线折回。如

78	73	77	74	76	75

(5)以中间列为界,把上区分为左、右两部分。

左半部填数,任一行均以对角线上的数为递减、递增数列的首项,公差 d=1。先填递减数列。由左至右,每行空格为偶数时,填空格一半(空格为奇数时,填空格数加 1 的一半)。余下的空格填递增数列,例第一行,数列首项为 9,空格 5 个,填递减数列三项 8,7,6;填余下空格为递增数列 10,11。

右半部与左半部填数略有差别,任一行均以右对角线上的数为首项,填数方向是由右至左,先填递减数列,公差 d=1,填入数,例第一行填数为 167,166,165 余下空格填递增数列,不同之处是递增数列首项是以下一行对角线上的数加 2 作为数列首项,即 154+2=156。填 156,157。

如此类推,将上区各行填入数列,见图 3。

A数列(中间数列)

E　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　F

9	8	7	6	10	11	75	157	156	165	166	167	168
	23	22	21	24	25	76	143	142	152	153	154	
		37	36	35	38	74	128	138	139	140		
			51	50	52	77	114	125	126			
				65	64	73	111	112				
					79	78	98					
						85						

C

图 3

1.4.2　**填左区上的数，以 n=13 为例，见图 4**

(1)计算特殊位置上的数

$B=A[(n+1)/2,(n-1)/2]=(n^2+3n)/2$，　　$T=A[(n-1),1]=n^2$

$Z_1=A[(n-1)/2,1]=(n^2+3)/2$，　　$Z_2=A[(n+1)/2,1]=B-1$

$G_1=A(2,1]=(7n+13)/4$，　　$G_2=A(3,1)=(9n+15)/4$

$H_1=A[(n+3)/2,1]=(2n^2+11n+11)/4$

$H_2=A[(n+5)/2,1]=(2n^2+13n+13)/4$

$n=13$，$B=A(7,6)=104$，　$T=A(12,1)=169$，　$Z_1=A(6,1)=86$

$Z_2=A(7,1)=103$　　$G_1=A(2,1)=26$，　$G_2=A(3,1)=33$

$H_1=A(8,1)=123$　　$H_2=A(9,1)=130$；

将 $B=A(7,6)=104$，填入方阵中。

(2)在方阵中填入 T 数列，公差 $d=(n+1)$，递减，T 数列为：169，155，141，127，113；从下向上沿右下对角线方向。

(3)填入 Z_1、Z_2、数列：

Z_1 数列公差 d=1，递增，分别为 86，87，88，89，90。从左至右。

Z_2 数列公差 d=1，递减，分别为 103，102，101，100，99。从左至右。以上填数见图 4。

	9												
		23											
			37										
				51									
					65								
Z_1	86	87	88	89	90	79							
Z_2	103	102	101	100	99	104	B						
					113	72							
				127	58								
			141	44									
		155	30										
T	169	16											
	2												

图 4

(4)在第一列上填入 G_1,G_2,H_1,H_2 数列

(i)列方向填数填 G_1,G_2,H_1,H_2 为列方向数列,公差 $d=2(n+1)$,递增,填数规律:由上而下,填一个数,跳一格,再填一个数。G_1 数列为 26,54;G_2 数列为 33,61;H_1 数列为 123,151;H_2 数列为 130,158。

第二列,列方向填数。

上半部第二列各数比其同行第一列数大 1,分别为 34,55,62。

下半部第二列各数比其同行第一列小 1,分别为 122,129,150。以上见图 5 虚线以左。

(ii):行方向填数;见图 5 虚线以右

当 $I\geqslant 4$ 时,在图 5 虚线以右,在行方向有空格,就存在行方向数列填数。

以每一行第一个数为首项,公差 $d=1$,填一个数,空一格,填入第二个数,直至将空格填满。

以每行第二列数为首项,公差 $d=1$,填一个数后,空一格,填入第二个数,直至将空格填满。

同行二个数列,首项数大的为递增数列,首项数小的为递减数列。

	9												
G_1	26	23											
G_2	33	34	37										
	54	55	53	51									
	61	62	60	63	65								
						79							
							85						
H_1	123	122	124	121		72							
H_2	130	129	131		58								
	151	150		44									
	158		30										
		16											
	2												

