数学分析中的方法与技巧

严子谦　尹景学　张　然

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

数学分析中的方法与技巧

严子谦　尹景学　张　然

高等教育出版社

内容提要

本书是为适应高等学校数学学科教学改革的需要，结合编者多年来教学实践的经验和体会编写而成。主要围绕极限、级数、不等式和中值定理等专题，通过大量例题，介绍数学分析中的常用方法和基本技巧。内容包括作为数学分析理论基础的实数理论、求解数列极限的若干典型求法、函数的极限与连续性、微分和积分中值定理、数项级数、函数项级数、不等式、变分法、函数的逼近与开拓以及代数中的分析方法等。每节后配备适量习题，其中难度较大的题目用 * 号加注。

本书可作为数学分析课程的辅助教材。对正在学习数学分析的读者，学过数学分析或高等数学准备学习后继课程的读者，以及准备报考研究生的读者都会有所帮助。另外，还可供青年教师使用和参考。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析中的方法与技巧/严子谦，尹景学，张然.
—北京：高等教育出版社，2009.1
ISBN 978-7-04-024895-1

Ⅰ.数… Ⅱ.①严…②尹…③张… Ⅲ.数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 176658 号

策划编辑 张长虹 **责任编辑** 张长虹 **封面设计** 于 涛
责任绘图 黄建英 **版式设计** 王艳红 **责任校对** 刘 莉
责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2009 年 1 月第 1 版
印 张	14.5	印 次	2009 年 1 月第 1 次印刷
字 数	260 000	定 价	18.60 元

物料号 24895-00

前　言

本书是国家理科基地创名牌课程项目的成果之一，是为数学与应用数学、信息与计算科学专业本科生在数学分析方面的巩固提高和考研准备之需而编写的。

近十多年来，我们为吉林大学数学学院的本科生开设了一门与本书同名的选修课，积累了一些资料。在教学实践中，我们不断总结经验，适时调整内容的选取与组织，逐步形成了目前呈现在读者面前的这本书。关于它，谨作以下几点说明：

(一) 为了帮助学生提高数学推理的能力，了解数学分析的基石，欣赏数学逻辑的美妙，我们认为，介绍严密的实数理论是十分必要的。至于如何建立这一理论，有多种现成的方法可供选择。我们在本书中没有套用成法，而是直接用“无限小数”来定义实数，以便与中学数学相衔接。按照这个定义，我们首先引进“序”和“确界”的概念，进而证明确界原理。在此基础上便可较为方便而合理地定义实数的四则运算，完成实数理论的建构。

(二) 本书的主要部分是围绕数列和函数的极限、数项级数的收敛性、函数序列和函数项级数的收敛域与一致收敛性、微分和积分中值定理以及不等式等专题，通过大量举例，介绍数学分析中的经典例题、常用方法与基本技巧，并配置了相当数量的习题。实践证明，这些内容和渗透其中的思想方法与计算技巧，对于学生在数学分析方面的素质提高和考研都是大有裨益的。

(三) 本书将传统的数学分析领地稍微作了一些扩张，简要地介绍了变分法、函数的逼近与开拓以及代数中的分析方法，目的在于扩大学生的视野，使之较为顺利地过渡到相关课程的学习，获得进一步的提高。

(四) 本书的各章是相互独立的。取舍与顺序的先后，使用者都可以自主决定。

借此书出版之机，编者对王春朋教授和金春花博士表示衷心的感谢，他们对本书的最后定稿提出了许多宝贵的建议。感谢彭营营、钟昆华、刘嫒嫒、王林君、张超、李玉田和赵克等研究生，他们对本书初稿的排版付出了大量辛勤的劳动。还要感谢吉林大学数学学院基地班的部分同学，他们阅读了本书的初稿，提供了许多有价值的参考意见。我们还要特别感谢高等教育出版社的王瑜、张长虹等有关同志，感谢他们为本书的最后出版所付出的辛劳。

编　者

2008 年秋于长春

目　　录

第一章　实数理论

实数的基本理论是分析数学的根基. 实数的定义, 或者说实数的构造, 有几种经典的方式, 如 Dedekind 对有理数的分割方法, Cantor 的基本有理数列方法等. 本章直接采用更直观的实数的无限小数表示方法来介绍实数的基本概念和基本运算, 并讨论实数的基本性质.

