高职高专数学系列教材

概率论与数理统计

主编　易昆南

中南大学出版社

概率论与数理统计

概率论与数理统计

主　编　易昆南
副主编　李宏平　贺伟奇　涂得胜
主　审　肖果能

中南大学出版社

概率论与数理统计

主编　易昆南

□责任编辑　谢贵良

□出版发行　中南大学出版社

社址:长沙市麓山南路　邮编:410083

发行科电话:0731-8876770　传真:0731-8710482

电子邮件:csucbs @ public. cs. hn. cn

□经　　销　湖南省新华书店

□印　　装　核工业第25公司印刷厂

□开　　本　787×960 1/16　□印张 11.75　□字数 220千字

□版　　次　2004年4月第1版　□2004年4月第1次印刷

□书　　号　ISBN 7-81061-848-2/O·048

□定　　价　16.00元

前　言

当前，在经济体制改革和新技术革命挑战的形势下，我们迫切需要有一批高水平的专业配套的职业技术队伍，以加速实现技术现代化，管理现代化，提高经济效益。而大力加强职业技术教育，培养各类人才，编写一套面向高等专科教育、高等职业教育、成人高等教育的丛书是摆在我们面前的一项十分重要而又急迫的任务。

在生产斗争和科学实验中，我们所研究的对象常常具有随机性。概率统计是对随机现象的统计规律进行演绎和归纳的科学，因此它在现代科学技术中有着广泛的应用。学好本课程将有助于读者对现代科学技术中许多理论和方法的理解与掌握。

本册《概率论与数理统计》，按照教育部最新制定的《高职高专教育概率论与数理统计课程教学基本要求》，从高职高专教育及其工科教学的角度出发，在布局、选材、举例和编写形式上尽量适应高职高专程度学生的特点。取材与编排紧扣教学基本要求，突出重点，分散难点，强化应用，并注意理论与实际的结合。力求以崭新的面貌和通俗易懂的语言向读者介绍概率统计的基本概念、基本理论和基本方法。

本书的指导思想是：致力于培养和提高学生的数学素质、培养学生运用概率统计独特的思维方式分析问题和解决问题的能力，培养和提高学生学数学和用数学的兴趣，为后续课程的学习和未来的工作实践以及培养学生从事科学研究的能力，提供必备的随机数学基础，推动数学课程改革。

全书共分九章。概率论部分以建立数学模型入手，遵循由易到难、逐步加深的原则，使读者在学习中不知不觉完成了由古典概率到现代概率论的随机变量及其分布的过渡。第一章介绍概率论的最基本概念，即随机现象及其描述的方法。第二章引进了随机变量的概念，并介绍了用分布函数描述随机变量统计特性的方法。第三章讨论多维随机变量及其分布。运用发散思维，使多维情形看成一维情形的推广。第四章引入而包括矩在内的数字特征。第五章可以认为是概率论和数理统计的连接界面，介绍大数定律和中心极限定理。数理统计部分以讲清统计思想与统计方法，力求在阐明各种统计方法时，给出足够的问题背景和有关的数据，使学生对数理统计有一个系统、全面的认识，并培养学生对统计实践的兴趣。第六章介绍数理统计的基本概念和抽样分布。第七章介绍参数估计，第八章侧重介绍假设检验中的基本内容，对具体的统计方法，重点介绍在科技领域中有着广泛应用的分

布拟合与检验。第九章重点介绍单因素方差分析及一元回归分析。此外，对于在教材中先后出现又有内在联系的部分，适时加以归纳提炼；每章后给出小结。对于打 * 号的章节，包括相应的练习题，可供教师选讲或感兴趣的学生课外阅读．初学时可以跳过，也不作考试要求。本书各章后附有习题，对于较难的习题，书末列出了解答或提示。本书所列基本内容可以在 42 学时内完成．建议概率论部分大致安排 30 学时，数理统计部分大致安排 12 学时。

