

21 世纪专转本通用教材

高等数学

(专转本)

主编 曹玉平 夏绍云

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:专转本/曹玉平,夏绍云主编. —苏州:苏州大学出版社,2008.9
21世纪专转本通用教材
ISBN 978-7-81137-117-8

I. 高… II. ①曹…②夏… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 120877 号

内容提要

本书按照高等学校专科高等数学教学大纲二年级的水准来编写,包含了高等数学的全部七章内容,同时提供了两套模拟试卷和历年考试真题,最后给出了所有习题的解答.书中紧扣重要知识点和历年考试试题,把知识点、例题、解题方法有机结合起来,同时配合一定量的习题,以期能帮助读者多方面、多角度反复练习,从而达到考试要求.

本书可供大专学生参加“专转本”或“专升本”考试前学习和复习之用,也可供相关教师教学时参考.

高等数学(专转本)

曹玉平 夏绍云 主编
责任编辑 谢金海

苏州大学出版社出版发行

(地址:苏州市干将东路200号 邮编:215021)

江苏省新华书店经销

宜兴文化印刷厂印装

(地址:宜兴市南漕镇 邮编:214217)

开本 787×1092 1/16 印张 18.75 字数 465 千

2008年9月第1版 2008年9月第1次印刷

ISBN 978-7-81137-117-8 定价:28.00元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835

前 言

“专转本”考试已有多年历史,因其选拔严格而被称为“第二次高考”,它为广大在校的专科学生提供了一个提升学历的平台.而高等数学是其中一门重要的公共基础课.

本书是编者根据多年“专转本”考试辅导经验,按照高等学校专科高等数学教学大纲二年级的水准来编写,包含了高等数学的全部七章内容,同时提供了两套模拟试卷和历年考试真题,最后给出了所有习题的解答.紧扣重要知识点和历年考试试题这一要求始终贯穿于本书的编写过程.书中把知识点、例题、解题方法有机结合起来,同时配合一定量的习题,以期能帮助读者多方面、多角度反复练习,从而达到考试要求.

本书可供大专学生参加“专转本”或“专升本”考试前学习和复习之用,也可供相关教师教学时参考.

参加本书编写的人员有曹玉平、夏绍云、杨俊林、钱靖宇等,由曹玉平负责统稿、定稿.

由于编者水平有限,书中不足和错谬之处在所难免,敬请专家、同行及广大读者不吝赐教.

编 者

2008年9月

目 录

第一章 函数的极限与连续

- 第一节 函数 (1)
- 第二节 极限 (16)
- 第三节 连续 (35)

第二章 一元函数微分学

- 第一节 导数与微分 (46)
- 第二节 微分中值定理及导数的应用 (68)

第三章 一元函数积分学

- 第一节 不定积分 (89)
- 第二节 定积分 (111)
- 第三节 定积分的应用 (132)

第四章 微分方程

- 第一节 一阶微分方程 (139)
- 第二节 可降阶微分方程与二阶线性微分方程 (146)

第五章 向量代数与空间解析几何

- 第一节 向量代数 (156)
- 第二节 空间解析几何 (164)

第六章 多元函数微积分学

- 第一节 多元函数微分学 (178)
- 第二节 二重积分 (201)

第七章 无穷级数

- 第一节 数项级数 (216)
- 第二节 幂级数 (229)

附录 1:

- “专转本”高等数学模拟试卷(一) (240)

“专转本”高等数学模拟试卷(二)	(242)
附录 2:	
江苏省 2001 年普通高校“专转本”高等数学统一考试试卷	(244)
江苏省 2002 年普通高校“专转本”高等数学统一考试试卷	(246)
江苏省 2003 年普通高校“专转本”高等数学统一考试试卷	(248)
江苏省 2004 年普通高校“专转本”高等数学统一考试试卷	(250)
江苏省 2005 年普通高校“专转本”高等数学统一考试试卷	(252)
江苏省 2006 年普通高校“专转本”高等数学统一考试试卷	(254)
江苏省 2007 年普通高校“专转本”高等数学统一考试试卷	(256)
江苏省 2008 年普通高校“专转本”高等数学统一考试试卷	(258)
附录 3:	
江苏省历年“专转本”高等数学统一考试试卷分析	(260)
参考答案	(264)