§1　实数的基本概念

人们对于数的认识是从正整数 $1,2,3,\cdots$ 开始的. 我们用 $\mathbb{N}^*$ 来表示全体正整数所构成的集合. 正整数集对于加法和乘法运算是封闭的, 即如果 $a,b\in\mathbb{N}^*$, 则 $a+b\in\mathbb{N}^*$, $ab\in\mathbb{N}^*$. 然而, 作为加法逆运算的减法, 以及作为乘法逆运算的除法在正整数集中并不总是可能的. 例如, 从 1 减去 2 或者用 2 来除 1 所得的结果均不再属于正整数集. 为了使这些运算能够进行下去, 人们又提出了数 0,"负"整数和分数的概念, 并把补充后的这些数的全体, 称为有理数集, 记为 $\mathbb{Q}$.

有理数总可以写为 $\dfrac{p}{q}$ 的形式, 其中 p 和 q 都是整数, $q>0$, 且 p 和 q 没有大于 1 的公因子, 或说 p,q互素. 在有理数集内, 加法、乘法、减法和除法 (用零作除数除外) 都能够进行, 而且得到的仍然是有理数. 因此, 有理数集对于四则运算是封闭的.

1.1　无理数的存在

我们看下面的简单例子, 它最初是公元前 500 年前后, 古希腊 Pythagoras 学派的弟子 Hippasus 发现的.

例 1.1　边长为 1 的正方形的对角线的长度 x 不能表示成有理数.

证明　用反证法. 如果 x 是有理数, 则由勾股定理有 $x^2=2$, 且 x 可以表成既约分数的形式

$$x=\frac{m}{n}.$$

因此,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=2.$$

于是 $m^2 = 2n^2$. 这表明 m 是一个偶数, 可以表成 $m = 2k$ 的形式, 其中 k 是自然数. 因此, $4k^2 = m^2 = 2n^2$, 即 $n^2 = 2k^2$, 故 n 也是一个偶数. 这和 m, n 互素矛盾. □

上面的例子向人们揭示了有理数集的缺陷, 即它不能同连续的无限直线同等看待. 在数轴上与上述正方形对角线长相对应的点是有理数所没有分布到的"孔隙". 实际上数轴上存在相当多的不能用有理数表示的"孔隙". 那么这样的数应该如何表示呢? 下面就来讨论这个问题.

1.2 无限小数的概念

我们先从有限小数谈起. 如果一个有理数 x 可以表成如下形式

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_i}{10^i} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

其中 a_0 为整数 (可以为正整数、负整数或零), $a_i\,(i = 1, \cdots, n)$ 为介于 0 和 9 之间的整数, 则称 x 为有限小数. 通常, 我们可将 x 表示成

$$x = a_0 + 0.a_1 a_2 \cdots a_n.$$

当整数部分 $a_0 = 0$ 时, 称 x 为纯小数, 而当整数部分 $a_0 \neq 0$ 时, 称 x 为带小数. 所有整数都可以表成上述形式, 只是小数部分为零. 因此, 我们也将整数称为有限小数.

称形如

$$x = a_0 + 0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$$

的数为无限小数. 若存在自然数 r 和 k_0, 使得

$$a_{k_0+jr+i} = a_{k_0+i} \quad (i = 1, 2, \cdots, r;\ j = 1, 2, \cdots),$$

则称 x 为无限循环小数. 任何有限小数都可以看成是无限循环小数, 只要形式地在后面补充零就可以了.

下面讨论有理数和无限小数之间的关系. 首先, 我们有如下命题

命题 1.1 任何有理数都可以表成无限循环小数.