参加这套书编写工作的都是有经验的高等学校教师，本书融汇了他们多年的教学经验和心得体会，更鲜明地具有自学、辅导多用的特色。希望本书这些将有利于启发学生积极思考，引导学生掌握教材要点，促进数学修养的提高。本书第一、二、三、六章由易昆南执笔，第四章由李宏萍执笔，第五、九章由贺伟奇执笔，第七、八章由涂得胜执笔，全书由易昆南统稿，中南大学数学科学与计算技术学院肖果能教授担任主审。肖果能教授以严谨的治学态度认真审查了书稿，提出了很多有价值的意见和建议。此外，本书也得到了中南大学数学科学与计算技术学院名誉院长侯振挺教授关心与指导，得到了中南大学出版社的大力支持，编者在此表示衷心的感谢，同时，还感谢帮助过我们的同行和专家们。由于水平有限，诚恳地希望得到广大师生和读者的批评指正。

本书除了可供高职高专学生作教材外，也可供本科生及成人高等教育作参考书。

编者于 2004 年 2 月

目　录

大自然和人类社会气象万千。在自然界和人类社会中存在着本质上不相同的两类现象:确定性现象与随机现象。

在一定条件下必然发生或必然不发生的现象称为确定现象。例如,一个标准大气压下 100 ℃的水必然沸腾,两个带同性电荷的小球不可能相互吸引……

在一定条件下可能发生也可能不发生的现象称为随机现象。例如,掷一颗均匀的骰子,出现的点数可能是奇数,也可能是偶数;从一批产品中任取一个,可能是正品,也可能是次品;向远距离目标射击时,可能击中,也可能击不中;航天卫星发射,可能成功,也可能失败……

其实,我们每天都生活在一个神秘而又充满不确定因素的世界中,人们在生产斗争和科学实验中逐渐领悟到:在纷纭复杂的大量偶然现象背后,隐藏着必然的规律。例如,重复地掷一枚质地均匀对称的硬币,随着投币次数的增加,就会发现出现正面(约定为有徽花的一面)的次数约占投币总次数的一半。查看全国人口统计资料,就会发现新生婴儿中男孩与女孩的比率约为 1∶1。称这种规律性为随机现象的统计规律。

对于确定性现象,人们关心的是现象发生的条件;对于随机现象,人们关心的是现象发生的可能结果及各种结果发生的可能性大小。概率论是从宏观上了解随机现象规律的工具,是研究随机现象统计规律的数学分支。

第一章 随机事件与概率

研究随机现象的基本方法是建立数学模型。本章的思路是从古典概率、概率的统计描述入手,建立模型的框架。然后,深入讨论事件及其概率的性质和运算。

§1.1 概率论的基本概念

1.1.1 随机试验

想一想掷骰子的试验,它具有下面三个性质:

(1)试验的可能结果不止一个,但能事先明确实验的所有可能结果;

(2)每次试验前不能确定哪一个结果出现;

(3)试验可以在相同的条件下重复地进行。

称具有上述三个性质的试验为**随机试验**,简称为**试验**。

按照试验的描述,我们想要建立的模型应该包括下面三个组成部分:

(1)关于试验的全部基本结果的刻画;

(2)关于试验的一般结果的刻画;

(3)关于每个试验结果发生的可能性的刻画;下面我们将对前两个组成部分逐一进行讨论,关于第 3 个部分,我们放在 §2 和 §3 中介绍。

1.1.2 全体基本结果的集合(样本空间)

