



电子信息与电气学科规划教材·电子电气基础课程

数字信号处理

学习指导及实验

赵春晖 乔玉龙 崔颖 编



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY <http://www.phei.com.cn>

电子信息与电气学科规划教材·电子电气基础课程

数字信号处理学习指导及实验

赵春晖 乔玉龙 崔颖 编

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书作为主教材《数字信号处理》的配套学习参考书,共分两大部分。第一部分为学习指导,共分8章;第二部分为实验,包括8个上机实验。第一部分中每章由学习要求、学习要点、典型例题分析和教材习题解答4个相互关联的部分组成。学习要求给出了需要掌握的知识点;学习要点归纳总结了基本理论、基本概念和基本方法;典型例题分析用于加深学生对本章内容的理解;教材习题解答给出了主教材中各章习题的详细解答。第二部分的实验包括基本信号的产生及基本运算、离散系统的分析、快速傅里叶变换及应用和滤波器的设计。本书与主教材相互补充,有助于深入理解数字信号处理的理论及其应用。

本书既可作为“数字信号处理”课程教学的辅导教材,也可供高等学校相关专业学生、教师和从事数字信号处理的科技人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理学习指导及实验/赵春晖,乔玉龙,崔颖编. —北京:电子工业出版社,2008.10

(电子信息与电气学科规划教材·电子电气基础课程)

ISBN 978-7-121-07547-6

I. 数… II. ①赵…②乔…③崔… III. 数字信号—信号处理—高等学校—教学参考资料 IV. TN911.72

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第158986号

策划编辑:马 岚

责任编辑:谭海平 特约编辑:李玉龙

印 刷:北京市通州大中印刷厂

装 订:三河市鹏成印业有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036

开 本:787×1092 1/16 印张:14.5 字数:371千字

印 次:2008年10月第1次印刷

定 价:4000册 定价21.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

前 言

本书是主教材《数字信号处理》(赵春晖等编著,电子工业出版社出版)一书的配套学习参考书,内容涵盖教材核心内容的学习指导及上机实验。不但有助于读者在较短的时间内掌握本课程的内容,熟悉题型,掌握解题技巧,而且可帮助读者从实验中进一步加深对关键内容的深入理解。

本书共分为9章,前7章与主教材的各章一一对应,每章都包含有如下4部分内容:

- (1) 学习要求:根据大纲要求,列出必须掌握和理解的核心内容;
- (2) 学习要点:与主教材各章节相对应,归纳总结基本概念、重要公式和基本方法;
- (3) 典型例题分析:每题前均有简要的分析与提示,点明所需知识点和解题方法。通过分析求解典型例题,介绍数字信号处理习题的解题方法和技巧,同时对某些例题给出多种解法,以此启发读者深入思考。
- (4) 教材习题解答:主教材中每章所有习题的详细解答。除个别习题外,本书对主教材中的各习题只给出一种解法,读者可根据典型例题分析进一步探求新的解法。

第8章编写了5套自测题并附答案,自测题几乎覆盖所有核心知识点,供读者学完该课程后进行自我检测。

本书的第二部分内容是上机实验。第9章给出8个实验,包括基本信号的产生及基本运算、离散系统的分析、快速傅里叶变换及应用和滤波器的设计,其中后两部分内容分别设计了3个实验。本书的实验都基于MATLAB语言,这样可以忽略某些技术细节,着重诠释数字信号处理的基本概念和方法,以及解决实际问题的思路和算法。

本书在编写过程中得到陈立伟和马惠珠两位老师的大力帮助,同时还得到了电子工业出版社和哈尔滨工程大学信息与通信工程学院等单位的支持,在此表示衷心的感谢。本书编写过程中参阅了许多相关文献,借鉴了这些作者的宝贵经验,这里向所有参考文献的作者表示诚挚的谢意。