图 5

1.4.3 方阵右对角线以左的填数

根据方阵上下区,左右区,对角线上的对称位置二数和等于 n^2+1,即可将方阵中填满所有的数,见图 6。

9	8	7	6	10	11	75	157	156	165	166	167	168
26	23	22	21	24	25	76	143	142	152	153	154	144
33	34	37	36	35	38	74	128	138	139	140	136	137
54	55	53	51	50	52	77	114	125	126	117	115	116
61	62	60	63	65	64	73	111	112	107	110	108	109
86	87	88	89	90	79	78	98	80	81	82	83	84
103	102	101	100	99	104	85	66	71	70	69	68	67
123	122	124	121	113	72	92	91	57	49	46	48	47
130	129	131	127	58	106	97	59	105	43	39	41	40
151	150	141	44	120	118	93	56	45	119	29	20	19
158	155	30	134	135	132	96	42	32	31	133	15	12
169	16	148	149	146	145	94	27	28	18	17	147	1
2	162	163	164	160	159	95	13	14	5	4	3	161

图 6

1.4.4 $(n-1)/2$ 为奇数时直接编幻方

$(n-1)/2$ 为奇数时直接编幻方步骤同 $(n-1)/2$ 为偶数,仅有一点区别,即填左区时略有变化

$G_1=A(2,1)=(5n+13)/4$

$G_2=A(3,1)=(11n+19)/4$

$H_1=A[(n+3)/2,1]=(2n^2+11n+9)/4$

$H_2=A[(n+5)/2,1]=(2n^2+13n+11)/4$

G_1,G_2 同行第二列填数比第一列数小 1;H_1,H_2 同行的第二列数比第一列数大 1。

读者可以根据以上方法,试编 $n=15,17,19$……奇数同心幻方加深理解编幻方的思路。

1.5 单偶数幻方方程

对于单偶数一般幻方编制,给出下列方程:

$A1(I,J)=2+(I-1)\times(n-2)/2+2(J1-1)$ ……(1)

$I=1,2,3\cdots\cdots(n-2)/4$ $J1=1,2,3\cdots\cdots(n-2)/4$

$J=2\times J1-Z(I)$,I 为奇数时: $Z(I)=1$, I 为偶数时:$Z(I)=0$

$A1(I,J)=n^2/2-(n-2)^2/8+(I-(n+2)/4)\times(n-2)/2+2\times(J2-1)$ ……(2)

$I=(n-2)/4+1$, $(n-2)/4+2$, $(n-2)/4+3,\cdots\cdots(n-2)/2$

$J2=1,2,3\cdots\cdots(n-2)/4$, $J=2\times J2-Z(I)$, I 为奇数时:

$Z(I)=1$。 I 为偶数时: $Z(I)=0$。

$A2(I,J)=3\times n^2/4+1-(n-2)^2/8+(I-1)\times(n-2)/2+2\times(J3-1)$ ……(3)

$I=1,2,3\cdots\cdots(n-2)/4$

$J3=1,2,3\cdots\cdots(n-2)/4$, $J=2\times J3-Z(I)$, I 为奇数时:

$Z(I)=0$。 I 为偶数时: $Z(I)=1$。

$A2(I,J)=3\times n^2/4+3+(I-(n+2)/4)\times(n-2)+2\times(J4-1)$ ……(4)