第一章 函数的极限与连续

本章学习基本要求

1. 理解函数的概念.
2. 了解分段函数、复合函数的概念.
3. 能熟练列出简单函数的函数关系.
4. 了解函数极限的描述性定义.
5. 了解无穷小、无穷大的概念及其相互关系,会对无穷小进行比较.
6. 知道夹逼定理和单调有界数列极限存在定理,会用两个重要极限求极限.
7. 掌握极限的四则运算法则.
8. 理解函数在一点连续的概念,会判断间断点的类型.
9. 知道初等函数的连续性,知道闭区间上连续函数的性质(介值定理、最大值和最小值定理).
10. 会求连续函数和分段函数的极限.

第一节 函数

一、内容概述和相关知识

(一) 函数的概念

定义 1 设 D, R 是给定的两个数集, f 是一个确定的对应关系, 如果对于 D 中的每一个元素 x , 通过 f 都有 R 内的唯一确定的一个元素 y 与之对应, 那么这个关系 f 就叫做从 D 到 R 的函数关系, 简称为函数, 记作

$$f: D \rightarrow R \text{ 或 } f(x) = y.$$

按照函数 f 与 $x \in D$ 所对应的 $y \in R$ 叫做 f 在 x 处的函数值, 记作 $y = f(x)$, 并称 D 为函数 f 的定义域, 而 f 的函数值的集合 $\{f(x) | x \in D\}$ 称为函数 f 的值域.

函数关系通常用 $y = f(x)$, $x \in D$ 来表示, 并称 y 是 x 的函数, 其中 x 叫做自变量, y 叫做因变量.

注 1 函数定义中最本质的是: (1) 对应法则. 对应法则用记号 f 表示, 它不只能用某一数学表达式, 也可以用几个数学表达式, 甚至可以用一个图形或一张表格表示, 关键是它确定了两个数集之间的对应规则. (2) 定义域. 定义域分两种情况: 在实际问题中, 函数的定义域由问题的实际意义确定; 对单纯由数学表达式定义的函数, 其定义域是使函数的表达式有意义的一切实数所构成的数集.

注 2 两个函数相同(或恒等)当且仅当它们的对应法则和定义域都相同.

在定义域中的不同点集内由不同的数学表达式所表示的函数称为分段函数.

若函数的对应法则是由方法 $F(x, y) = 0$ 给出的, 则称 y 为 x 的隐函数.

定义 2 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 且函数 $u = \varphi(x)$ 的值域的全部或一部分包含在函数 $y = f(u)$ 的定义域内, 则对 $u = \varphi(x)$ 的定义域内的某些 x , 通过变量 u , 变量 y 有确定的值与之对应, 从而得到一个以 x 为自变量, 以 y 为因变量的函数, 称此函数是由函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 记作 $y = f[\varphi(x)]$, 其中 u 称为中间变量.

注 不是任何两个函数都能构成复合函数, 关键是 $u = \varphi(x)$ 的值域与 $y = f(u)$ 的定义域的交集是否非空.

关于复合函数要熟练掌握以下内容: 求定义域; 将若干个简单函数复合; 将复合函数分解成若干个简单函数. 这里说的简单函数是指基本初等函数与基本初等函数经过四则运算后得出的函数. 熟练掌握复合函数的分解是今后正确运用求导公式的基础.

定义 3 设 $y = f(x)$ 是定义在 D 上的函数, 其值域为 Z , 如果对每个 $y \in Z$, 都有唯一的对应值 $x \in D$ 满足 $y = f(x)$, 则称 x 为定义在 Z 上以 y 为自变量的函数, 记为

$$x = f^{-1}(y), y \in Z,$$

并称其为 $y = f(x)$ 的反函数.

