飞思考试中心
Fecit Examination Center

研究生入学考试考点解析与真题详解

——数学分析

研究生入学考试试题研究组 主编
飞思教育产品研发中心 监制

飞思教育 FECIT-Education www.fecit.net

精编最新、最全的考研真题，知识更新

分类精析、精讲各个考点，收效更好

立体化辅导模式，效率更高

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

飞思考试中心
Fecit Examination Center

研究生入学考试考点解析与真题详解

——数学分析

研究生入学考试试题研究组 主编
飞思教育产品研发中心 监制

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内容简介

本书对全国 50 余所高校近几年研究生入学考试真题按主流高校指定考研教材的章节分类编排，并对真题进行详细分析，对相关知识点进行详尽的介绍。通过对真题的分类、分析和相关考点的理论链接，使考生能够熟悉考试的内容，抓住考试的重点与难点，掌握考试中经常出现的题型和每种题型的解法，同时也使考生熟悉专家们的出题思路、命题规律，从而提高应试复习的效率和命中率。本书最大特色是以“真题分析”为主线贯穿全书，以“考点点拨”、“理论链接”等特色段落为辅线，帮助读者巩固考试所涉及的重点与难点。

本书的特点：

- 以真题为纽带，带动考点。本书的结构不是传统的“考点→例题→习题”，而是采用“真题→分析→考点”的方式。实践证明这种“将考点融入考题、以考题学习考点”的方式应试针对性极强，特别适合考生在短时间内突破过关。
- 真题分类编排，分析到位。本书将近几年真题按主流教材的章节分类编排，从而有利于读者分类复习，专项攻克。所有真题均给出了详尽的分析，便于考生把握完整的解题思路，快速提升应试能力。

另外，本书还提供了 3 套全真模拟试题，便于考生考前实战冲刺，体验真实训练。

本书具有真题丰富、考点全面、分析透彻、严谨实用等特点，非常适合广大应试考生使用，也可作为各类研究生入学考试培训班的辅助教材，以及高等院校师生的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

研究生入学考试考点解析与真题详解. 数学分析 / 研究生入学考试试题研究组主编.—北京：电子工业出版社，2008.11

（飞思考试中心）

ISBN 978-7-121-07336-6

I. 研… II.研… III.数学分析－研究生－入学考试－自学参考资料 IV.G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 135361 号

责任编辑：李　蕊
印　　刷：北京市海淀区四季青印刷厂
装　　订：涿州市桃园装订有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：850×1168　1/16　印张：24　字数：1099 千字
印　　次：2008 年 11 月第 1 次印刷
印　　数：5 000 册　定　价：43.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

编审委员会

丛书主编　何光明　吴　婷

本书主编　耿永才　黄学海

本书主审　杨　萍

编委名单（以姓氏笔画为序）

孔慧芳、王一非、王国全、王衍军、刘　伟、孙　坤、孙　虹、孙　涵、江　兵、祁　航、许　勇、许　娟、邢　肖、严云洋、何光明、何杨光、何　秀、何　涛、吴　金、吴　婷、吴　蕾、应艳杰、张　建、张建林、李千目、李　海、杨　明、杨帮华、杨　萍、汪志宏、陈玉旺、陈应松、陈　还、陈　智、单忆南、孟祥印、范荣钢、侯金龙、姚昌顺、姜萍萍、胡　邦、赵传申、骆　健、唐　萨、耿永才、钱阳勇、黄学海、温阳东、童爱红、葛武滇、董　图、廖春和、蔡　浩

出版说明

知己知彼　百战百胜

随着改革开放和现代化建设事业的需要，特别是"科教兴国"、"知识经济"等战略性措施日益广泛实施，各行各业对高素质、高学历人才的需求量越来越大。同时，随着高等教育的大众化，本科人才越来越多，相当一部分大学生毕业后找不到理想工作，很多人希望取得更高的学历，以增强自己的竞争实力。因此，近年来"考研热"持续升温。研究生入学考试现已成为国内影响最大、参加人数最多的国家级选拔高层次人才的水平考试。

1．编写目的

研究生入学考试与在校大学生的期中或期末考试相比，其深度、广度与难度大大增加，试题综合性强，着重知识的运用，竞争激烈，淘汰率高。同时，考研作为一种选拔性水平考试，试题规律性很强，不少题型反复出现，把这些反复出现的试题整理归类，以节省考生宝贵的复习时间，对考生迎考大有帮助。飞思考试中心为了更好地服务于考生，引导考生在较短时间内掌握解题要领，并顺利通过研究生入学考试，我们组织了一批具有多年教学经验的一线教师，将他们多年的教学经验进行浓缩，并在深入剖析近几年全国50余所著名院校研究生入学考试专业课试题的基础上，特别编写了这套《研究生入学考试考点解析与真题详解》系列图书。