限于水平,书中难免有不妥或错误之处,恳请读者批评指正。

编 者

2008年9月于哈尔滨工程大学

目 录

第 1 章 离散时间信号与系统	1
1.1 学习要求	1
1.2 学习要点	1
1.2.1 离散时间信号——序列	1
1.2.2 连续时间信号的采样	3
1.2.3 离散时间系统时域分析	3
1.2.4 常系数线性差分方程	5
1.3 典型例题分析	5
1.4 教材习题解答	19
第 2 章 z 变换	27
2.1 学习要求	27
2.2 学习要点	27
2.2.1 z 变换的定义及收敛域	27
2.2.2 逆 z 变换	29
2.2.3 z 变换的性质	31
2.2.4 拉氏变换、傅氏变换与 z 变换	31
2.2.5 系统函数	33
2.3 典型例题分析	36
2.4 教材习题解答	58
第 3 章 离散傅里叶变换 (DFT)	70
3.1 学习要求	70
3.2 学习要点	70
3.2.1 引言	70
3.2.2 周期序列的离散傅里叶级数 (DFS)	70
3.2.3 离散傅里叶级数 (DFS) 的性质	71
3.2.4 有限长序列离散傅里叶变换 (DFT)	71
3.2.5 离散傅里叶变换的性质	72
3.2.6 频域采样理论	73
3.3 典型例题分析	74
3.4 教材习题解答	91

第4章 快速傅里叶变换	103
4.1 学习要求	103
4.2 学习要点	103
4.2.1 直接计算 DFT 的问题及改进的途径	103
4.2.2 按时间抽选 (DIT) 的基 2 FFT 算法 (库利-图基算法)	103
4.2.3 按频率抽选 (DIF) 的基 2 FFT 算法 (桑德-图基算法)	105
4.2.4 离散傅里叶反变换 (IDFT) 的快速计算方法	106
4.2.5 线性调频 z 变换 (Chirp- z 变换) 算法	106
4.2.6 FFT 的应用举例	108
4.2.7 线性卷积与线性相关的 FFT 算法	110
4.3 典型例题分析	111
4.4 教材习题解答	116
第5章 数字滤波器的基本结构	123
5.1 学习要求	123
5.2 学习要点	123
5.2.1 数字滤波器的结构特点与表示方法	123
5.2.2 无限长单位脉冲响应 (IIR) 滤波器的基本结构	123
5.2.3 有限长单位脉冲响应 (FIR) 滤波器的基本结构	125
5.3 典型例题分析	128
5.4 教材习题解答	132
第6章 无限长单位脉冲响应 (IIR) 数字滤波器的设计方法	138
6.1 学习要求	138
6.2 学习要点	138
6.2.1 数字滤波器的一般概念	138
6.2.2 常用模拟低通滤波器的设计方法	139
6.2.3 脉冲响应不变法设计 IIR 数字滤波器	143
6.2.4 双线性变换法设计 IIR 数字滤波器	144
6.2.5 原型变换	145
6.3 典型例题分析	147
6.4 教材习题解答	154
第7章 有限长单位脉冲响应 (FIR) 数字滤波器的设计方法	160
7.1 学习要求	160
7.2 学习要点	160
7.2.1 线性相位 FIR 滤波器的特点	160
7.2.2 窗函数法设计 FIR 数字滤波器	164
7.2.3 频率抽样法设计 FIR 数字滤波器	165
7.2.4 FIR 与 IIR 数字滤波器的比较	167
7.3 典型例题分析	168
7.4 教材习题解答	175

第 8 章 自测习题及参考答案	184
8.1 自测试题	184
8.1.1 自测题 1	184
8.1.2 自测题 2	185
8.1.3 自测题 3	186
8.1.4 自测题 4	188
8.1.5 自测题 5	189
8.2 参考答案	190
8.2.1 自测题 1 答案	190
8.2.2 自测题 2 答案	193
8.2.3 自测题 3 答案	197
8.2.4 自测题 4 答案	199
8.2.5 自测题 5 答案	201
第 9 章 上机实验	204
9.1 实验 1: 基本信号产生及基本信号运算	204
9.1.1 实验目的	204
9.1.2 实验原理	204
9.1.3 实验内容	206
9.1.4 实验报告要求	206
9.2 实验 2: 离散系统分析	206
9.2.1 实验目的	206
9.2.2 实验原理	206
9.2.3 实验内容	208
9.2.4 实验报告要求	209
9.3 实验 3: 快速傅里叶变换	209
9.3.1 实验目的	209
9.3.2 实验原理	210
9.3.3 实验内容	211
9.3.4 实验报告要求	211
9.4 实验 4: 利用 FFT 分析连续信号频谱	211
9.4.1 实验目的	211
9.4.2 实验原理	212
9.4.3 实验内容	213
9.4.4 实验报告要求	213
9.5 实验 5: 线性卷积的 FFT 实现	214
9.5.1 实验目的	214
9.5.2 实验原理	214
9.5.3 实验内容	216
9.5.4 实验报告要求	216