若以 x 为自变量, 则 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$, $x \in Z$, 且 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

注 严格单调增加(或减少)的函数有反函数. 有些函数在其定义域内不是单调函数, 但它在其子区间上是单调的, 这时可在其子区间上讨论它的反函数.

(二) 函数的性质

1. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 任给 $x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$, 若恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的; 若恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的. 单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数.

注 函数的单调性总是与某区间 I 相联系的, 相应的区间 I 称为单调区间(单调增加区间或单调减少区间). 若笼统地称某函数为单调函数, 往往是指在其定义区间上是单调函数.

2. 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称, 若对于定义域 D 中的任何 x , 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数; 若对于定义域 D 中的任何 x , 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

注 讨论一个函数奇偶性的前提是其定义域必须关于坐标原点对称. 奇函数的图形关于坐标原点对称, 偶函数的图形关于 y 轴对称.

3. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 若存在正数 M , 使得对一切 $x \in I$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界; 若这样的 M 不存在, 就称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上无界.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 若存在常数 $T(T \neq 0)$, 使得对于定义域 D 中的任何 x , $x \pm T$ 也在定义域 D 中, 且恒有 $f(x \pm T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 满足上式的最小正常数 T 称为 $f(x)$ 的周期.

周期函数在每一个周期内的图形是相同的.

(三) 基本初等函数

1. 幂函数

形如 $y=x^\mu$ (μ 是常数) 的函数称为幂函数. 它的定义域需根据 μ 的值而定, 但是不论 μ 取何值, 在区间 $(0, +\infty)$ 内它总是有定义的, 且图形通过点 $(1, 1)$.

对于常见的幂函数: $y=x, y=x^2, y=x^3, y=\sqrt{x}, y=\frac{1}{x}$, 应掌握它们的定义域、值域和单调性.

2. 指数函数

形如 $y=a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的函数称为指数函数. 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$. 当 $a > 1$ 时, 函数是单调增加的; 当 $0 < a < 1$ 时, 函数是单调减少的. 指数函数的图形总在 x 轴上方, 且过点 $(0, 1)$.

3. 对数函数

指数函数 $y=a^x$ 的反函数记作 $y=\log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$), 称为对数函数. 它的定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$. 当 $a > 1$ 时, 对数函数 $y=\log_a x$ 是单调增加的; 当 $0 < a < 1$ 时, 对数函数 $y=\log_a x$ 是单调减少的. 对数函数的图形位于 y 轴右方, 且过点 $(1, 0)$.

注 对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数, 其定义域和值域互相对应, 一个函数的定义域恰好是另一个函数的值域.

特别地, 取 $a=e$ 得自然对数 $y=\ln x$.

4. 三角函数

(1) 正弦函数

函数 $y=\sin x$ 称为正弦函数. 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 且为有界函数、奇函数和以 2π 为周期的周期函数.

(2) 余弦函数

函数 $y=\cos x$ 称为余弦函数. 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 且为有界函数、偶函数和以 2π 为周期的周期函数.

(3) 正切函数

函数 $y=\tan x$ 称为正切函数. 它的定义域为 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 值域为 $(-\infty, +\infty)$. 它是奇函数, 且是以 π 为周期的周期函数.

(4) 余切函数

函数 $y=\cot x$ 称为余切函数. 它的定义域是 $(k\pi - \pi, k\pi)$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 值域为 $(-\infty, +\infty)$. 它是奇函数, 且是以 π 为周期的周期函数.

(5) 正割函数

函数 $y=\sec x$ 称为正割函数. 它是余弦函数的倒数, 即 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. 它的定义域是

$(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}) (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. 它是偶函数, 且是以 2π 为周期的周期函数.

(6) 余割函数

函数 $y = \csc x$ 称为余割函数. 它是正弦函数的倒数, 即 $\csc x = \frac{1}{\sin x}$. 它的定义域是 $(k\pi - \pi, k\pi) (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. 它是奇函数, 且是以 2π 为周期的周期函数.