2．本系列图书简介

《研究生入学考试考点解析与真题详解》系列图书首批推出以下12本：

（1）研究生入学考试考点解析与真题详解——操作系统

（2）研究生入学考试考点解析与真题详解——数据结构与算法设计

（3）研究生入学考试考点解析与真题详解——微机原理与接口技术

（4）研究生入学考试考点解析与真题详解——自动控制原理

（5）研究生入学考试考点解析与真题详解——信号系统

（6）研究生入学考试考点解析与真题详解——高等代数

（7）研究生入学考试考点解析与真题详解——数学分析

（8）研究生入学考试考点解析与真题详解——数字电子技术

（9）研究生入学考试考点解析与真题详解——模拟电子技术

（10）研究生入学考试考点解析与真题详解——电路

（11）研究生入学考试考点解析与真题详解——机械原理与机械设计

（12）研究生入学考试考点解析与真题详解——硬件分册（数字逻辑、计算机组成原理、计算机系统结构）

3．本系列图书特色

- **真题量大面广，最新、最全。**书中收集了近年来全国50余所著名院校研究生入学考试专业课试题，题量大、内容新，便于读者摸清考试趋向，预测考点，紧跟考试动态。
- **以真题为纽带，带动考点。**本系列图书的结构不是传统的"考点→例题→习题"，而是采用"真题→分析→考点"的方式。实践证明这种"**将考点融入考题，以考题学习考点**"的方式应试针

对性极强，特别适合考生在短时间内突破过关。

- **真题分类编排，方便复习。**书中对将近几年 50 余所著名院校考研真题进行深入剖析，然后按主流高校指定考研教材的章节分类编排，从而有利于考生分类复习，专项攻克，同时也便于考生更好地理解和掌握考试的内容、范围及难度，便于考生把握命题规律，快速提升应试能力。
- **题型分析透彻，举一反三。**本系列图书重点定位在介绍解题方法与技巧上，不仅授人以“鱼”，更在于授人以“渔”。书中对例题进行细致深入的分析、完整的解答和点评扩展，能让考生达到触类旁通、举一反三之功效。
- **立体化辅导模式，提高效率。**以“真题分析”为主线贯穿全书，以“考点点拨”、“理论链接”等特色段落为辅线，帮助考生巩固考试所涉及的重点与难点。
- **名师精心锤炼，权威性强。**本系列图书由名师主笔，亲授解题技巧。内容全面翔实，文字表达简洁明了，层次清晰，结构严谨，特别突出解题方法，强调知识的综合与提高，导向准确。
- **考点浓缩精解，便于记忆。**将指定的考试内容进行浓缩，用言简意赅的语言精讲考试要点、重点和难点。
- **全真试题实战，自测提高。**书末均给出 3 套全真考研预测试卷，并附上详细的解答，包括分析、解答和注解，便于考生考前演练，自测提高。

4. 本书阅读指南

本书全面、系统地分析了近几年数学分析考研题目的解题思路，并给出翔实的参考答案，读者可以充分了解各个学校考研题目的难度，查漏补缺，有针对性地提高自己的数学分析水平。本书共分 20 章。