证明 设 x 为有理数, 且不妨设 $x > 0$. 则 x 可表成既约分数 $x = \frac{a}{b}$. 先将 b 作如下分解:

$$b = 2^\lambda 5^\mu b_1,$$

其中 $2 \nmid b_1$, $5 \nmid b_1$. 此处 $\alpha \nmid \beta$表示 β 不能被 α 整除. 令 $n = \lambda + \mu$, 于是

$$x = \frac{a}{2^\lambda 5^\mu b_1} = \frac{2^\mu 5^\lambda a}{10^n b_1}.$$

再取整数 x_0 和 a_1, 使得

$$\frac{2^\mu 5^\lambda a}{b_1} = x_0 + \frac{a_1}{b_1}, \qquad a_1 < b_1.$$

不难看出 $\frac{a_1}{b_1}$ 也是既约分数. 因此

$$x = \frac{x_0}{10^n} + \frac{a_1}{b_1}\frac{1}{10^n}.$$

我们断言, 必存在 $r \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{N}^*$ 和 $c < 10^r$, 使得

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{c}{10^r} + \frac{a_1}{b_1}\frac{1}{10^r},$$

即 $\frac{a_1}{b_1}$ 生成长度为 r 的以 c 为循环节的无限小数. 为此只须证明

$$a_1(10^r - 1) = b_1 c.$$

由于 $b_1 \nmid a_1$, 这又只须证明

$$b_1 | (10^r - 1).$$

事实上, 如果取 $m > b_1$, 则存在自然数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_m$, $0 \leqslant \beta_i < b_1$, 使得

$$\begin{aligned}
10^1 - 1 &= b_1\alpha_1 + \beta_1, \\
10^2 - 1 &= b_1\alpha_2 + \beta_2, \\
10^3 - 1 &= b_1\alpha_3 + \beta_3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
10^m - 1 &= b_1\alpha_m + \beta_m.
\end{aligned}$$

根据抽屉原理, $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 中至少有两个相等. 设 $\beta_{m_1} = \beta_{m_2}$, 且 $m_2 > m_1$. 则

$$10^{m_2} - 1 - b_1\alpha_{m_2} = 10^{m_1} - 1 - b_1\alpha_{m_1}.$$

从而

$$10^{m_1}(10^{m_2 - m_1} - 1) = b_1(\alpha_{m_2} - \alpha_{m_1}).$$

令 $r = m_2 - m_1$, 再由 $2 \nmid b_1$, $5 \nmid b_1$, 则 $b_1 \nmid 10^{m_1}$, 于是 $b_1 | (10^r - 1)$. 命题证完. □

命题 1.1 的逆命题也正确, 即下述命题成立.

命题 1.2 任何无限循环小数都是有理数.

证明 设 x 是无限循环小数, 且不妨设 $x>0$. 首先将 x 分解为循环前部分和循环部分

$$x=\frac{x_0}{10^n}+\frac{\widetilde{x}}{10^n},\qquad n\in\mathbb{N}^* \tag{1.1}$$

其中 $\widetilde{x}$ 生成 x 的循环部分, 即存在自然数 k,c, 其中 $c<10^k$, 满足

$$\widetilde{x}=\frac{c}{10^k}+\widetilde{x}\frac{1}{10^k}.$$

于是 $\widetilde{x}=\dfrac{c}{10^k-1}$. 代入 (1.1), 得

$$x=\frac{x_0(10^k-1)+c}{10^n(10^k-1)}.$$

这表明 x 为有理数. 命题证完. □

1.3 实数的定义

定义 1.1 无限非循环小数称为无理数, 有理数与无理数统称为实数. 实数集记为 $\mathbb{R}$. 对于形如

$$x=a_0+0.a_1a_2\cdots a_n\cdots \tag{1.2}$$

的实数 x, 由

$$x_n=a_0+0.a_1a_2\cdots a_n$$

所构成的数列称为实数 x 的生成数列. (1.2) 右端称为实数 x 的表示.