随机试验的基本结果称为**基本事件**(也称为**样本点**),全体基本事件组成的集合称为**样本空间**,通常记为 Ω。

例 1.1.1 掷两颗均匀的骰子,用(i,j)表示第一颗骰子出现的点数为 i,第二颗骰子出现的点数为 j,这个试验对应的样本空间为:

$$\Omega_1=\{(i,j)\mid 1\leqslant i\leqslant 6,1\leqslant j\leqslant 6\}$$

由于 Ω_1 中的每个有序对(i,j)在平面坐标系中对应一个点,故形象地称基本事件为样本点。这里,Ω_1 中包含 36 个样本点。

例 1.1.2 将一枚质地均匀的硬币抛掷两次,记次序。用(H,T)表示第一次抛掷出现正面(徽花朝上)第二次抛掷出现反面,(H,H),(T,H),(T,T)的意义可类推知。这个试验的样本空间为:

$$\Omega_2=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

例 1.1.3　记录某电话交换台每分钟内接到的呼唤次数。这个试验的样本空间为：

$$\Omega_3 = \{K | K = 0, 1, 2, \cdots, \}$$

例 1.1.4　从一批灯泡中任取一只，测试它的寿命。这个试验的样本空间为：

$$\Omega_4 = \{t | t \geqslant 0\}$$

观察上面的例子，可以看出，样本空间与基本事件具有下面三条性质：

(1) 完备性：即 Ω 包括了所有的基本事件，每次试验必然发生一个基本事件；

(2) 互斥性：任何两个基本事件不可能同时发生，每次试验只发生一个基本事件；

(3) 最简性：给定试验，基本事件不可再分，即它不能用更简单的试验结果表示。

1.1.3　随机试验的一般结果

试验的一般结果称为**随机事件**，简称为**事件**，常用大写的英文字母表示。事件是由若干基本事件组成的集合，故事件是样本空间的子集。例如，在例 1.1.1 的试验中，设 A = "两个骰子出现的点数之和为 7"，则：

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

其中任意一个基本事件发生都将导致 A 发生。因此，我们可以给出一个随机事件发生的一般性描述，即：事件 A 发生当且仅当它所包含的某个基本事件发生。

特别地，每次试验中一定不发生的事件称之为**不可能事件**。每次试验中一定发生的事件称之为**必然事件**。由于空集 ϕ 和样本空间 Ω 都是 Ω 的子集，因而也都是事件，这里，空集 ϕ 就是不可能事件。由样本空间的完备性，Ω 是必然事件。通常，不可能事件记为 ϕ，必然事件记为 Ω。

下面我们讨论事件之间的关系及运算。注意到基本事件是样本空间（集合）的元素，而随机事件是样本空间的子集，故事件之间的关系及运算本质上就是集合之间的关系与运算。

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，记为：$B \supseteq A$ 或 $A \subseteq B$（图 1.1.1）。

若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称事件 A，B **相等**，记为 $A = B$，此时 A 和 B 由完全相同的基本事件组成。

2. 事件的和

"事件 A 与事件 B 至少有一个发生"的事件称为事件 A 与事件 B 的**和**，记为：A

$\cup B$(图 1.1.2)。

类似地,称"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生"的事件为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和,记为:$A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$。

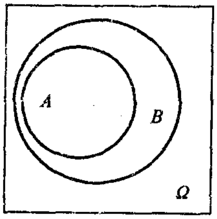

图 1.1.1

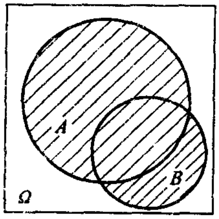

图 1.1.2

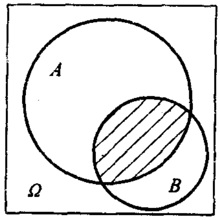

图 1.1.3

3. 事件的积

"事件 A 与事件 B 同时发生"的事件,称为事件 A 与事件 B 的积,记为 $A\cap B$ 或 AB(图 1.1.3)。

类似地,称"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"的事件为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积,记为 $A_1\cap A_2\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$。

4. 事件的差

"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件,称为事件 A 与事件 B 的差,记为 $A-B$(图 1.1.4)。