第 1 章主要介绍数列极限，考查数列极限的概念、计算及收敛性。

第 2 章主要介绍函数极限，考查函数极限的概念和收敛性。

第 3 章主要介绍函数的连续性，考查函数连续的概念和性质，以及函数的一致连续性。

第 4 章主要介绍导数和微分，考查函数可导和可微的概念、求导法则，以及导函数的介值性。

第 5 章主要介绍微分中值定理及其应用，考查 Taylor 公式，以及函数的极值、最值、凸性与拐点。

第 6 章主要介绍实数的完备性，考查其基本定理的等价性和应用，以及上、下极限的概念。

第 7 章主要介绍不定积分与定积分，考查不定积分和定积分的概念、计算与应用。

第 8 章主要介绍反常积分，考查无穷积分和瑕积分的概念、性质及收敛性的判别。

第 9 章主要介绍数项级数，考查数项级数的概念、收敛性及收敛级数的性质。

第 10 章主要介绍函数列与函数项级数，考查函数列与函数项级数一致收敛性的概念、判别法及性质。

第 11 章主要介绍幂级数，考查幂级数的收敛区域、和函数及性质，以及函数的幂级数展开。

第 12 章主要介绍 Fourier 级数，考查 Fourier 系数的计算，Fourier 级数收敛定理及性质，函数的 Fourier 级数展开式。

第 13 章主要介绍多元函数的极限与连续，考查平面点集的概念和多元函数的概念、极限和连续性。

第 14 章主要介绍多元函数微分学，考查多元函数的可微性，复合函数微分法、泰勒公式与极值问题。

第 15 章主要介绍隐函数定理及其应用，考查隐函数的概念、存在唯一性定理及可微性定理，隐函数组的概念及定理、坐标变换、几何应用与条件极值。

第 16 章主要介绍含参量积分，考查含参量积分的连续性、可微性与可积性。

第 17 章主要介绍重积分，考查二重积分和多重积分的概念、计算及应用。

第 18 章主要介绍曲线积分，两类曲线积分的概念、性质与计算，以及它们之间的关系，格林公式，Stokes 公式。

第 19 章主要介绍曲面积分，两类曲面积分的概念与计算，高斯公式，两类曲面积分之间的关系。

第 20 章提供了三套模拟试题，并给出详尽的分析解答，供读者考前实战演练、自测提高。

5．读者对象

本系列图书特别适合于希望在较短时间内取得较大收获的广大考研应试考生，也可作为各类研究生入学考试培训班的辅助教材，以及高等院校师生的教学参考书。

6．互动交流

读者的进步是我们的心愿。如果您发现书中有任何疑惑之处，请与我们交流。联系信箱：gmkeji@163.com。

7．关于作者

本系列图书由从事专业课第一线教学的名师分工编写。他们长期从事这方面的教学和研究工作，积累了丰富的经验，对考研颇有研究（其中大多数编写者多年参加研究生入学试题命题及阅卷工作）。本书由耿永才、黄学海任主编，杨萍主审。另外参与这套丛书组织、编写、审校和资料收集等工作的还有（按姓氏笔画排名）：孔慧芳、王国全、江兵、许勇、许娟、严云洋、何光明、何杨光、吴金、吴婷、张建林、李千目、李海、杨明、杨萍、汪志宏、陈玉旺、陈智、范荣钢、姚昌顺、赵传申、骆健、钱阳勇、温阳东、童爱红、葛武滇等。

8．特别致谢

本系列图书在编写过程中参考了全国硕士研究生入学考试真题，在此对本书所引用试题的出题老师和有关单位表示真诚的感谢。

感谢电子工业出版社对这套书的大力支持，感谢为这套书的出版做出贡献与支持的各界人士。由于时间仓促，学识有限，书中不妥之处，敬请广大读者指正。

编　委　会

飞思教育产品研发中心

联系方式

咨询电话：（010）88254160　88254161-67

电子邮件：support@fecit.com.cn

服务网址：http://www.fecit.com.cn　http://www.fecit.net

通用网址：计算机图书、飞思、飞思教育、飞思科技、FECIT

目录

第 1 章　数列极限 1
考点 1：数列极限概念 1
考点 2：收敛数列的性质 5
考点 3：数列极限存在的条件 11
考点 4：实数集与函数 18
第 2 章　函数极限 23
考点 1：函数极限概念 23
考点 2：函数极限的性质 25
考点 3：函数极限存在的条件 26
考点 4：无穷小量与无穷大量 29
第 3 章　函数的连续性 35
考点 1：连续性概念 35
考点 2：连续函数的性质 41
第 4 章　导数和微分 55
考点 1：导数的概念 55
考点 2：求导法则 65
考点 3：微分 69
第 5 章　微分中值定理及其应用 71
考点 1：微分中值定理 71
考点 2：Taylor 公式 94
考点 3：函数的极值与最值，函数的凸性与拐点 100
第 6 章　实数的完备性 109
考点 1：关于实数集完备性的基本定理 109
考点 2：上极限与下极限 114
第 7 章　不定积分与定积分 117
考点 1：不定积分 117
考点 2：定积分 123
考点 3：定积分的应用 155
第 8 章　反常积分 159
考点 1：无穷积分 159
考点 2：瑕积分 168
第 9 章　数项级数 171
考点 1：级数的收敛性 171
考点 2：正项级数 173
考点 3：一般项级数 181
第 10 章　函数列与函数项级数 189
考点 1：一致收敛性 189
考点 2：一致收敛函数列与函数项级数的性质 201

CONTENTS

第 11 章　幂级数 215
考点 1：幂级数 215
考点 2：函数的幂级数展开 226
第 12 章　Fourier 级数 233
考点 1：Fourier 级数 233
考点 2：Fourier 级数展开式 235
第 13 章　多元函数的极限与连续 243
考点 1：平面点集与多元函数 243
考点 2：多元函数的极限 243
考点 3：多元函数的连续性 246
第 14 章　多元函数微分学 249
考点 1：可微性 249
考点 2：复合函数微分法 259
考点 3：Taylor 公式与极值问题 263
第 15 章　隐函数定理及其应用 269
考点 1：隐函数 269
考点 2：隐函数组 278
考点 3：几何应用与条件极值 280
第 16 章　含参量积分 293
考点 1：含参量正常积分 293
考点 2：含参量反常积分 295
考点 3：Euler 积分 304
第 17 章　重积分 305
考点 1：二重积分 305
考点 2：三重积分，n 重积分 314
考点 3：重积分的应用 320
第 18 章　曲线积分 325
考点 1：第一型曲线积分 325
考点 2：第二型曲线积分 326
第 19 章　曲面积分 341
考点 1：第一型曲面积分 341
考点 2：第二型曲面积分 346
第 20 章　模拟试题及参考答案 367
模拟试题一 367
模拟试题一参考答案 367
模拟试题二 370
模拟试题二参考答案 371
模拟试题三 373
模拟试题三参考答案 374

第1章 数列极限

考点1：数列极限概念

考点点拨：考查数列极限的概念，即数列极限的ε–N语言描述.

【试题 1-1-1】（江苏大学 2006 年）设p为正整数，证明：若p不是完全平方数，则$\sqrt{p}$是无理数.

分析：考查实数的性质.