9.6	实验 6: 脉冲响应不变法设计 IIR 数字滤波器	216
9.6.1	实验目的	216
9.6.2	实验原理	216
9.6.3	实验内容	218
9.6.4	实验报告要求	218
9.7	实验 7: 双线性变换法设计 IIR 数字滤波器	219
9.7.1	实验目的	219
9.7.2	实验原理	219
9.7.3	实验内容	220
9.7.4	实验报告要求	220
9.8	实验 8: 窗函数法设计 FIR 数字滤波器	221
9.8.1	实验目的	221
9.8.2	实验原理	221
9.8.3	实验内容	224
9.8.4	实验报告要求	224

第1章 离散时间信号与系统

1.1 学习要求

1. 掌握基本序列的定义和特性，以及序列的基本运算，重点掌握卷积和运算；
2. 掌握连续时间信号的采样；
3. 掌握线性时不变离散时间系统的特性和单位脉冲响应的物理意义，以及系统的因果性和稳定性；
4. 掌握由线性常系数差分方程描述的线性时不变系统的时域分析方法。

1.2 学习要点

1.2.1 离散时间信号——序列

离散时间信号只在离散时间上给出函数值，是时间上不连续的一个序列，既可以视为连续时间信号的采样，也可以视为一组有序的数据集合，常表示为 $x(n)$ 。注意 n 的取值为整数，当 n 不为整数时， $x(n)$ 无定义，而不能将 $x(n)$ 的值理解为零。

1. 常用序列

(1) 单位抽样序列（单位脉冲） $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

它是最常用、最重要的一种序列，可以表示任意序列 $x(n)$ ，

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \quad (1.2)$$

这种表示对信号和线性时不变系统的分析起着非常重要的作用。

(2) 单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

(3) 矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.4)$$

(4) 实指数序列

$$x(n) = a^n u(n) \quad (1.5)$$

式中， a 为实数。当 $|a| < 1$ 时，序列收敛；当 $|a| > 1$ 时，序列发散。 a 为负数时，序列是摆动的。

(5) 正弦型序列

$$x(n) = A \sin(n\omega_0 + \phi) \quad (1.6)$$

其中 A 为幅度, ϕ 为起始相位, ω_0 为数字域的频率, 反映了序列变化的速率。

(6) 复指数序列

$$x(n) = A e^{(\sigma + j\omega_0)n} \quad (1.7)$$

当 $\sigma = 0$ 为零时,

$$x(n) = A(\cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n) = A \cos \omega_0 n + j A \sin \omega_0 n$$

其实部和虚部均为正弦型序列, 由此可见, 正弦型序列与复指数序列特性相同。在第 2 章我们会看到, 它们可作为基本单元来表示复杂信号。

2. 序列的运算

序列的基本运算包括自变量变换、序列自身的运算和两个序列间的运算。表 1.1 列出了 9 种基本运算, 其中 $x(n)$ 和 $y(n)$ 表示两个序列。

表 1.1 序列的运算

翻褶	$x(-n)$
时间尺度变换	$x(mn)$ 或 $x\left(\frac{n}{m}\right)$
移位	$x(n-m)$
标乘	$c \cdot x(n)$
累加	$\sum_{k=-\infty}^n x(k)$
差分	前向差分 $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$ 后向差分 $\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$
和	$x(n) + y(n)$
乘积	$x(n) \cdot y(n)$
卷积和	$x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m)$

(1) $\delta(n)$, $u(n)$ 及 $R_N(n)$ 之间的关系为

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$$

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N)$$

$$R_N(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(n-m) = \delta(n) + \delta(n-1) + \cdots + \delta(n-(N-1))$$

(2) 卷积和描述了线性时不变系统输入与响应之间的关系, 是线性时不变系统分析的基础, 要重点掌握卷积和的物理意义及图解法。

3. 序列的周期性

如果对所有 n 存在一个最小的正整数 N , 满足

$$x(n+N) = x(n)$$

则称序列 $x(n)$ 是周期性序列, 周期为 N 。注意, 周期一定是正整数, 由于这一区别, 使得某些连续周期信号离散化后就不一定是离散周期信号。

1.2.2 连续时间信号的采样

1. 采样定理

假设连续时间信号 $x_a(t)$ 是一带限信号, 在 $|\Omega| > \Omega_0$ 时, $X_a(j\Omega) = 0$ 。若 $\Omega_s > 2\Omega_0$, 其中 $\Omega_s = 2\pi/T$ 为采样频率 ($\Omega_s/2$ 常称为折叠频率), T 为采样间隔, 则 $x_a(t)$ 可以用等间隔样本 $x_a(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 唯一地表示。