5. 反三角函数

由于三角函数在它们的定义域内不是单调的, 在通常情况下无法讨论其反函数. 但可以通过限制它的定义域范围, 使其成为单调函数, 这样得到的三角函数的反函数称为反三角函数.

(1) 反正弦函数

函数 $y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的反函数称为反正弦函数, 记作 $y = \arcsin x$. 它的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 是单调增函数、奇函数.

(2) 反余弦函数

函数 $y = \cos x, x \in [0, \pi]$ 的反函数称为反余弦函数, 记作 $y = \arccos x$. 它的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$, 是单调减函数.

(3) 反正切函数

函数 $y = \tan x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的反函数称为反正切函数, 记作 $y = \arctan x$. 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 是单调增函数、奇函数.

(4) 反余切函数

函数 $y = \cot x, x \in (0, \pi)$ 的反函数称为反余切函数, 记作 $y = \operatorname{arccot} x$. 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, \pi)$, 是单调减函数.

上述五种函数统称为基本初等函数, 是最常用、最基本的函数, 它们的定义域、性质和图形应当牢记.

二、典型考题类型与例题

(一) 典型考题类型

- 判断两个函数是否恒等(或相同).
- 求函数的定义域.
- 求函数值与函数表达式.
- 判定给定函数的奇偶性.
- 求已知函数的反函数.
- 会建立简单实际问题的函数表达式.
- 复合函数的复合与分解.

(二) 典型例题

1. 填空题

解题提示 填空题是一类广泛采用的考试题型, 不需要写出解题过程, 只要把正确答案

填写在题中的横线上即可. 这类题要求考生熟练掌握基本概念与基本计算方法, 由于不要计算步骤, 有时可通过加强条件等技巧迅速准确地找到答案(有关技巧在具体例题中介绍).

例1 填空题

- (1) 函数 $y = \frac{1}{\ln(3x-2)}$ 的定义域是_____.
- (2) 设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 则 $f(x^2)$ 的定义域是_____.
- (3) 已知 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = \cos x + 1$, 则 $f\left(\cos \frac{x}{2}\right) =$ _____.
- (4) 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] =$ _____.
- (5) 设 $f(x+1) - f(x) = 8x + 3$, 则 $f(x) = ax^2 + bx + 5$ 中的 $a =$ _____, $b =$ _____.
- (6) 定义于 $[-1, 0]$ 上的函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的反函数是_____, 其定义域是_____.

解 (1) 自变量 x 应满足 $3x-2 > 0, \ln(3x-2) \neq 0$, 即 $x > \frac{2}{3}$ 且 $3x-2 \neq 1$,

因此定义域为 $D = \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$. 应填 $\left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$.

(2) 由 $0 \leq x^2 \leq 1$, 得 $|x| \leq 1$, 即 $x \in [-1, 1]$. 应填 $[-1, 1]$.

(3) $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = \cos x + 1 = 2 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$. 所以 $f(x) = 2 - 2x^2$,

因此 $f\left(\cos \frac{x}{2}\right) = 2 - 2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$.

或在 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = \cos x + 1$ 中把 x 取为 $\pi - x$, 得 $f\left(\sin \frac{\pi-x}{2}\right) = \cos(\pi-x) + 1$,

即 $f\left(\cos \frac{x}{2}\right) = -\cos x + 1$. 应填 $1 - \cos x$.

(4) $f[f(x)] = \begin{cases} -1, & f(x) < 0 \\ 0, & f(x) = 0 \\ 1, & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 = f(x) \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. 应填 $f(x)$.

(5) 由 $f(x) = ax^2 + bx + 5$, 有

$$f(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + 5,$$

$$f(x+1) - f(x) = ax^2 + 2ax + a + bx + b + 5 - ax^2 - bx - 5 = 2ax + a + b.$$

$$\text{又 } f(x+1) - f(x) = 8x + 3, \text{ 所以 } 2ax + a + b = 8x + 3,$$

于是得 $2a = 8, a + b = 3$, 解得 $a = 4, b = -1$. 应填 $a = 4, b = -1$.