$I=(n-2)/4+1$, $(n-2)/4+2$, $(n-2)/4+3,\cdots\cdots(n-2)/2$

$J4=1,2,3\cdots\cdots(n-2)/4$， $J=2\times J4-Z(I)$，I 为奇数时：

$Z(I)=0$。 I 为偶数时： $Z(I)=1$。

$$A3(I,n/2)=(n-2)^2/8+1+I \qquad \cdots\cdots(5)$$

$I=1,2,3\cdots\cdots(n-6)/4$

$$A3(I,(n+2)/2)=(n-2)^2/8+1+I \qquad \cdots\cdots(6)$$

$I=(n-6)/4+1,\quad (n-6)/4+2,\cdots\cdots(n-6)/2$

$$A4(n/2,J)=n^2/8+3/2+J \qquad \cdots\cdots(7)$$

$J=1,2,3\cdots\cdots(n-6)/4$

$$A4((n+2)/2,J)=n^2/8+3/2+J \qquad \cdots\cdots(8)$$

$J=(n-6)/4+1,\quad (n-6)/4+2,\cdots\cdots(n-6)/2$

方阵特定位置上的数，由下列方程确定：

$A(n/2,n/2)=3\times n^2/4$ $\qquad$ $A(n/2,n/2+1)=3\times n^2/4+1$

$A((n/2+1),n/2)=n^2/4$ $\qquad$ $A(n/2+1,n/2+1)=n^2/4+1$

$A5(n/2-2,n/2)=1$ $\qquad$ $A5(n/2-1,n/2)=7\times n^2/8+1/2$

$A5(n/2+2,n/2)=5\times n^2/8+1/2$ $\qquad$ $A5(n/2+3,n/2)=n^2/2+1$

$A6(n/2,n/2-2)=n^2/8-1/2$ $\qquad$ $A6(n/2,n/2-1)=n^2/8+3/2$

$A6(n/2,n/2+2)=5\times n^2/8-1/2$ $\qquad$ $A6(n/2,n/2+3)=5\times n^2/8+3/2$

方阵对称位置上的数，由下列对应性关系方程确定：

$A1(I,(n+1-J))=n^2/2+1-A1(I,J)$ $\qquad$ $A1((n+1-I),J)=n^2-A1(I,J)$

$A1((n+1-I),(n+1-J))=A1(I,J)+n^2/2+1$

$A2(I,(n+1-J))=3\times n^2/2+1-A2(I,J)$ $\qquad$ $A2((n+1-I),J)=n^2+2-A2(I,J)$

$A2((n+1-I),(n+1-J))=A2(I,J)-1-n^2/2$

$A3(I,(n+1-J))=n^2+1-A3(I,J)$ $\qquad$ $A3((n+1-I),J)=n^2/2+1-A3(I,J)$

$A3((n+1-I),(n+1-J))=A3(I,J)+n^2/2$

$A4((n+1-I),J)=n^2+1-A4(I,J)$ $\qquad$ $A4(I,(n+1-J))=n^2/2+1-A4(I,J)$

$A4((n+1-I),(n+1-J))=A4(I,J)+n^2/2$

$A5(I,(J+1))=n^2+1-A5(I,J)$ $\qquad$ $A6((I+1),J)=n^2+1-A6(I,J)$

单偶数一般幻方亦可直接编写，从下表可以看出十字架以外四个区，分布八个简单的数列，其公差等于 2，详细编写从略。

2	68	4	70	10	91	81	47	83	49
72	6	74	8	90	11	43	77	45	79
42	78	44	80	1	100	71	7	73	9
82	46	84	48	88	13	3	67	5	69
15	85	12	14	75	76	62	64	66	36
86	16	89	87	25	26	39	37	35	65
20	54	18	52	63	38	99	33	97	31
58	24	56	22	51	50	29	95	27	93
30	94	28	92	61	40	59	23	57	21
98	34	96	32	41	60	19	55	17	51

图 6

由连续自然数1,2,3……n^2,当$n\geqslant 3$时都可以构成一般幻方,对于初学者来说,首要把三阶幻方编制原理弄懂弄通,反复实践,大胆猜想,联想,推理。同时也可了解一些较成熟的编制方法,如马步法,士步法等等,方法繁多,贵在自创,发展新法。自古华山一条路,而中国人民解放军,大智大勇,劈荆斩刺,另辟蹊径,飞越华山,智取华山。作者在下文中编制的奇数完美幻方,是在一般马步基础上,让马成为长上翅膀的神马,犹如天马横空遨游幻方世界。