2. 由采样信号序列重构信号

假设采样信号为

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT) \quad (1.8)$$

那么由 $x_a(t)$ 和 $\hat{x}_a(t)$ 的频谱关系就会发现, 将采样信号通过理想低通滤波器

$$H(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2} \end{cases}$$

就可以得到连续时间信号 $x_a(t)$ 。

理想低通滤波器的脉冲响应为 $h(t) = \frac{\sin[\pi t/T]}{\pi t/T}$, 利用卷积积分可表示为

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \quad (1.9)$$

即通过上式由 $x_a(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 重构原信号 $x_a(t)$, 该式常称为采样内插公式。

1.2.3 离散时间系统时域分析

一个离散时间系统是将输入序列变换成输出序列的一种运算。常以 $T[\cdot]$ 表示这种运算, 即

$$y(n) = T[x(n)]$$

其中 $x(n)$ 是输入序列, $y(n)$ 是输出序列。

1. 线性系统

设系统在 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 单独输入时的输出分别为 $y_1(n) = T[x_1(n)]$ 和 $y_2(n) = T[x_2(n)]$, 若

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)] = a_1y_1(n) + a_2y_2(n) \quad (1.10)$$

则称该系统为线性系统。

2. 时不变系统

设系统输入与输出的关系为 $y(n) = T[x(n)]$, 若

$$T[x(n-m)] = y(n-m) \quad (1.11)$$

则该系统称为时不变系统。

同时具有线性和时不变性的离散时间系统称为线性时不变 (LTI) 离散时间系统, 简称 LTI 系统。

3. 单位脉冲响应

线性时不变系统可用它的单位脉冲响应来表征。单位脉冲响应 $h(n)$ 是指输入为单位脉冲序列时系统的输出, 即

$$h(n) = T[\delta(n)] \quad (1.12)$$

由线性时不变性及

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

可得到线性时不变系统的输入与输出关系为

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n) \quad (1.13)$$

这两个式子说明了任意信号的单位脉冲表示及卷积和在 LTI 系统分析中的作用。由于 LTI 系统的输出 $y(n)$ 可以由输入 $x(n)$ 与单位脉冲响应 $h(n)$ 的卷积来表示, 所以 LTI 系统的系统特性也会完全反映到 $h(n)$ 上, 因此 LTI 系统的因果性与稳定性可通过 $h(n)$ 的特点来判断。另外, 在第 2 章里会学到, 可以利用 $h(n)$ 的 z 变换或离散时间 (序列) 傅里叶变换来描述和分析 LTI 系统。

4. LTI 系统 (卷积) 的性质

(1) 交换律

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \quad (1.14)$$

卷积与两卷积序列的次序无关。

(2) 结合律

$$\begin{aligned} x(n) * h_1(n) * h_2(n) &= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \\ &= [x(n) * h_2(n)] * h_1(n) \\ &= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \end{aligned} \quad (1.15)$$

(3) 分配律

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \quad (1.16)$$

5. 因果系统

所谓因果系统, 就是系统的输出 $y(n)$ 只取决于当前时刻及以前的输入, 即

$$x(n), x(n-1), x(n-2), \dots$$

由线性时不变系统的输入与输出关系

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

如果该系统是因果系统, 就要求 $h(m) = 0, m < 0$, 因此 LTI 系统是因果系统的充分必要条件是

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \quad (1.17)$$

6. 稳定系统

稳定系统是指有界输入产生有界输出 (BIBO) 的系统, 即当 $|x(n)| \leq B_x < \infty$ 时, 输出序列 $y(n)$ 满足 $|y(n)| \leq B_y < \infty$ 。

要证明一个系统不稳定, 只需找一个特别的有界输入, 如果此时能得到一个无界的输出, 那么就一定能判定一个系统是不稳定的。

线性时不变系统是稳定系统的充分必要条件是, 单位脉冲响应绝对可和, 即

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (1.18)$$

1.2.4 常系数线性差分方程

离散时间线性时不变系统的输入输出关系常用以下形式的常系数线性差分方程表示:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (1.19)$$