我们知道, 有理数可以进行四则运算, 且有理数集在这个四则运算下是封闭的. 那么作为有理数集扩张的实数集, 我们也需要给出四则运算的定义并讨论在这个运算下的封闭性. 然而, 在此之前我们需要先定义实数的序.

定义 1.2 设 x,y 为两个实数, 它们的生成序列分别为 $\{x_n\},\{y_n\}$. 如果

$$|x_n-y_n|\leqslant\frac{1}{10^n},\quad n=1,2,\cdots$$

则称 x 等于 y, 记为 $x=y$.

如果存在正整数 N, 使得

$$x_N>y_N+\frac{1}{10^N},$$

则称 x 大于 y 或 y 小于 x, 记为 $x>y$ 或 $y<x$.

按照上述实数序的定义, 下面两个无限小数就是同一个数:

$$x = 0.099\,9\cdots, \tag{1.3}$$

$$y = 0.100\,0\cdots. \tag{1.4}$$

这是因为, 它们的生成序列满足

$$0 < y_n - x_n \leqslant \frac{1}{10^n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

这表明, 同一个实数可以有两种不同的无限小数表示, 因而不能简单地通过比较无限小数在每个位上的数的大小来规定它们的大小.

命题 1.3 设 x 为 $\{x_n\}$ 生成的无限小数. 则 $x_n \leqslant x(n = 1, 2, \cdots)$.

证明 用反证法. 假设存在正整数 k, 使得

$$x_k > x.$$

由序的定义, 存在 $N > k$, 使得

$$x_k - x_N > \frac{1}{10^N},$$

故

$$\frac{1}{10^N} < x_k - x_N \leqslant 0.$$

矛盾. □

命题 1.4 设 x 为 $\{x_n\}$ 生成的无限小数, α 为有限小数, 且 $x_n \leqslant \alpha$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 则 $x \leqslant \alpha$.

证明 用反证法. 假设 $x > \alpha$, 则由定义 1.2, 存在正整数 N, 使得

$$x_N > \alpha + \frac{1}{10^N},$$

与命题矛盾. □

注 1.1 上述命题对 α 为无限小数时也成立. 证明留给读者.

命题 1.5 设 x, y 为两个实数, 它们的生成序列分别为 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$. 如果对任何自然数 n, 都有

$$x_n \leqslant y_n,$$

则 $x \leqslant y$.

证明 用反证法. 假设 $x > y$, 则由定义 1.2, 存在正整数 N, 使得

$$x_N > y_N + \frac{1}{10^N},$$

矛盾. □

关于实数的序关系, 我们还有如下的两条重要性质:

性质一 (三岐性) 对任意给定的 $x, y \in \mathbb{R}$ 有且仅有下列关系之一成立:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

性质二 (传递性) 若 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 且 $x < y, y < z$, 则 $x < z$.
其证明留做习题.

例 1.2 边长为 1 的正方形的对角线的长度 x 可以表示成无限小数.

证明 我们先来构造 x 的生成序列. 设 $a_0 = 1$. 则 a_0 满足

$$1 = a_0^2 < 2 < (a_0 + 1)^2 = 4.$$

在有限集合 $\left\{a_0 + \frac{k}{10}; k = 0, 1, \cdots, 9\right\}$ 中选取唯一的一个数 x_1, 使 x 满足

$$x_1^2 < 2 < \left(x_1 + \frac{1}{10}\right)^2,$$

并记 $a_1 = 10(x_1 - a_0)$. 一般地, 应用数学归纳法, 我们可以找到

$$x_n = a_0 + 0.a_1 a_2 \cdots a_n,$$

满足

$$x_n^2 < 2 < \left(x_n + \frac{1}{10^n}\right)^2.$$

令

$$x = a_0 + 0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots.$$

由 x_n 的取法, 我们有

$$0 < 2 - x_n^2 < \left(x_n + \frac{1}{10^n}\right)^2 - x_n^2 = \frac{2x_n + 10^{-n}}{10^n} < \frac{5}{10^n}.$$

因此, x 是由 $\{x_n\}$ 生成的无限小数. □

命题 1.6 只有有限小数具有两个生成序列.