二 构成完美幻方的方程

由连续自然数1,2,3……N($N=n^2$,$n>3$,n非单偶数)组成的n阶数字方阵,都可以构成完美幻方。本文所创立的幻方,都可以由简单方程求得幻方所有的数。尤其是当n为双偶数时,不论n值多大,都可一气呵成,编成具有特殊性质的完美幻方。其特点:(1)方程中的数由1,2,3……N连续自然数组成。(2)方阵中任何行,列以及所有左右斜对角线(共2n条)诸数和为常数,$Sn=n(n^2+1)/2$。(3)方阵中对称位置上的数,具有对应关系。(4)在方阵中,取任何相邻的四个数组在正方形,其数值和为常数$S=2(n^2+1)$。(5)由奇数,偶数列组成数字方阵。符合特点(1),(2)条件的方阵,称为完美幻方或称纯幻方。

2.1 双偶数完美幻方(兼田格化,奇偶数列型)方程

2.1.1 数字方阵方程(第二象限)

将n阶方阵,以其上下,左右中心线为纵,横坐标轴,划分四个象限。

$A_1(I,J)=2+n\times(I-1)/4+(J-1)$ ……(2.1)

其中:$I=1,3,5\cdots\cdots(n/2-1)$,$J=1,3,5\cdots\cdots(n/2-1)$

$A_1(I,J)=3\times n^2/8+2+n\times(I-2)/4+(J-2)$ ……(2.2)

其中:$I=2,4,6\cdots\cdots n/2$, $J=2,4,6\cdots\cdots n/2$

$A_2(I,J)=7\times n^2/8-1-n\times(I-1)/4-(J-2)$ ……(2.3)

其中:$I=1,3,5\cdots\cdots(n/2-1)$, $J=2,4,6\cdots\cdots n/2$

$A_2(I,J)=3\times n^2/4-1-n\times(I-2)/4-(J-1)$ ……(2.4)

其中:$I=2,4,6\cdots\cdots n/2$, $J=1,3,5\cdots\cdots(n/2-1)$

2.1.2 方阵中其它象限辅助方程

与第二象限对称位置上其它象限数的分布由下列关系方程求得:

第一象限:$A_1(I,n+1-J)=n^2/2+1-A_1(I,J)$ ……(2.5)

$A_2(I,n+1-J)=3\times n^2/2+1-A_2(I,J)$ ……(2.6)

第三象限:$A_1(n+1-I,J)=n^2+2-A_1(I,J)$ ……(2.7)

$A_2(n+1-I,J)=n^2-A_2(I,J)$ ……(2.8)

第四象限:$A_1(n+1-I,n+1-J)=n^2/2-1+A_1(I,J)$ ……(2.9)

$A_2(n+1-I,n+1-J)=A_2(I,J)+1-n^2/2$ ……(2.10)

2.2 双偶数完美幻方特点证明

2.2.1 双偶数完美幻方,其方阵中所有左右斜角线上诸数和为常数,$S_n=n\times(n^2+1)/2$

2.2.1.1 引理1:由双偶数完美幻方方程构成的方阵中,存在二个数同时为左右斜对角线上的数。

证明如下:

设第二象限有一个数A(I,J),在其左斜对角线上有一个数为A(I+L,J+L)),在其右斜

对角线上有一个数为 $A(I+L',J+n-L')$。

若：$A(I+L',J+n-L')=A(I+L,J+L)$

则有 $I+L'=I+L$，　$J+n-L'=J+L$

解得：$L=L'=n/2$

即 $A(I+L',J+n-L')=A(I+n/2,J+n/2)$

由此得出 $A(I+n/2,J+n/2)$ 与 $A(I,J)$ 二个数，同时为左右斜对角线上的数。

2.2.1.2 引理 2：在双偶数方阵中，在第二象限有一个 $A_1(I,J)$，与方阵中另一数 $A_1(n/2+1-I,n/2+1-J)$ 之和等于 $n^2/2+2$ 时，则 $A_1(I,J)$ 与其左右斜对角线共用另一数 $A_1(I+n/2,J+n/2)$ 之和等于 (n^2+1)。