差分方程的阶数等于未知序列 (指 $y(n)$) 变量序号的最高值与最低值之差。上式为 N 阶差分方程。对于任意输入 $x(n)$, 可通过求解差分方程得到系统的响应。当 $x(n) = \delta(n)$ 时, 结合差分方程的初始条件可求出系统的单位脉冲响应, 以此来分析系统。利用 z 变换或序列傅里叶变换可以更有效地分析系统, 这部分内容在第2章会详细讨论。

离散系统的差分方程表示法有两个主要的用途: 一是从差分方程表达式容易直接得到系统的结构, 有利于系统的分析、设计与实现; 二是便于求解系统的瞬态响应。

1.3 典型例题分析

1. 一离散时间信号 $x(n]$ 如图 1.1 所示, 请画出下列信号并给以标注。

(1) $x(n-4]$ (2) $x(3n]$ (3) $x(3-n]$ (4) $x(3n+1]$

(5) $x(n)u(2-n]$ (6) $x(n-2)\delta(n-2]$ (7) $\frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}(-1)^n x(n]$

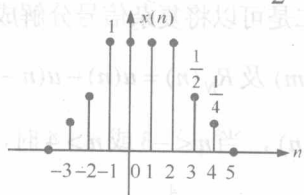
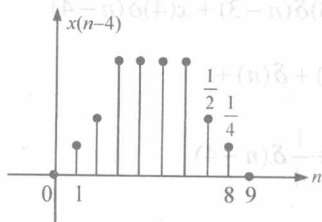


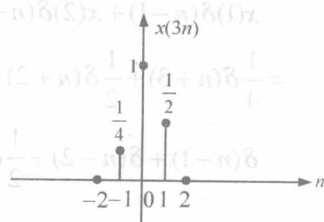
图 1.1 离散时间信号 $x[n]$

【分析与提示】利用基本信号 $\delta(n)$ 和 $u(n)$ 的特性及信号的基本运算。

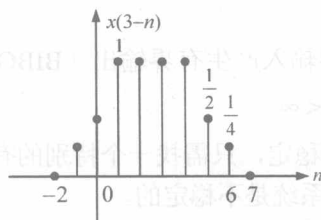
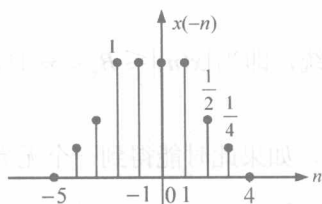
解: (1)



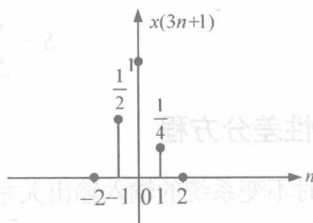
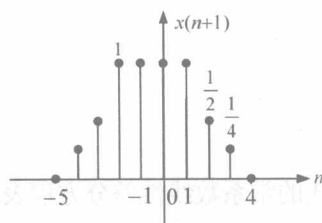
(2)



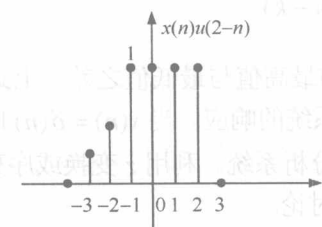
(3)



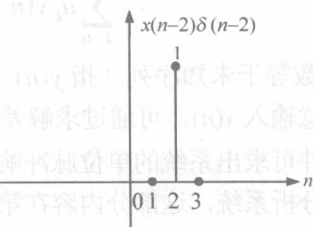
(4)



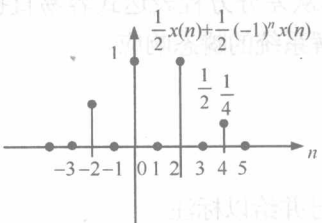
(5)



(6)



(7)



2. 利用单位脉冲序列 $\delta(n)$ 和单位阶跃序列 $u(n)$ 表示题 1 中的离散信号 $x(n)$ 。

【分析与提示】一般来说, 讨论基本信号有两个目的, 一是利用基本信号可以说明数字信号处理的基本概念和基本方法, 二是可以将复杂信号分解成基本信号, 以此来分析复杂信号。