(6) 由 $y = \sqrt{1-x^2}$, 解得 $x = -\sqrt{1-y^2}$ (注意 $x < 0$). 交换 x, y 得反函数为 $y = -\sqrt{1-x^2}$,

其定义域即为原函数的值域 $[0, 1]$. 应填 $y = -\sqrt{1-x^2}, [0, 1]$.

2. 选择题

解题提示 有一个题干及四个可供选择的答案, 其中只有一个答案是正确的, 这种类型的题目称为选择题. 其求解方法有:

1° 直接法: 从题设条件出发, 经过演算、推理或证明, 得出与选择题的某一选项相同的结论, 这种确定正确选项的方法称为直接法. 直接法是求解选择题的基本方法, 它适用于解答概

念、性质及解析式等类型的题目.

2° 排除法:通过排除容易判定为错误的选择题,逐渐缩小选择范围,再进行比较和验证,选择正确答案的方法.

3° 赋值法:用满足条件的特殊值检验各选项是否正确,从而找出正确答案的方法.

对于某些题上述几种方法都适用或要综合运用多种方法求解,这时要根据具体情况灵活运用,选择最简捷的方法.

例 2 选择题:

(1) 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2$, 则 $f(x) =$ ().

(A) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$

(B) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$

(C) $(1+x)^2$

(D) $(1-x)^2$

(2) 函数 $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是 ().

(A) $\{x|x > -1\}$

(B) $\{x|x > 1\}$

(C) $\{x|x \geq -1\}$

(D) $\{x|x \geq 1\}$

(3) 如果函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 2]$, 则函数 $f(1 - \ln x)$ 的定义域为 ().

(A) $[1, 1 - \ln 2]$

(B) $(0, 1]$

(C) $[1, e]$

(D) $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$

(4) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 0)$, 则下列函数中, () 的定义域为 $(0, 1)$.

(A) $f(1-x)$

(B) $f(x-1)$

(C) $f(x+1)$

(D) $f(x^2-1)$

(5) 设 $f(x) = \frac{x+k}{kx^2+2kx+2}$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 则 k 的取值范围是 ().

(A) $0 < k < 2$

(B) $0 \leq k < 2$

(C) $k > 2$

(D) $k \geq 2$

(6) 下列函数对中, () 是相同的函数.

(A) $f(x) = \ln x^2$ 与 $g(x) = 2 \ln x$

(B) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$

(C) $f(x) = x+1$ 与 $g(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$

(D) $f(x) = e^{-\frac{1}{2} \ln x}$ 与 $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(7) 下列函数中, () 为奇函数.

(A) $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$

(B) $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$

(C) $f(x) = \frac{x(1+x)}{1-x}$

(D) $f(x) = \frac{|x|}{x} \sin x$

(8) 设 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的任意函数, 下列函数中, () 为奇函数.

(A) $f(|x|)$

(B) $|f(x)|$

(C) $f(x) + f(-x)$

(D) $f(x) - f(-x)$

(9) 已知 $f(x-1) = x^2 - 2x - 7$, 则 $f(x)$ 的奇偶性是 ().

(A) 既是奇函数又是偶函数

(B) 非奇非偶函数

(C) 偶函数

(D) 奇函数

(10) 函数 $y=e^x-1$ 的反函数是().

(A) $y=\ln x+1$

(B) $y=\ln(x+1)$

(C) $y=\ln x-1$

(D) $y=\ln(x-1)$

(11) 下列各组函数能够构成复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的是().

(A) $y=f(u)=\ln u, u=\varphi(x)=\sin x-1$

(B) $y=f(u)=\sqrt{u}, u=\varphi(x)=-x$

(C) $y=f(u)=\frac{1}{u-u^2}, u=\varphi(x)=\sin^2 x+\cos^2 x-1$

(D) $y=f(u)=\arccos u, u=\varphi(x)=3+x^2$

(12) 将函数 $y=x^{\sin x}$ 分解成由基本初等函数构成的函数, 正确的是().