即：若 $A_1(I,J)+A_1(n/2+1-I,n/2+1-J)=n^2/2+2$ 时

则：$A_1(I,J)+A_1(I+n/2,J+n/2)=n^2+1$

证明如下：

$A_1(I+n/2,J+n/2)=A_1[n+1-(n/2+1-I),n+1-(n/2+1-J)]$ 根据关系方程(2.9)

$A_1[n+1-(n/2+1-I),n+1-(n/2+1-J)]=n^2/2-1+A_1(n/2+1-I,n/2+1-J)$

即 $A_1(I+n/2,J+n/2)=n^2/2-1+A_1(n/2+1-I,n/2+1-J)$ ……(2.11)

已知：$A_1(I,J)+A_1(n/2+1-I,n/2+1-J)=n^2/2+2$ ……(2.12)

将(2.11)，(2.12)联立解得：$A_1(I,J)+A_1(n/2+I,n/2+J)=n^2+1$

同理可证：当 $A_2(I,J)+A_2(n/2+1-I,n/2+1-J)=3n^2/2$ 时

则有：$A_2(I,J)+A_2(n/2+I,n/2+J)=n^2+1$

2.2.1.3 双偶数完美幻方，任一左右斜对角线上共用一对数之和等于 n^2+1，其诸数和 $C=n(n^2+1)/2$。

设：$A_1(I,J)$ 为方程(2.1)一个数

$A_1(I,J)=2+n(I-1)/4+(J-1)$ ……(2.13)

设：$A_1(n/2+1-I,n/2+1-J)$ 为方程(2.2)一个数

$A_1(n/2+1-I,n/2+1-J)=3n^2/8+2+(n/4)[(n/2+1-I)-2]+(n/2+1-J)-2$

……(2.14)

将方程(2.13)+(2.14)得：

$A_1(I,J)+A_1(n/2+1-I,n/2+1-J)=n^2/2+2$

根据引理 2 则有：$A_1(I,J)+A_1(I+n/2,J+n/2)=n^2+1$

同理方程(2.3)与(2.4)可得到 $A_2(I,J)+A_2(I+n/2,J+n/2)=n^2+1$

由此可得到双偶数完美幻方，在第二象限任何一个数 $A_1(I,J)$〔或 $A_2(I,J)$〕其左右斜对角线上共用一对数 $A_1(I+n/2,J+n/2)$〔或 $A_2(I+n/2,J+n/2)$〕之和等于 n^2+1。双偶数完美幻方，任一斜对角线上的数为 n 个，其上有 n/2 对，其和等于 n^2+1。所以斜对角线上诸数和为：

$C=n(n^2+1)/2$。

2.2.2 双偶数完美幻方中，在任意位置取四个相邻数组成正方形，其四个数之和 $C_S=2\times(n^2+1)$。

第二象限任取相邻四个数组成的正方形，其四个数分别为：

$A_1(I,J)$，$A_1(I+1,J+1)$，$A_2(I,J+1)$，$A_2(I+1,J)$；

并代入方程(2.1),(2.2),(2.3),(2.4)

得:$A_1(I,J)+A_1(I+1,J+1)+A_2(I,J+1)+A_2(I+1,J)=2+n(I-1)/4+(J-1)+3n^2/8+2+n[(I+1)-2]/4+[(J+1)-2]+7n^2/8-1-n(I-1)/4-[(J+1)-2]+3n^2/4-1-n[(I+1)-2]/4-(J-1)=2(n^2+1)$

根据关系方程(2.4),(2.6),(2.7),(2.8),(2.9),(2.10)对于其它象限任意位置上相邻四个数的正方形,其四个数和亦为 $C_S=2\times(n^2+1)$。