证明：反证法. 假设$\sqrt{p}$是有理数，则存在互质的正整数a和b，使得$\sqrt{p}=\dfrac{b}{a}$，则$b^2=pa^2$. 由于p为正整数，而a^2与b^2也是互质的，故假设$a=1$，从而$p=b^2$，矛盾.

【试题 1-1-2】（天津大学 2005 年）用“$\varepsilon-\delta$”或“$\varepsilon-N$”语言叙述下列概念：

（1）数列$\{a_n\}$无界，但不是无穷大量；

（2）数列$\{a_n\}$存在子列收敛于点a.

分析：考查“$\varepsilon-\delta$”语言的叙述.

解答：(1) 对任意的$A>0$，存在$n\in\mathbf{N}$，使得$|a_n|>A$. 同时存在$A_0>0$，使得对任意的$N\in\mathbf{N}$，存在$n>N$，使得$|a_n|\leqslant A_0$.

（2）对于任意的$\varepsilon>0$，存在$n\in\mathbf{N}$，使得$|x_n-a|<\varepsilon$.

【试题 1-1-3】（山东科技大学 2005 年）用$\varepsilon-N$语言叙述数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时不以A为极限的概念，并以此证明$\{(-1)^n\}$不以1为极限.

证明：存在$\varepsilon_0>0$，使得对任意的$N\in\mathbf{N}$，存在$n>N$满足$|x_n-A|\geqslant\varepsilon_0$. 由于$|(-1)^{2N+1}-1|\geqslant 2$，所以$\{(-1)^n\}$不以1为极限.

【试题 1-1-4】（天津大学 2006 年）对任意的$\varepsilon>0$，$N>0$，存在$n>N$，$|x_n-a|<\varepsilon$，则$\{x_n\}$有什么性质？

分析：考查“$\varepsilon-\delta$”语言的叙述.

解答：数列$\{x_n\}$有一个子列收敛于a.

【试题 1-1-5】（汕头大学 2003 年）按$\varepsilon-N$定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$，$(a>1)$，并给出推广结论.

分析：数列极限的定义证明法.

证明：由于$\dfrac{n}{a^n}\leqslant\dfrac{n}{\mathrm{C}_n^2(a-1)^2}=\dfrac{2}{(n-1)(a-1)^2}$，所以对任意的$\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{2}{(a-1)^2\varepsilon}\right]+2$，则对任意的$n>N$有$0<\dfrac{n}{a^n}<\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$.

推广的结论为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^p}{a^n}=0$，$(a>1，p>0)$.

【试题 1-1-6】（上海理工大学 2005 年）用极限定义证明，当$a>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，并讨论当$0<a\leqslant 1$时，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$是否存在. 如果存在，极限是多少.

分析：考查数列极限的定义.

证明：当$a>1$时，令$a_n=\sqrt[n]{a}-1$，则$a_n>0$. 由

$$a=(1+a_n)^n \geqslant 1+na_n=1+n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$$

得

$$\sqrt[n]{a}-1 \leqslant \frac{a-1}{n}$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，就有 $0<\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$，即 $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

当 $0<a<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a^{-1}}}=1$；当 $a=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$.

【试题 1-1-7】（清华大学 2001 年）设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，$b\neq 0$，用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$.

分析：考查数列收敛的定义和性质.

证明：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，所以对任意的 ε，存在 N，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$，$|b_n-b|<\varepsilon$.

因为 $b\neq 0$，由收敛数列的保号性，当 $n>N$ 时，有 $|b_n|>\frac{|b|}{2}$，而

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{a_nb-ab_n}{bb_n}\right|=\left|\frac{a_nb-ab+ab-ab_n}{b_nb}\right|\leqslant\left|\frac{b(a_n-a)}{b_nb}\right|+\left|\frac{a(b-b_n)}{b_nb}\right|\leqslant\frac{2\varepsilon}{|b|}+\frac{2|a|\varepsilon}{b^2}=\frac{2(|a|+|b|)}{b^2}\varepsilon$$

【试题 1-1-8】（中国地质大学 2004 年）利用定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，（$a>1$）.

分析：考查定义，关键求出 N.

证明：对于任意的 ε，存在 $N=\frac{1}{\log_a^{\varepsilon+1}}$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|\leqslant\varepsilon$.

【试题 1-1-9】（大连理工大学 2004 年、武汉大学 2006 年）叙述 $\{x_n\}$ 发散的定义，证明 $\{\cos n\}$，$\{\sin n\}$ 发散.

分析：证明数列发散的方法.

证明：设 $\{x_n\}$ 不以 a 为极限。存在 ε_0，对任意的 N，有 n_0、$n_0>N$，使得 $|x_n-a|\geqslant\varepsilon_0$.

下证 $\{\sin n\}$ 不收敛.

存在 $\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$，对任意的 N，有 $n=\left[2N\pi+\frac{3\pi}{4}\right]$，$m=[2N\pi+2\pi]$，$m>n>N$，则有

$$2N\pi+\frac{\pi}{4}<n<2N\pi+\frac{3\pi}{4}，\quad 2N\pi+\pi<m<2N\pi+2\pi$$

所以 $|\sin n-\sin m|>\frac{\sqrt{2}}{2}$.（柯西（Cauchy）收敛准则）

【试题 1-1-10】（中南大学 2004 年）证明收敛数列 $\{x_n\}$ 的极限唯一.