(A) $y=u^{\sin x}, u=x$

(B) $y=x^u, u=\sin x$

(C) $y=e^u, u=\sin x \ln x$

(D) $y=e^u, u=\ln \sin x$

解 (1) (用直接法) 令 $u=\frac{1}{x}$, 则 $x=\frac{1}{u}$, 代入关系式有 $f(u)=\left[\frac{\frac{1}{u}+1}{\frac{1}{u}}\right]^2=(1+u)^2$,

将 u 替换为 x , 得 $f(x)=(1+x)^2$, 正确答案为(C).

(用赋值法) 令 $x=1$, 则 $f(1)=\left(\frac{1+1}{1}\right)^2=4$, 又将 $x=1$ 代入四个备选项, 分别得

$\frac{1}{4}, 4, 4, 0$, 因此(A)、(D)可先排除. 再令 $x=2$, 得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{2+1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$, 而将 $x=\frac{1}{2}$

代入(B)、(C)两个选项中, 分别得 $9, \frac{9}{4}$, 进一步可排除(B), 正确答案为(C).

(2) x 应满足: $x+1>0, x-1\geq 0$ 且 $\sqrt{x-1}\neq 0$, 即 $x>-1, x\geq 1$ 且 $x\neq 1$, 故所求定义域为 $\{x|x>1\}$, 正确答案为(B).

(3) $f(1-\ln x)$ 的定义域要求满足 $1\leq 1-\ln x\leq 2$, 即 $\begin{cases} \ln x\geq -1, \\ \ln x\leq 0, \end{cases}$ 也即 $\frac{1}{e}\leq x\leq 1$, 于是得

$f(1-\ln x)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, 正确答案为(D).

(4) (A) $-1<1-x<0$, 即 $1<x<2$, 故 $f(1-x)$ 的定义域为 $(1, 2)$;

(B) $-1<x-1<0$, 即 $0<x<1$, 故 $f(x-1)$ 的定义域为 $(0, 1)$;

(C) $-1<x+1<0$, 即 $-2<x<-1$, 故 $f(x+1)$ 的定义域为 $(-2, -1)$;

(D) $-1<x^2-1<0$, 即 $-1<x<0$ 或 $0<x<1$, 故 $f(x^2-1)$ 的定义域为 $(-1, 0)\cup(0, 1)$.

正确答案为(B).

(5) $f(x)$ 的定义域为满足 $kx^2+2kx+2\neq 0$ 的所有 x 的取值范围, 即当二次曲线 $y=kx^2+2kx+2$ 与 x 轴不相交时, 定义域为题设的 $(-\infty, +\infty)$, 而 $y=kx^2+2kx+2$ 与 x

轴不相交的条件是 $\Delta=(2k)^2-4\times k\times 2<0$, 解得 $0<k<2$, 注意 $k=0$ 时, $f(x)=\frac{x}{2}$

的定义域仍为 $(-\infty, +\infty)$, 故正确答案为(B).

(6) (A) 中两个函数定义域不相同;

(B) 中两个函数对应法则不相同;

(C) 中两个函数定义域不相同.

因此(A)、(B)、(C)均可排除,正确答案为(D).

事实上 $f(x) = e^{-\frac{1}{2}\ln x} = e^{\ln \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 与 $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 具有相同的定义域与对应法则,因此它们是同一函数.

(7) (A) 中 $f(x)$ 满足 $f(-x) = \frac{a^{-x} + a^x}{2} = f(x)$, $f(x)$ 为偶函数;

(B) 中 $f(x)$ 满足 $f(-x) = \frac{a^{-x} - a^x}{2} = -\frac{a^x - a^{-x}}{2} = -f(x)$, $f(x)$ 为奇函数;

(C) 中 $f(x)$ 为非奇非偶函数;

(D) 中 $f(x)$ 满足 $f(-x) = \frac{|-x|}{-x} \sin(-x) = \frac{|x|}{x} \sin x = f(x)$, $f(x)$ 为偶函数.

正确答案为(B).