双偶数完美幻方其它特点是显而易见的,不再详细证明。

2.3 双偶数完美幻方(兼田格化,奇,偶数列型)编制

双偶数完美幻方编制是极容易的,它不必从方程(2.1),(2.2),(2.3),(2.4)计算出所有数。将方阵分四个象限,每一个象限分布两个偶数列和两个奇数数列,在整个方阵中只要知道数列首项的位置及顺序,即可一气呵成,编写出整个完美幻方。

例:n=12 双偶数完美幻方编制

将方阵分四个象限,每一个象限分布两个偶数列和两个奇数数列:

奇数数列:J1:$1,3,5,7\cdots\cdots n^2/8-1$

J2:$n^2/8+1,n^2/8+3,\cdots\cdots 2\times n^2/8-1$

J3:$2\times n^2/8+1,2\times n^2/8+3,\cdots\cdots 3\times n^2/8-1$

J4:$3\times n^2/8+1,3\times n^2/8+3,\cdots\cdots 4\times n^2/8-1$

J5:$4\times n^2/8+1,4\times n^2/8+3,\cdots\cdots 5\times n^2/8-1$

J6:$5\times n^2/8+1,5\times n^2/8+3,\cdots\cdots 6\times n^2/8-1$

J7:$6\times n^2/8+1,6\times n^2/8+3,\cdots\cdots 7\times n^2/8-1$

J8:$7\times n^2/8+1,7\times n^2/8+3,\cdots\cdots n^2-1$

J1 数列首项 $A(n/2,n/2+1)=1$,

J2 数列首项 $A(n,2)=n^2/8+1=19$,

J3 数列首项 $A(n-1,1)=2\times n^2/8+1=37$

J4 数列首项 $A(n/2-1,n/2+2)=3\times n^2/8+1=55$

J5 数列首项 $A(n,n)=4\times n^2/8+1=73$

J6 数列首项 $A(n/2,n/2-1)=5\times n^2/8+1=91$

J7 数列首项 $A(n/2-1,n/2)=6\times n^2/8+1=109$

J8 数列首项 $A(n-1,n-1)=7\times n^2/8+1=127$

偶数数列:

O1:$2,4,\cdots\cdots,n^2/8$

O2:$n^2/8+2,n^2/8+4,\cdots\cdots,2\times n^2/8$

O3:$2\times n^2/8+2,2\times n^2/8+4,\cdots\cdots,3\times n^2/8$

O4:$3\times n^2/8+2,3\times n^2/8+4,\cdots\cdots,4\times n^2/8$

O5:$4\times n^2/8+2,4\times n^2/8+4,\cdots\cdots,5\times n^2/8$

O6:$5\times n^2/8+2,5\times n^2/8+4,\cdots\cdots,6\times n^2/8$

O7:$6\times n^2/8+2,6\times n^2/8+4,\cdots\cdots,7\times n^2/8$

O8:$7\times n^2/8+2,7\times n^2/8+4,\cdots\cdots,n^2$

O1:数列首项 $A(1,1)=2$

O2:数列首项 $A(n/2+1,n/2+2)=n^2/8+2=20$

O3:数列首项 $A(n/2+2,n/2+1)=2\times n^2/8+2=38$

O4:数列首项 $A(2,2)=3\times n^2/8+2=56$

O5:数列首项 $A(n/2+1,n/2)=4\times n^2/8+2=74$

O6:数列首项 $A(1,n-1)=5\times n^2/8+2=92$

O7 数列首项 $A(2,n)=6\times n^2/8+2=110$

O8 数列首项 $A(n/2+2,n/2-1)=7\times n^2/8+2=128$

双偶数完美幻方编制的步骤:

(1)填写奇数数列顺序:按奇数数列顺序及数列首项位置 J1,J2,J3,J4,J5,J6,J7,J8,填入 1,3,5,7,9,11,……n^2-1。

每一数列填规律:数列首项在象限左下部(如第一象限 J1),数列填数从下而上,从左至右,列与列之间填数,中间空一格,行与行之间填数,中间空一行。见图 7。

(2)填写偶数数列顺序:按偶数数列顺序及数列首项位置 O1,O2,O3,O4,O5,O6,O7,O8,填入 2,4,6,8,10,12,……n^2。

数列首项在象限左上部(如第二象限 O1),数列填数从上而下,从左至右,列与列之间填数,中间空一格,行与行之间填数,中间空一行。见图 7。

2	125	4	123	6	121	96	67	94	69	**92**	71
107	**56**	105	58	103	60	13	114	15	112	17	**110**
8	119	10	117	12	115	102	61	100	63	98	65
101	62	99	64	97	66	7	120	9	118	11	116
14	113	16	111	18	**109**	108	**55**	106	57	104	59
95	68	93	70	**91**	72	**1**	126	3	124	5	122
49	78	51	76	53	**74**	143	**20**	141	22	139	24
132	31	130	33	**128**	35	**38**	89	40	87	42	85
43	84	45	82	47	80	137	26	135	28	133	30
138	25	136	27	134	29	44	83	46	81	48	79
37	90	39	88	41	86	131	32	129	34	**127**	36
144	**19**	142	21	140	23	50	77	52	75	54	**73**

图 7

万数完美幻方(兼田格化,奇,偶数列型)编制

由 1,2,3……10000 连续自然数,编成 100 阶完美幻方。

按图 8 中奇数数列顺序及数列首项位置,J1,J2,J3,J4,J5,J6,J7,J8 直接填入 1,3,5,7,9,11,……9999。

按图 8 中偶数数列顺序及数列首项位置,O1,O2,O3,O4,O5,O6,O7,O8,直接填入 2,4,6,8,10,12……10000。

	1	2	3……	49	50	51	52	53……	99	100
1	O1								O6	
2		O4								O7
3										
4										
5										
·										
·										
·										
49					J7		J4			
50				J6		J1				
51					O5		O2			
52				O8		O3				
·										
·										
·										
97										
98										
99	J3								J8	
100		J2								J5

图 8

万数完美幻方创立，萌发于一九九二年九月普陀山，同年十月成于九华山万佛寺，第一稿存于九华山。以 100 阶万数完美幻方，纪念二〇〇一年父亲诞辰 100 周年。

2.4 奇数完美幻方（兼雪花幻方，两条正对角线三次方和相等（n＝7 五次方和相等））方程

$A_0[I,(n+1)/2]=1+(n-1)\times I$ ……(2.15)

其中：$I=1,2,3\cdots\cdots n$

$A_1(I,J)=(3-n)/2-J+(n-1)\times i_1$ ……(2.16)

其中：$J=1,2,3\cdots\cdots(n-1)/2$　　$i_1=1,2,3\cdots\cdots[(n+1)/2-J]$

$(n-1)/2+J$ 为偶数时：$I=(n-1)/4+J/2+i_1$

$(n-1)/2+J$ 为奇数时：$i_1\leqslant[(n+1)/2-J]/2$　　$I=(3\times n-1)/4+J/2+i_1$

$i_1>[(n+1)/2-J]/2$　　$I=(3\times n-1)/4+J/2+i_1-n$

$A_1(I,J)=(n^2+n+2)/2-n\times J+(n-1)\times i_2$ ……(2.17)

其中：$J=1,2,3\cdots\cdots(n-1)/2$　　$i_2=1,2,3\cdots\cdots[(n-1)/2+J]$

$(n-1)/2+J$ 为奇数时：$I=(n+1)/4-J/2+i_2$

$(n-1)/2+J$ 为偶数时：$i_2\leqslant[(n-1)/2+J]$时，　　$I=(3\times n+1)/4-J/2+i_2$

$i_2>[(n-1)/2+J]/2$ 时，　　$I=(3\times n+1)/4-J/2+i_2-n$

与 $A_1(I,J)$ 对称位置上关系方程：

$A_1[(n+1-I),(n+1)-J]=n^2+1-A_1(I,J)$ ……(2.18)

由以上四个方程，可求得奇数完美幻方所有数的分布。当 $n=3\times K,K=1,3,5\cdots\cdots$ 时，所