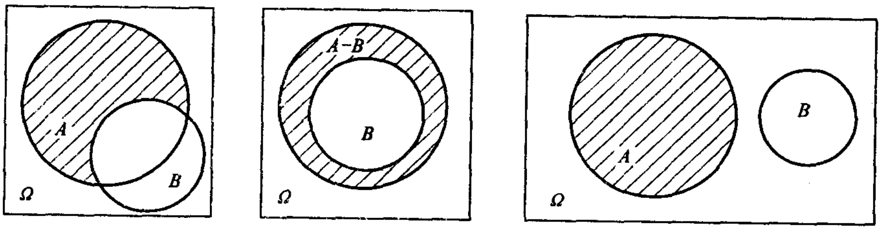

图 1.1.4

5. 事件互不相容

若事件 A 与事件 B 不可能同时发生,即 $AB=\phi$,则称事件 A 与事件 B **互不相容**。对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若其中任意两两互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为**两两互不相容**(图 1.1.5)。

6. 对立事件

在一次试验中,若事件 A 与事件 B 必有的一个发生,且仅有一个发生,即 A 与

B 同时满足：

$$\begin{cases} AB = \phi \\ A \cup B = \Omega \end{cases}$$

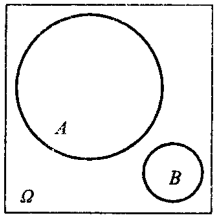

图 1.1.5

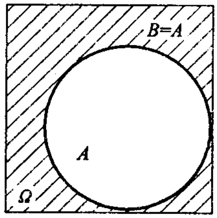

图 1.1.6

见图 1.1.6，则称事件 A 与事件 B **互为对立事件**，记作 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$。常记 A 的**对立事件为** $\overline{A}$。

由事件差的定义可知：

$$\overline{A} = \Omega - A$$

由对立事件和事件积的运算定义可知：$A - B = A\overline{B}$。

由集合的运算规律可知事件的运算满足以下规律。

交换律：$A\cup B = B\cup A, A\cap B = B\cap A$

结合律：$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

$(AB)C = A(BC)$

分配律：$(A\cup B)C = AC\cup BC$

摩根律：$\overline{A\cup B} = \overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB} = \overline{A}\cup\overline{B}$

推广到 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

将事件与集合的概念与运算列表对照如下：

表 1.1.1

概率论		集合论
样本空间	Ω	全集
（必然事件）	随机试验的所有基本结果	
样本点	ω	Ω 的元素
（基本事件）	随机试验的基本结果	
事　件	A	Ω 的子集
对立事件	$\overline{A}$（A 不发生）	A 的补集
不可能事件	$\varnothing$	空集
事件的和	$A\cup B$（A,B 至少有一个发生）	A,B 的并
事件的积	$A\cap B$（A,B 同时发生）	A,B 的交
事件的差	$A-B$（A 发生而 B 不发生）	A 与 B 的差
互不相容	$A\cap B=\phi$（A,B 不同时发生）	A,B 互不相交
包　含	$A\subseteq B$（A 发生必导致 B 发生）	B 包含 A

例 1.1.5　设 A,B,C 为三个事件，试用 A,B,C 表示下列事件：

A_1：A 发生而 B,C 不发生；

A_2:A,B,C 都发生；

A_3:A,B,C 都不发生；

A_4:A,B,C 恰有一个发生；

A_5:A,B,C 至少有一个发生；

A_6:A,B,C 不都发生。

解 $A_1=A\bar{B}\bar{C},A_2=ABC,A_3=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

$A_4=A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$

$A_5=A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC=A\cup B\cup C=\Omega-\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

$A_6=\overline{ABC}$

§1.2 古典概率

古典概率的计算要涉及到计数，而组合学中的乘法原理，加法原理以及排列组合的基本公式都是这些计数的有效工具。

1.2.1 乘法原理

例 1.2.1 某栋办公楼，一楼到二楼有两个楼梯，二楼到三楼有三个楼梯。问由一楼到三楼总共有多少种不同的走法？

解 共有 $N=2\times3=6$ 种不同走法。

一般地，我们有如下的**乘法原理**：

完成一件事，须经 n 个步骤，而第 i 个步骤具有 m_i 种不同的方法($i=1,2,\cdots,n$)，则完成这件事共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法。