分析：极限的性质.

证明：反证法. 设 $\{x_n\}$ 的极限不唯一，为 α 和 β（$\alpha\neq\beta$），不妨设 $\alpha>\beta$. 由 ε 的任意性，取 $\varepsilon=\frac{\alpha-\beta}{2}$. 则对 ε，存在 N，对任意的 $n>N$，有 $|x_n-\alpha|<\varepsilon$，所以 $\frac{\alpha+\beta}{2}<x_n<\frac{3\alpha-\beta}{2}$，同时还有 $\frac{3\beta-\alpha}{2}<x_n<\frac{\alpha+\beta}{2}$，矛盾. 故极限唯一.

【试题 1-1-11】（兰州大学 2005 年）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1}\right)$.

解答：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2}$$

【试题 1-1-12】（山东科技大学 2004 年）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$.

解答：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=1$$

【试题 1-1-13】（北京交通大学 2003 年）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+2}{n}$.

分析：考查数列极限.

解答：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+2}{n}=0$$

【试题 1-1-14】（北京交通大学 2004 年）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}$.

分析：考查数列极限.

解答：
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2=1$$

【试题 1-1-15】（天津大学 2005 年）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}$ 的值.

分析：考查极限的计算.

解答：当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=1$；

当 $x=2^n\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$（$n$、$k$ 均为整数）时，$\lim\limits_{k\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=0$；

当 $x\neq0$ 且 $x\neq2^n\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2^n}\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}=\dfrac{\sin x}{x}$.

【试题 1-1-16】（中科院武汉物理与数学研究所 2005 年）若 $|a|<1$，$|b|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$.

分析：考查数列的极限.

解答：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^{n+1})(1-b)}{(1-b^{n+1})(1-a)}=\frac{1-b}{1-a}$$

【试题 1-1-17】（中科院武汉物理与数学研究所 2005 年）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n}\right)$.

分析：考查数列极限的计算.

解答：由和差化积公式可得
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n}\right)&=\lim_{n\to\infty}2\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\\&=\lim_{n\to\infty}2\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}=0\end{aligned}$$

【试题 1-1-18】（中科院武汉物理与数学研究所 2005 年）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cdot\cos\frac{\pi}{2^n}$ 的值.

分析：考查数列极限的计算.

解答：由二倍角公式可得
$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cdot\cos\frac{\pi}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{2}{\pi}$$

【试题 1-1-19】（深圳大学 2006 年）设数列 $\{x_n\}$ 满足下面的条件：
$$|x_{n+1}|\leqslant k|x_n|\qquad n=1,2,\cdots$$
其中 $0<k<1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

分析：考查数列的极限.

证明：易有 $|x_n|\leqslant k^{n-1}|x_1|$，$n=1,2,\cdots$. 又因为 $0<k<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}k^{n-1}|x_1|=0$，即对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $k^{n-1}|x_1|<\varepsilon$. 因而 $|x_n|\leqslant k^{n-1}|x_1|<\varepsilon$，即 $|x_n-0|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

【试题 1-1-20】（南京大学 2000 年）设 $x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$（$x_1>0$ 为已知），求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析：关键是要得到递推不等式.

解答：由题中的递推关系易知 $x_n>0$. 同样由这个递推关系可以得到
$$x_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(x_n-\sqrt{3}\right)}{3+x_n},\quad n\in\mathbf{N}$$

从而 $\left|x_{n+1}-\sqrt{3}\right|=\dfrac{(3-\sqrt{3})}{3+x_n}\left|(x_n-\sqrt{3})\right|\leqslant\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\left|(x_n-\sqrt{3})\right|$，$n\in\mathbf{N}$. 由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$.

【试题 1-1-21】（西安电子科技大学 2005 年）设 $x_1>0$，且 $x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}$，$n=1，2，\cdots$，证明 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

分析：关键是要得到递推不等式.

证明：显然有 $x_n\geqslant 0$. 由 $x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}$ 可得 $x_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+x_n}\left(x_n-\sqrt{2}\right)$. 于是

$$\left|x_{n+1}-\sqrt{2}\right|=\frac{2-\sqrt{2}}{2+x_n}\left|x_n-\sqrt{2}\right|\leqslant\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left|x_n-\sqrt{2}\right|\leqslant\cdots\leqslant\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left|x_1-\sqrt{2}\right|$$

故 $\{x_n\}$ 收敛，其极限为 $\sqrt{2}$.

【试题 1-1-22】（南京大学 2001 年）设 $a_1=0$，$a_n=\dfrac{a_{n-1}+3}{4}$，（$n\geqslant2$），求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

分析：关键是构造递推关系.

解答：由题设可得

$$a_n-1=\frac{1}{4}(a_{n-1}-1)$$

由此递推关系即可得 $a_n=1-\dfrac{1}{4^{n-1}}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

【试题 1-1-23】（武汉大学 2002 年）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}\right)$，（$a>1$）.