本题主要利用 $x(n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$ 及 $R_N(n) = u(n) - u(n-N)$ 。

解: 首先考虑利用 $\delta(n)$ 表示 $x(n)$, 当 $n < -3$ 或 $n > 4$ 时, $x(n) = 0$, 所以

$$\begin{aligned}
 x(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) = \sum_{m=-3}^4 x(m)\delta(n-m) \\
 &= x(-3)\delta(n+3) + x(-2)\delta(n+2) + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + \\
 &\quad x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + x(3)\delta(n-3) + x(4)\delta(n-4) \\
 &= \frac{1}{4}\delta(n+3) + \frac{1}{2}\delta(n+2) + \delta(n+1) + \delta(n) + \\
 &\quad \delta(n-1) + \delta(n-2) + \frac{1}{2}\delta(n-3) + \frac{1}{4}\delta(n-4)
 \end{aligned}$$

接着再考虑利用 $u(n)$ 表示 $x(n)$, 假设有如下 3 个信号:

$$x_1(n) = \begin{cases} x(n), & -5 < n < -1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad x_2(n) = \begin{cases} x(n), & -1 \leq n \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad x_3(n) = \begin{cases} x(n), & 2 < n < 6 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

它们分别可以表示为

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \frac{1}{4}(n+4)[u(n+4) - u(n+1)] \\ x_2(n) &= u(n+1) - u(n-3) \\ x_3(n) &= -\frac{1}{4}(n-5)[u(-n+5) - u(-n+2)] \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} x(n) &= x_1(n) + x_2(n) + x_3(n) \\ &= \frac{1}{4}(n+4)[u(n+4) - u(n+1)] + u(n+1) - u(n-3) - \\ &\quad \frac{1}{4}(n-5)[u(-n+5) - u(-n+2)] \end{aligned}$$

3. 判定下列离散时间信号的周期性。若是周期性的, 确定它的周期。

$$(1) x(n) = \sin\left(\frac{4\pi}{5}n + 1\right) \quad (2) x(n) = \cos\left(\frac{n}{9} - \pi\right)$$

$$(3) x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \quad (4) x(n) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{6}\right)$$

【分析与提示】对于离散时间周期信号, 其周期一定是正整数。该题主要利用以下两点:

(a) 对于 $x(n) = A\cos(n\omega_0 + \phi)$ ($x(n) = A\sin(n\omega_0 + \phi)$ 或 $x(n) = Ae^{j(n\omega_0 + \phi)}$), 当 $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{m}$ 为有理数时, 序列是周期的, 周期为 $N/\gcd(N, m)$, $\gcd(N, m)$ 是 m 和 N 的最大公约数; 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数时, 信号是非周期的; (b) 两个周期信号的周期分别为 N_1 和 N_2 , 它们的和信号与乘积信号也是周期的, 如果周期没有变小, 那么周期为 N_1 和 N_2 的最小公倍数, 即 $N = \frac{N_1 N_2}{\gcd(N_1, N_2)}$ 。

解: (1) $\omega_0 = \frac{4\pi}{5}$, 则 $\frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \frac{5}{4\pi} = \frac{5}{2}$ 为有理数, 5 和 2 没有公因子, 所以周期 $N = 5$ 。

(2) $\omega_0 = \frac{1}{9}$, 则 $\frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot 9 = 18\pi$ 为无理数, 所以该信号是非周期的。

(3) 利用三角公式有

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right]$$

由(1)和(2)的讨论可知, $\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$ 的周期为 $N_1 = 8$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ 的周期为 $N_2 = 8$, 那么 $x[n]$

的周期为 $N = \frac{N_1 N_2}{\gcd(N_1, N_2)} = 8$ 。

(4) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ 的周期为 8, $\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)$ 的周期为 16, $-2\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{6}\right)$ 的周期为 4, 那么 $x(n)$ 的周期为这三者的最小公倍数, 即 $N=16$ 。

4. 考虑离散时间信号。

$$x(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)$$

求两个不同的连续时间信号, 使对它们以频率 $f_s = 10\,000$ Hz 采样产生上述序列。

【分析与提示】利用采样定理及离散周期信号的特点。

解: 对连续时间信号

$$x_a(t) = \cos(\Omega_0 t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

以采样频率 f_s Hz (采样间隔 $T_s = 1/f_s$) 采样产生离散时间序列

$$x(n) = x_a(nT_s) = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n\right)$$