1.2.2 加法原理

例 1.2.2 从长沙到武汉，一天内乘飞机有 2 个航班，乘火车有 9 趟火车，坐汽车有 4 班汽车，坐轮船有 3 趟轮船。问由长沙到武汉共有多少种不同方法？

解 共有 $N=2+9+4+3=18$ 种不同方法。

一般地有如下的**加法原理**：

完成一件事，有 n 类不同的方法，而第 i 类方法中又有 m_i 种不同方法($i=1,\cdots,n$)，则完成这件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同方法。

1.2.3 选排列与全排列

例 1.2.3 从 3 个人中选一正、一副两个组长。问有多少种不同选法？

解 分两步。第一步选定正组长，共有 3 种方法；第二步，余下的 2 人中，再选

一个副组长，有 2 种方法。由乘法原理，共有 $3\times2=6$ 种不同的方法。

一般地，从 n 个不同元素中，取 m 个（$1\leqslant m\leqslant n$）不同元素，按某种次序排成一列，称为从 n 个不同元素中取 m 个的**选排列**，不同的选排列的个数称为**选排列数**，记为 P_n^m，由乘法原理可知：

$$P_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-m+1)$$

当 $m=n$ 时，称 P_n^n 为 n 个元素的**全排列数** $P_n^n=n!$

1.2.4　有重复的排列

从 n 个不同的元素中，抽取 m 个，每个元素可重复抽取，依次排成一列，称为**有重复的排列**，由乘法原理可知，其有重复排列的种数为 n^m。

1.2.5　组合

例 1.2.4　从 3 个人中选 2 个组长而不分正副，问有多少种不同方法？

解　考虑从 3 个人中选一正、一副两个组长的问题，我们分两步走：第一步选 2 个组长不分正副，所具有的方法数记为 C_3^2，第二步由选定的 2 个组长确定正副，共有 $2!$ 种方法。由乘法原理共有 $C_3^2\cdot 2!$ 种方法。另由例 1.2.3 知，从 3 人中选一正、一副两个组长应有 $P_3^2=3\times2$ 种不同选法，所以应有 $P_3^2=C_3^2\cdot2!$，即：

$$C_3^2=\frac{P_3^2}{2!}=\frac{3!}{(3-2)!\ 2!}$$

一般地，我们有：

从 n 个不同元素中取 m 个放在一块，共有种数为：

$$C_n^m=\frac{n!}{(n-m)!\ m!}$$

1.2.6　古典概率

我们关注的是在一个试验中，事件 A 发生的可能性大小，而概率论早期所遇到的试验通常与抛铜币、掷骰子和抽纸牌有关。这类试验且有如下的特征：

（1）只有有限个互斥的可能结果（基本事件）；

（2）每个可能结果（基本事件）发生的可能性相同。

称满足上述特征的试验为**古典概型试验**。

设古典概型试验的样本空间共有 n 个基本事件，事件 A 包含其中 k 个基本事件，A 发生的可能性大小记为 $P(A)$，则有：

$$P(A)=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{k}{n}\tag{1.2.1}$$

称之为**古典概率**。

例 1.2.5 袋中有 3 个白球,2 个黑球。从中取两次,每次随机取一个球,就有放回或不放回两种情形。求:

(1)取到的两个球都是白球的概率;

(2)取到的两个球恰有一个是白球的概率。

解 设 A =“取到的两球都是白球”,B =“取到的两球恰有一个是白球”。

有放回的情形:有放回的两次抽取对应于有重复的排列。

$$P(A)=\frac{3^2}{5^2}=\frac{9}{25},P(B)=\frac{3\times2+2\times3}{5^2}=\frac{12}{25}$$

无放回的情形:无放回的两次抽取对应于选排列。

$$P(A)=\frac{P_3^2}{P_5^2}=\frac{3}{10},P(B)=\frac{3\times2+2\times3}{P_5^2}=\frac{3}{5}$$