分析：等比数列求和公式.

解答：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)，（a>1）$$

$$=\frac{1}{a-1}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-\left(\dfrac{1}{a}\right)^n}{1-\dfrac{1}{a}}-\frac{n}{a^n}\right]=\frac{a}{(a-1)^2}$$

【试题 1-1-24】（东南大学 2003 年）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$.

分析：利用等差数列求和公式.

解答：因为 $(2n-1)^2=4n^2-4n+1$，而 $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，$\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}=\dfrac{4}{3}$.

【试题 1-1-25】（武汉大学 2004 年）计算下列极限：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}\right)$，（$a>1$）；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

分析：利用数列求和公式求极限.

解答：（1）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)=\frac{1}{a-1}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-\left(\dfrac{1}{a}\right)^n}{1-\dfrac{1}{a}}-\frac{n}{a^n}\right]=\frac{a}{(a-1)^2}$$

（2）

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)&=\lim_{x\to\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\\&=\lim_{x\to\infty}2\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\\&=0\end{aligned}$$

【试题 1-1-26】（天津大学 2006 年）$\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_i}=a$ 存在，且对任意的 p 为自然数，有 $\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_i+p}=a$，问 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是否存在？举例说明.

解答：不一定存在. 反例，$x_n=\begin{cases}1, & \text{当}n\text{为平方数}\\0, & \text{当}n\text{不为平方数}\end{cases}$，$n_k=k^2+1$，则 $\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_i}=0$，且对任意的 p 为自然数，有 $\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_i+p}=0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

【试题 1-1-27】（上海理工大学 2004 年）证明：若数列 $\{x_n\}$ 无上界，则必有严格单调增加且趋于 $+\infty$ 的子列.

分析：考查数列的性质.

证明：因为数列 $\{x_n\}$ 无上界，所以存在 $x_{n_1}>1$．同样因为数列 $\{x_n\}$ 无上界，所以存在 $x_{n_2}>\max\{1,x_{n_1}\}$．依次类推，可得到 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $x_{n_{k+1}}>\max\{k,x_{n_k}\}$，$k=1$，2，…．显然 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的严格单调增加且趋于 $+\infty$ 的子列.

【试题 1-1-28】（复旦大学 2001 年、北京工业大学 2003 年）设 $a_n>0$，$a>0$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n}=a$

分析：考查数列极限，关键是分成前后两部分.

证明：（1）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，故对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N_1\in\mathbf{N}$，使得对任意的 $n>N_1$，有 $|a_n-a|<\varepsilon$．于是

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\\ &\leqslant\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\\ &<\frac{c}{n}+\frac{n-N_1}{n}\varepsilon=\frac{c}{n}+\left(1-\frac{N_1}{n}\right)\varepsilon\\ &<\frac{c}{n}+\varepsilon\end{aligned}$$

其中，$c=|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|$ 为非负常数．因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c}{n}=0$，故对上述 $\varepsilon>0$，存在 $N_2\in\mathbf{N}$，使得对任意的 $n>N_2$，有 $\dfrac{c}{n}<\varepsilon$．取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则对任意的 $n>N$，有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

也即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

（2）利用（1）的结论知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}}=\mathrm{e}^{\ln a}=a$$

【试题 1-1-29】（中南大学 2003 年）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$.

分析：利用分子有理化求极限.

解答：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}+1}=\frac{1}{2}$$

考点 2：收敛数列的性质

考点点拨：主要考查收敛数列的唯一性、有界性、保号性、收敛性、四则运算法则、与子列的关系.

【试题 1-2-1】（陕西师范大学 2002 年）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2n^2}}$.

分析：要熟练运用夹逼法.

解答：由于 $1\leqslant\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2n^2}}\leqslant\sqrt[n]{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，故由夹逼法可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2n^2}}=1$.

【试题 1-2-2】（上海交通大学 2002 年）是非判断题，若 $a_n\leqslant x_n\leqslant b_n$，$n\in\mathbf{N}$，而 $\{x_n\}$ 收敛 $b_n-a_n\to0$，$(n\to\infty)$，则 $\{a_n\}\{b_n\}$ 必收敛.

分析：两边夹法则.

解答：正确．否则 $\{a_n\}\{b_n\}$ 都发散，有 $0\leqslant b_n-x_n\leqslant b_n-a_n$，而 $b_n-a_n\to0$，由两边夹法则，$b_n-x_n\to0$.

【试题 1-2-3】（上海交通大学 2004 年）设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\dfrac{a}{2}$.

分析：利用两边夹法则.

证明：因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，所有对任意的 ε，存在 N，则对任意的 $n>N$，有 $|a_n-a|<\varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$，则

$$\frac{a_1+2a_2+\cdots+Na_N}{n^2}+\frac{(N+1+N+2+\cdots+n)(a-\varepsilon)}{n^2}\leqslant\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}\leqslant\frac{a_1+2a_2+\cdots+Na_N}{n^2}+\frac{(N+1+N+2+\cdots+n)(a+\varepsilon)}{n^2}$$

再由 $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 可知左右两侧的极限存在且相等，都等于 $\dfrac{a}{2}$.