证明 设实数 a 具有两个生成序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, $x_n = a_0 + 0.\,a_1a_2\cdots a_n$, $y_n = b_0 + 0.b_1b_2\cdots b_n$ 设 x_N, y_N 为第一个不同的项, 且不妨设 $x_N > y_N$. 由无限小数相等定义, 有

$$x_N - y_N \leqslant \frac{1}{10^N}.$$

故

$$x_N = y_N + \frac{1}{10^N}.$$

我们断言对任给 $n > N$

$$a_n = 0, \quad b_n = 9.$$

下面我们就来证明上述断言, 先证对任给 $n > N$, $a_n = 0$. 用反证法. 设有 $K > N$, 使 $a_K \geqslant 1$. 则

$$x_K - y_K \geqslant x_N + \frac{1}{10^K} - y_K = y_N + \frac{1}{10^N} + \frac{1}{10^K} - y_K > \frac{1}{10^K}.$$

故 $x > y$, 矛盾.

类似可证对任给 $n > N$, 有 $b_n = 9$. □

通过以上讨论可知, 尽管实数可能有两种表示, 但只有有限小数才具备这样的表示, 对无理数来说, 其无限小数表示是唯一的. 注意到这一点, 今后在讨论作为有理数的扩展的无理数的各种运算来说是非常方便的.

1.4 确界原理

由于无限小数所特有的无限性, 它们之间的四则运算就不像有限小数那样简单. 为此, 我们还要做一点准备, 即引入确界的概念, 并证明著名的确界原理.

定义 1.3 称数集 $E \subset \mathbb{R}$ 是上方有界的, 如果存在 $M \in \mathbb{R}$, 使对每个 $x \in E$, 都有 $x \leqslant M$. 这时, 我们称 M 为 E 的一个上界.

用类似的方法可以定义数集的下方有界性和下界.

定义 1.4 设 E 是有界数集. 称 $h \in \mathbb{R}$ 为 E 的上确界, 如果它满足如下条件:

(i) h 是 E 的上界;

(ii) 任何小于 h 的, $s \in \mathbb{R}$, 都不是 E 的上界.

我们将 E 的上确界 h 记作 $\sup E$, 即 $h = \sup E$.

从定义可以看出, 上确界就是最小的上界. 类似地可以定义有下界集合 E 的下确界为 E 的最大下界, 记为 $\inf E$.

作为实数理论的基础, 我们陈述并证明著名的确界原理.

定理 1.1 (确界原理) $\mathbb{R}$ 中任何非空的有下 (上) 界的数集 E 都有下 (上) 确界.

证明 不妨设 E 有下界 m, 且 m 为正整数, 我们来证明 E 有下确界. 设 $a \in E$, M 为大于 a 的一个整数. 于是 $\{m, m+1, \cdots, M-1\}$ 中至少有一个数是 E 的下界, 记其最大者为 a_0. 这时 a_0+1 不再是 E 的下界. 进一步, 集合 $\left\{a_0+\dfrac{k}{10};\ k=0,1,\cdots,9\right\}$ 中至少有一个数是 E 的下界, 记其最大者为 $a_0+\dfrac{a_1}{10}$. 这时 $a_0+\dfrac{a_1+1}{10}$ 不再是 E 的下界. 如此继续进行下去, 我们得到序列

$$x_n = a_0 + 0.a_1a_2\cdots a_n, \quad n=1,2,\cdots.$$

它的每一项 x_n 都是 E 的下界, 但 $x_n+\dfrac{1}{10^n}$ 不是 E 的下界. 设 μ 是由 x_n 生成的实数. 一方面, 对任何 $y \in E$,

$$x_n \leqslant y, \quad n=1,2,\cdots,$$

由实数的保序性, 即命题 1.4, 可知 $\mu \leqslant y$, 即 μ 为 E 的一个下界.