然而对任意整数 k ,

$$\cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n\right) = \cos\left(2\pi \frac{f_0 + kf_s}{f_s} n\right)$$

所以当以采样频率 f_s 采样任意频率为 $f_0 + kf_s$ 的正弦信号时都会产生相同的序列, 对于信号 $x(n) = \cos(n\pi/8)$, 我们希望

$$2\pi \frac{f_0}{f_s} = \frac{\pi}{8}$$

或者 $f_0 = \frac{1}{16} f_s = 625$ Hz

所以, 以采样频率 f_s 采样下列两个信号:

$$x_1(t) = \cos(1250\pi t), \quad x_2(t) = \cos(21250\pi t)$$

可得到 $x(n)$ 。

5. 判断下列离散时间系统是否为线性、时不变、因果、稳定系统, 说明理由, 其中 $x(n]$ 与 $y(n)$ 分别为系统的输入与输出。

$$(1) y(n) = x(n-1) - 3x(n-6)$$

$$(2) y(n) = (n+1)x(n-1)$$

$$(3) y(n) = \begin{cases} x(n), & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x(n+1), & n \leq -1 \end{cases} \quad (4) y(n) = x(3n+1)$$

【分析与提示】线性系统: $T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)]$; 时不变系统: $T[x(n-m)] = y(n-m)$ (m 为任意整数); 因果系统: $y(n)$ 只取决于 $x(n), x(n-1), x(n-2), \dots$; 稳定系统: 当 $|x(n)| \leq B_x < \infty$ 时, $|y(n)| \leq B_y < \infty$ 。

解: (1) 首先判断系统是否是线性系统。假设在 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 单独输入时的输出分别为 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$, 即

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1(n-1) - 3x_1(n-6)$$

$$y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2(n-1) - 3x_2(n-6)$$

那么当输入为 $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ 时, 系统的输出为

$$\begin{aligned} y(n) &= T[x(n)] = T[ax_1(n) + bx_2(n)] \\ &= ax_1(n-1) + bx_2(n-1) - 3ax_1(n-6) - 3bx_2(n-6) \\ &= ay_1(n) + by_2(n) \end{aligned}$$

所以系统是线性系统。

下面判断系统是否为时不变系统。假设系统的输入为 $x(n)$, 系统的输出

$$y(n) = T[x(n)] = x(n-1) - 3x(n-6)$$

当系统的输入为 $x_1(n) = x(n-m)$ 时, 系统的输出

$$\begin{aligned} y_1(n) &= T[x_1(n)] = x_1(n-1) - 3x_1(n-6) \\ &= x(n-m-1) - 3x(n-m-6) \\ &= y(n-m) \end{aligned}$$

由此可得系统是时不变系统, 所以该系统为线性时不变系统。

接下来判断系统是否为因果系统。 $y(n)$ 与 $x(n-1)$ 和 $x(n-6)$ 有关, 由因果系统的定义可知, 该系统为因果系统。

最后, 判断系统是否为稳定系统。假设输入有界, 即

$$|x(n)| \leq B_x < \infty$$

此时输出满足

$$|y(n)| = |x(n-1) - 3x(n-6)| \leq 4B_x < \infty$$

因此系统为稳定系统。

(2) 首先判断系统是否是线性系统。假设在 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 单独输入时的输出分别为 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$, 即

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = (n+1)x_1(n-1)$$

$$y_2(n) = T[x_2(n)] = (n+1)x_2(n-1)$$

那么当输入为 $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ 时, 系统的输出为

$$\begin{aligned} y(n) &= T[x(n)] = T[ax_1(n) + bx_2(n)] \\ &= a(n+1)x_1(n-1) + b(n+1)x_2(n-1) \\ &= ay_1(n) + by_2(n) \end{aligned}$$

所以系统是线性系统。

下面判断系统是否为时不变系统。假设系统的输入为 $x(n)$, 系统的输出

$$y(n) = T[x(n)] = (n+1)x(n-1)$$

当系统的输入为 $x_1(n) = x(n-m)$ 时, 系统的输出

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = (n+1)x_1(n-1) = (n+1)x(n-1-m)$$

因为 $y(n-m) = (n-m+1)x(n-m-1)$, 显然 $y_1(n) = T[x_1(n)] = T[x(n-m)] \neq y(n-m)$, 所以系统不是时不变系统。