引申：（华南师范大学 2005 年）设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$.

方法相同.

【试题 1-2-4】（清华大学 2001 年）设 $\mathbf{R}^n$ 中数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，满足 $a_{n+1}=b_n-qa_n$，$n=1,2,\cdots$，$0<q<1$. 证明：（1）若 $\{b_n\}$ 有界，则 $\{a_n\}$ 有界.（2）若 $\{b_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 一定收敛.

分析：利用数列有界及发散的定义.

证明：（1）由 $a_{n+1}=b_n-qa_n$ 知，$a_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-q)^k b_{n-k}+a_1(-q)^n$. 由此式及 $\{b_n\}$ 的有界性 $0<q<1$，即可知 $\{a_n\}$ 有界.

（2）由 $\{b_n\}$ 收敛知，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 m、$n>N$ 时，有 $|b_m-b_n|<\varepsilon$. 又由 $a_{n+1}=b_n-qa_n$，可得 $a_{m+1}-a_{n+1}=b_m-b_n-q(a_m-a_n)$，所以当 $m>n$ 时有

$$|a_m-a_n|\leqslant|b_{m-1}-b_{n-1}|+q|a_{m-1}-a_{n-1}|\leqslant\cdots\leqslant\sum_{k=1}^{n-N-1}|b_{m-k}-b_{n-k}|q^{k-1}+q^{n-N-1}|a_{m-n+N+1}-a_{N+1}|\leqslant 2\varepsilon+Mq^{n-N-1}$$

因此 $\{a_n\}$ 收敛.

【试题 1-2-5】（哈尔滨工业大学 2006 年）设 $x_n=\dfrac{\cos 1}{\mathrm{e}}+\dfrac{\cos 2}{\mathrm{e}^2}+\cdots+\dfrac{\cos n}{\mathrm{e}^n}$，按提示思路写出三种方法证明 $\{x_n\}$ 收敛.

1. Cauchy 收敛准则；2. 利用绝对收敛与一致收敛的关系；3. 利用 Dirichlet 判别法；4. 其他.

分析：考查数列收敛的方法.

证明：1. 利用 Cauchy 收敛准则. 对任意的 ε，存在 $N=\left[\ln\dfrac{1}{(1-\mathrm{e}^{-1})\varepsilon}\right]+1$，对任意的 n、$m>N$，有

$$|x_n-x_m|=\left|\frac{\cos(n+1)}{\mathrm{e}^{n+1}}+\frac{\cos(n+2)}{\mathrm{e}^{n+2}}+\cdots+\frac{\cos m}{\mathrm{e}^m}\right|\leqslant\left|\frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{e}^m}\right|<\frac{1}{\mathrm{e}^{m+1}(1+\mathrm{e}^{-1})}<\varepsilon$$

2. 利用级数收敛. 构造级数 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos k}{\mathrm{e}^k}$.

因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{\cos(n+1)}{\mathrm{e}^{n+1}}\Big/\dfrac{\cos n}{\mathrm{e}^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\cos(n+1)}{\mathrm{e}\cos n}\right|<1$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos n}{\mathrm{e}^n}$ 绝对收敛，即 $\{x_n\}$ 收敛.

3. 利用级数收敛的 Dirichlet 判别法. $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k\right|=\left|\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}\right|$ 有界，同时 $\{\mathrm{e}^{-n}\}$ 当 n 趋向无穷大时，单调递减且趋向 0.

【试题 1-2-6】（浙江大学 2006 年）证明：$x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ 收敛.

分析：利用级数收敛的必要条件.

证明：令 $a_n=x_n-x_{n-1}$，$n=1,2,\cdots$，不妨设 $x_0=0$，得到 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，故 $\{x_n\}$ 的收敛性与级数 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}a_i$ 的收敛性相同. 因为

$$a_n=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right),\ n=2,3,\cdots,\ 而\ \frac{1}{n}\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\leqslant\frac{1}{n-1},\ n=2,3,\cdots$$

故 $\sum a_n=\sum\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}\right)$ 为负项级数，利用错项相抵消的方法可知其收敛.

【试题 1-2-7】（四川大学 2005 年、天津大学 2004 年）设 $a_1>0$，$a_2>0$，$\cdots$，$a_n>0$，定义 $f(x)=\left(\dfrac{a_1^{\,x}+a_2^{\,x}+\cdots+a_n^{\,x}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$. 证

明：（1）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

分析：利用第二类重要极限，两边夹法则.

证明：（1）$f(x)=e^{\frac{1}{x}\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}}$，由 L' Hospital 法则

$$\lim_{x\to 0}f(x)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}\left(\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{n}\right)}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

（2）当 $x\to+\infty$ 时，令 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则 $\dfrac{A}{n^{\frac{1}{x}}}=\left(\dfrac{A^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant f(x)\leqslant A$.

由两边夹法则可知：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

引申：（北京理工大学 2005 年）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

通过上面的结论可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}$.