另一方面, 对任何 $\lambda > \mu$, 存在 N, 使得

$$y_N > x_N + \frac{1}{10^N},$$

其中 $\{y_n\}$ 是 λ 的生成序列, 故

$$\lambda \geqslant y_N > x_N + \frac{1}{10^N}.$$

由 $x_N+\dfrac{1}{10^N}$ 不是下界可知 λ 也不是下界. 所以 $\mu = \inf E$. 定理证完. □

习 题

1. 设 x 为 $\{x_n\}$ 生成的无限小数, α 为无限小数, 且 $x_n \leqslant \alpha (n=1,2,\cdots)$. 则 $x \leqslant \alpha$.

2. 证明本节所述关于实数序关系的性质一、性质二.

§2 实数的四则运算

由于有限小数的生成序列并不唯一, 在下面所给出的所有定义中, 我们对涉及有限小数的运算总是选取 "较大" 的生成数列, 尽管我们可以证明这些运算并不依赖于生成序列的选取.

定义 2.1 (加法) 设 x,y 是分别由 $\{x_n\},\{y_n\}$ 生成的实数. 定义

$$x+y=\sup\{x_n+y_n\}.$$

利用确界原理, 我们还可以给出一个实数的相反数的定义.

定义 2.2 设 x 是由 $x_n=a_0+0.a_1a_2\cdots a_n$ 生成的实数. 定义

$$y_n=-a_0-1+0.b_1b_2\cdots b_n$$

其中

$$0.a_1a_2\cdots a_n+0.b_1b_2\cdots b_n=1-\frac{1}{10^n},$$

则称 $\{y_n\}$ 生成的实数为 x 的相反数, 记为 x.

命题 2.1 对于任意实数 x, 都有 $x+(-x)=0$.

证明 由定义有

$$x+(-x)=\sup\{x_n+y_n\}=\sup\left(-\frac{1}{10^n}\right)=0. \qquad \square$$

定义 2.3 (减法) 对于任意两个实数, x,y 定义 $x-y=x+(-y)$.

定义 2.4 (乘法) 设 $x,y\in\mathbb{R}$.

(i) 若 x,y 中有一个为零, 定义 $xy=0$;

(ii) 若 $x>0,\ y>0$, 定义 $xy=\sup\{x_ny_n\}$, 其中 $\{x_n\},\{y_n\}$ 分别是 x,y 的生成数列;

(iii) 若 $x>0,\ y<0$, 定义 $xy=-[x\cdot(-y)]$; 若 $x<0, y>0$, 定义 $xy=-[(-x)\cdot y]$; 若 $x<0,y<0$, 定义 $xy=(-x)\cdot(-y)$.

一般将 $x\cdot y$ 简记为 xy.

定义 2.5 (倒数) 设 $x\neq 0$ 是由 $\{x_n\}$ 生成的实数. 若 $x>0$, 定义 $\dfrac{1}{x}=\inf\dfrac{1}{x_n}$; 若 $x<0$, 定义 $\dfrac{1}{x}=-\left(\dfrac{1}{-x}\right)$.

命题 2.2 对于任意实数 $x\neq 0$, 都有 $x\cdot\dfrac{1}{x}$.