又解 若把无放回的两次抽取看作是一次抽取两个,则对应为组合问题。

$$P(A)=\frac{C_3^2}{C_5^5}=\frac{3}{10},P(B)=\frac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$$

容易验证古典概率具有如下性质:

(1)A 为任意事件,$0\leqslant P(A)\leqslant1$;

(2)Ω 为样本空间,$P(\Omega)=1$;

(3)$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互不相容事件,则有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$。

例 1.2.6 乐透型福利彩票 35 选 7 方案规定,由 1 ~ 35 个号码球中摇出 7 个号码。投注者从 1 ~ 35 个号码中选 7 个组成一注(号码不可重复)。当单注号码与中奖号码有 $8-i$ 个相符时,确定其中奖等级为 i 等奖(不考虑号码顺序,$i=1,\cdots,5$),规定单注已得到高级别奖项就不再兼得低级别的奖。求彩民购买一注彩票:

(1)中一等奖的概率;

(2)至少中一个奖项的概率。

解 设 A_i =“买一注彩票中 i 等奖”,$i=1,2,\cdots,5$;B =“买一注彩票至少中一奖”。

(1)$P(A_1)=\dfrac{1}{C_{35}^7}=1.4871\times10^{-7}$;

(2)由 $A_1,\cdots,A_5$ 两两互不相容。

$$P(A_i)=\frac{C_7^{8-i}\cdot C_{35-7}^{7-(8-i)}}{C_{35}^7}=\frac{C_7^{8-i}\cdot C_{28}^{i-1}}{C_{35}^7},\quad i=1,\cdots,5$$

$$P(B)=P(\bigcup_{i=1}^{5}A_i)=\sum_{i=1}^{5}P(A_i)=\sum_{i=1}^{5}\frac{C_7^{8-i}\cdot C_{28}^{i-1}}{C_{35}^{7}}=0.1248$$

例 1.2.7　将 n 个人随机地分到 N 间房中去，每个房间能容纳的人数是没有限制的。求下面事件的概率。

A =“指定的 n 间房其中各有一个”

B =“恰有 n 间房其中各有一人”

C =“指定的一间房其中恰有 m 个人”

解　(1)由乘法原理，共有 N^n 种不同分法，而指定的 n 间房其中各有一个为 n 个人的一个全排列，故有：$P(A)=\frac{n!}{N^n}$。

(2)首先，由 N 间房中选定 n 间房有 C_N^n 种方法，再向选定的 n 间房中各分一个有 $n!$ 种分法，由乘法原理，B 事件发生记数为 $C_N^n\cdot n!$

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}=\frac{P_N^n}{N^n}$$

(3)由 n 个人中选定 m 个人分到指定的那间房有 C_n^m 种分法，将剩余的 $n-m$ 个人按要求分到剩下的 $N-1$ 间房中去，有 $(N-1)^{n-m}$ 种分法，由乘法原理，有

$$P(C)=\frac{C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\cdot\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-m}$$

§1.3　随机试验的数学模型

1.3.1　频率

古典概型的局限性在于要求每一基本事件在试验中发生的可能性相同。要了解随机事件 A 发生的可能性大小，我们考虑 n 次重复试验。记 n_A 为 n 次试验中事件 A 发生的次数，称为 A 发生的**频数**。记 $f_A=\frac{n_A}{n}$，称为 A 发生的**频率**。容易证明，频率也具有古典概率相同的性质：

(1)非负性：　$0\leqslant f_A\leqslant 1$；

(2)正规性：　$f_\Omega=1$；

(3)可加性：若 $AB=\varnothing$，则 $f_{A\cup B}=f_A+f_B$。

频率蕴含着该事件发生可能性大小的内在规律。为了揭示这个规律，人们做了大量的重复试验。例如，历史上有人做过掷一枚质地均匀硬币的试验，结果发现，试验次数足够大时，正面出现的频率在大多数情形下稳定在常数 0.5 的附近