【试题 1-2-8】（华中科技大学 2005 年）设 $a_n>0$，$(n=1，2，\cdots)$，$\sum a_n=1$，$A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，求极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{A_n}-e^{A_{n-1}}}{A_n^{e}-A_{n-1}^{e}}$.

分析：Cauchy 中值定理在求极限中的应用.

解答：令 $f(x)=e^x$、$g(x)=x^e$，则 $f'(x)=e^x$、$g'(x)=ex^{e-1}$. 利用 Cauchy 中值定理可得

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{A_n}-e^{A_{n-1}}}{A_n^e-A_{n-1}^e}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(A_n)-f(A_{n-1})}{g(A_n)-g(A_{n-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{f'(\xi_n)(A_n-A_{n-1})}{g'(\xi_n)(A_n-A_{n-1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\xi_n}}{e(\xi_n)^{e-1}}=1,\ \xi_n\in(A_{n-1},A_n)$$

此处应用了 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 和 $\sum a_n=1$，因为 $\sum a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=1$，而 $\xi_n\in(A_{n-1},A_n)$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\xi_n=1$.

【试题 1-2-9】（浙江师范大学 2006 年）求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{6}\times\cdots\times\dfrac{2n-1}{2n}$

分析：利用第二类重要极限，两边夹法则.

解答：（1）

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$$

（2）由归纳假设法，$n=1$，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}>\dfrac{1}{2}$ 成立，假设 $n=k$，$\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}>\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\times\dfrac{2k-1}{2k}$，则

$$n=k+1,\ \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$，（因为 $(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$）

所以有 $0<\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{6}\times\cdots\times\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$，由两边夹法则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{6}\times\cdots\times\dfrac{2n-1}{2n}=0$.

【试题 1-2-10】（浙江师范大学 2004 年、2005 年）求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{-n^2}$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}$　　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}$，（$a\neq-1$）

分析：利用第二类重要极限和 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，（$|q|<1$）.

解答：（1）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n=\sqrt{6}$$（由 1-2-8 的结论）

（2）

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{-1}=e^{-1}$$

（3）因为 $1=\sqrt[n]{1}<\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}<\sqrt[n]{n}$，所以由两边夹法则可得极限为 1.

（4）
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{a^n}}=\begin{cases}1, & |a|>1\\ \frac{1}{2}, & a=1\\ 0, & |a|<1\end{cases}$$

【试题 1-2-11】（华南理工大学 2006 年）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}{\sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}}$.

分析：利用 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，（$|q|<1$）.

解答：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}{\sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{7\sqrt[n]{\left(\frac{3}{7}\right)^n+\left(\frac{5}{7}\right)^n+1}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}\right)}=\frac{1}{14}$$

【试题 1-2-12】（西安交通大学 2002 年）设有数列 $\{a_n\}:\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\cdots,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$，求 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$.

分析：考查上下极限的定义.

解答：上极限定义为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=a$，对任意的 ε，存在 N，当 $n>N$ 时，都有 $a_n<a+\varepsilon$．而对任意的 N，当 $n>N$ 时，都有 $a_n>a-\varepsilon$.

下极限定义为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=b$，对任意的 ε，存在 N，当 $n>N$ 时，有 $a_n>b-\varepsilon$，而对任意的 N，当 $n>N$ 时，都有 $a_n<b+\varepsilon$.

由上述定义可得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=1$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=0$.

【试题 1-2-13】（大连理工大学 2006 年、北京理工大学 2004 年）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

分析：利用定积分定义求极限.

解答：因为定积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}$ 可积，所以对任意分割，及 ξ_i 的任意取法，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在且相等．又因为
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+1}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$$

对于 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}$，分割可以选取等分法，$\xi_i$ 选为 $\frac{i}{n}$，所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2$$

【试题 1-2-14】（南京师范大学 2005 年、2006 年）求：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{n^{-2}}$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!\cos n}{a^{n!}}$ （$a>1$）.

分析：两边夹法则，级数收敛的必要性条件.

证明：（1）
$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{n^{-2}}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{n^{-2}\ln n!}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}{n^2}}$$

因为 $0<\dfrac{n\ln 1}{n^2}<\dfrac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}{n^2}<\dfrac{n\ln n}{n^2}\to 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{n^{-2}}=1$.

（2）令 $a_n=\dfrac{(2n)!}{a^{n!}}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{a^{n\cdot n!}}=0$ （$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$，（$a>1$，$k\in\mathbf{N}$）），故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!\cos n}{a^{n!}}=0$.

【试题 1-2-15】（中国地质大学 2006 年）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|=q$，（$q<1$），证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

分析：利用极限的定义和两边夹法则.

证明：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|=q$，（$q<1$），所以对任意的 ε，存在 N，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}-q\right|<\varepsilon$，$\varepsilon$ 任意小，使 $q-\varepsilon<1$，$q+\varepsilon<1$，则
$$0<|x_n|=\left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\cdots\frac{x_3}{x_2}\frac{x_2}{x_1}\right|=(q+\varepsilon)^{n-N}\left|\frac{x_N}{x_{N-1}}\cdots\frac{x_3}{x_2}\frac{x_2}{x_1}\right|\to 0\ \ (n\to\infty)$$