(8) (A) 设 $F(x) = f(|x|)$, 则 $F(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = F(x)$, 所以 $f(|x|)$ 为偶函数;

(B) 设 $F(x) = |f(x)|$, 则 $F(-x) = |f(-x)|$, $F(-x)$ 不一定等于 $-F(x)$, 所以 $|f(x)|$ 不一定为奇函数;

(C) 设 $F(x) = f(x) + f(-x)$, 则 $F(-x) = f(-x) + f(x) = F(x)$, 所以 $f(x) + f(-x)$ 为偶函数;

(D) 设 $F(x) = f(x) - f(-x)$, 则 $F(-x) = f(-x) - f(x) = -F(x)$, 所以 $f(x) - f(-x)$ 为奇函数.

正确答案为(D).

(9) 令 $u = x - 1$, 得 $x = u + 1$, 于是 $f(u) = (u + 1)^2 - 2(u + 1) - 7 = u^2 - 8$, 故有 $f(x) = x^2 - 8$ 为偶函数, 正确答案为(C).

(10) 由 $y = e^x - 1$ 得 $e^x = y + 1$, 所以 $x = \ln(y + 1)$, 交换 x 与 y 得反函数为 $y = \ln(x + 1)$. 正确答案为(B).

(11) (A) 中 $y = f(u)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, 而 $u = \varphi(x)$ 值域为 $[-2, 0]$, 交集为空, 不能复合;

(B) 中 $y = f(u)$ 定义域为 $[0, +\infty)$, 而 $u = \varphi(x)$ 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 交集非空, 可以复合;

(C) 中 $y = f(u)$ 的定义域为 $u \neq 0, u \neq 1$, 而 $u = \varphi(x)$ 的值域为 0 , 交集为空, 不能复合;

(D) 中 $y = f(u)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 而 $u = \varphi(x)$ 的值域为 $[3, +\infty)$, 交集为空, 不能复合.

正确答案为(B).

(12) $y = x^{\sin x}$ 为幂指函数, 应先化成指数函数, 再分解.

$y = x^{\sin x} = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \ln x}$, 故可以分解为 $y = e^u$, $u = \sin x \ln x$.

正确答案为(C).

3. 判断两个函数是否恒等(或相同)

解题提示 判别给定的两个函数是否表示同一函数(或恒等), 一般从两方面着手:

1° 验证定义域是否相同;

2° 对应法则是否一致.

当且仅当两者完全相同时它们才恒等.

例 3 下列几组函数是否恒等?

(1) $y = \cos x$ 与 $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$;

(2) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 与 $y = \ln(1+x) - \ln(1-x)$;

(3) $y = 1$ 与 $y = \sin^2 x + \cos^2 x$;

(4) $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ 与 $y = x^2 + x + 1$.

解 (1) $y = \cos x$ 与 $y = \sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|$ 定义域相同, 但对应法则不同, 故它们不恒等.

(2) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 的定义域为 $D = \{x | -1 < x < 1\}$, 且 $y = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$,

而 $y = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ 的定义域也为 $D = \{x | -1 < x < 1\}$, 说明两个函数的定义域与对应法则都相同, 故它们恒等.

(3) 由 $y = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 知两者恒等.

(4) $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ 的定义域为 $x \neq 1$, $y = x^2 + x + 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 两者不一致, 故它们不是恒等函数.

4. 求函数的定义域

解题提示 由解析式表示的函数的定义域是使该解析表达式有意义的一切实数所构成的集合. 求定义域时应注意以下几点:

1° 如果函数的表达式中含有分式, 则分式的分母不能为零;

2° 如果函数的表达式中含有偶次方根, 则根号下的表达式必须大于或等于零;

3° 如果函数的表达式中含有对数, 则真数必须大于零;

4° 如果函数的表达式中含有反正弦函数或反余弦函数, 则必须符合反正弦函数与反余弦函数的定义域, 即对于 $\arcsin \varphi(x)$, $\arccos \varphi(x)$, 必须满足 $|\varphi(x)| \leq 1$;

5° 分段函数的定义域是各个部分自变量的取值范围的并集;

6° 若函数式是由几个函数经过四则运算构成, 则其定义域是各个函数式的定义域的公共部分(交集).