证明 不妨设 $x>0$, 其生成序列为

$$x_n=a_0+0.a_1a_2\cdots a_n,$$

则

$$a_0\leqslant x_n\leqslant a_0+1.$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$, 由确界定义, 存在正整数 N, 使得

$$x_N>x-\varepsilon,\quad \frac{1}{x_N}<\frac{1}{x}+\varepsilon.$$

再由 $\{x_n\}$ 的单调性, 有对任给 $n>N$,

$$x<x_n+\varepsilon,\ \frac{1}{x}>\frac{1}{x_n}-\varepsilon.$$

因此

$$x\cdot\frac{1}{x}<(x_n+\varepsilon)\frac{1}{x_n}=1+\frac{\varepsilon}{x_n}\leqslant 1+\frac{\varepsilon}{a_0},$$

$$x\cdot\frac{1}{x}>x_n\left(\frac{1}{x_n}-\varepsilon\right)=1-\varepsilon x_n\geqslant 1-(a_0+1)\varepsilon.$$

即

$$1-(a_0+1)\varepsilon<x\cdot\frac{1}{x}<1+\frac{\varepsilon}{a_0}.$$

由 ε 的任意性可知 $x\cdot\dfrac{1}{x}=1$. □

定义 2.6 (除法) 对于任意两个实数 $x,y,y\neq 0$, 定义 $\dfrac{x}{y}=x\cdot\dfrac{1}{y}$.

容易看出, 上面给出的实数四则运算是有理数四则运算的推广. 不仅如此, 跟有理数一样, 实数的四则运算也满足如下的运算律:

加法运算律

(1) 加法交换律: $x+y=y+x$.

(2) 加法结合律: $(x+y)+z=x+(y+z)$.

(3) 加法保序性: 若 $x<y$, 则 $x+z<y+z$.

验证: 根据加法定义和上确界的性质,

$$y+x=\sup\{y_n+x_n\}=\sup\{x_n+y_n\}=x+y.$$

故 (1) 成立. (2), (3) 的验证类似.

乘法运算律

(1) 乘法交换律: $x\cdot y=y\cdot x$.

(2) 乘法结合律: $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$.

(3) 乘法保序性: 若 $x<y,z>0$, 则 $x\cdot z<y\cdot z$.

验证从略.

加乘分配律

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z.$$

验证: 设 x, y, z 都大于 0. 根据加乘定义和上确界的性质,

$$
\begin{aligned}
x^{\bullet}(y+z) &= \sup\{x_n{}^{\bullet}(y_n+z_n)\} = \sup\{x_n y_n + x_n z_n\} \\
&= \sup\{x_n y_n\} + \sup\{x_n z_n\} = x^{\bullet}y + x^{\bullet}z.
\end{aligned}
$$

其他情形的验证从略.

例 2.1 证明 $x = \dfrac{1}{3}$ 是它的生成序列 $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{3}{10^i}$ 的上确界.

证明 显然对任何 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $x_n < x$. 又对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\lg \dfrac{3}{\varepsilon}\right] + 1$, 我们有

$$x_N > \frac{1}{3} - \varepsilon$$

于是根据确界原理, $x = \dfrac{1}{3}$ 是它的生成序列 $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{3}{10^i}$ 的上确界. □

确界原理反映了实数系连续性这一基本性质, 而有理数系 $\mathbb{Q}$ 就不具备这种性质. 换言之, $\mathbb{Q}$ 内有上界的集合 E 未必在 $\mathbb{Q}$ 内有它的上确界.例如数集 $E = \{x; x \in \mathbb{Q}$ 并且 $x > 0, x^2 < 2\}$, 在 $\mathbb{Q}$ 中就没有上确界.

有了实数的序关系和减法运算的定义, 我们就可以给出数列极限的定义:

定义 2.7 设 $\{x_n\}$ 为一个数列, A 为一个给定实数. 如果对于任意给定的正数 ε, 都存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 就有

$$|x_n - A| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限, 或 $\{x_n\}$ 收敛于 A.

再利用数列极限的定义和实数四则运算的定义便可以证明数列极限的四则运算性质.

命题 2.3 设 x 是由 $\{x_n\}$ 生成的实数. 则 $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得 $x_N > x - \varepsilon$. 于是对任给 $n > N$,

$$x - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant x < x + \varepsilon.$$

按极限定义, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. □

习 题

验证实数的乘法满足交换律.