例 4 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-3} + \ln(5-x)$;

(2) $y = \frac{\sqrt{\ln(x-1)}}{x(x-3)}$;

(3) $y = \sqrt{16-x^2} + \arcsin \frac{2x-1}{7}$;

(4) $y = \sqrt{16-x^2} + \sqrt{\cos x}$.

解 (1) 要使 y 有意义, x 应满足 $x-2 \geq 0$, $x-3 \neq 0$, $5-x > 0$,

即 $x \geq 2$, $x \neq 3$ 且 $x < 5$, 其公共部分为 $[2, 3) \cup (3, 5)$,

故所求定义域为 $D = [2, 3) \cup (3, 5)$.

(2) 要使 y 有意义, x 必须满足 $\begin{cases} \ln(x-1) \geq 0, \\ x-1 > 0, \\ x(x-3) \neq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x-1 \geq 1, \\ x > 1, \\ x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 3. \end{cases}$

其交集为 $[2, 3) \cup (3, +\infty)$, 故函数的定义域为 $D = [2, 3) \cup (3, +\infty)$.

$$(3) \text{ 要使 } y \text{ 有意义, 必须 } \begin{cases} 16-x^2 \geq 0, & \textcircled{1} \\ \left| \frac{2x-1}{7} \right| \leq 1. & \textcircled{2} \end{cases}$$

由①式解得 $-4 \leq x \leq 4$; 解②式得 $-7 \leq 2x-1 \leq 7$, 得 $-3 \leq x \leq 4$.

于是, 所给函数的定义域为 $D = [-3, 4] \cap [-4, 4] = [-3, 4]$.

$$(4) \text{ 要使 } y \text{ 有意义, 必须 } \begin{cases} 16-x^2 \geq 0, & \textcircled{1} \\ \cos x \geq 0. & \textcircled{2} \end{cases}$$

由①得 $-4 \leq x \leq 4$, ③

$$\text{由②得 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \textcircled{4}$$

联立③, ④可得所给函数的定义域为 $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\text{例 5 设 } f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0, \\ -e^x, & x < 0, \end{cases} \varphi(x) = \ln x.$$

(1) 求 $f[\varphi(x)]$ 及其定义域;

(2) 可以复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数吗?

分析 复合函数中内层函数的值域与外层函数的定义域之交集必须是非空集.

解 (1) 因为 $\varphi(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 值域是 $(-\infty, +\infty)$, 而 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 所以 $\varphi(x)$ 的值域在 $f(x)$ 的定义域内, 故 $f[\varphi(x)]$ 有意义, 因而

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} -\varphi^2(x), & \varphi(x) \geq 0, \\ -e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } f[\varphi(x)] = \begin{cases} -\ln^2 x, & x \geq 1, \\ -x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

从上式可看出, $f[\varphi(x)]$ 的定义域是两部分定义域之并, 即为 $(0, +\infty)$.

(2) 由于 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty, 0)$, $\varphi(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 它们无公共部分, 所以不能复合成形如 $\varphi[f(x)]$ 的函数.

例 6 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求 $f(2x-3)$, $f(\sin 2x)$ 的定义域.

解 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 故 $f(2x-3)$ 的定义域为 $0 \leq 2x-3 \leq 1$, 即 $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$.

同理, $f(\sin 2x)$ 的定义域为 $0 \leq \sin 2x \leq 1$, 即 $2n\pi \leq 2x \leq 2n\pi + \pi$,

故定义域为 $n\pi \leq x \leq n\pi + \frac{\pi}{2} (n \in \mathbf{Z})$.

5. 求函数值与函数表达式

(1) 求函数值

解题提示 按函数定义对定义域 D 中的任意 x , 根据对应法则 f 所对应的因变量 y , 记作 $f(x)$, 称为函数在 x 的函数值. 当函数 $f(x)$ 用一个解析表达式表示时, 将表达式中之 x 代以 x_0 便得到 $f(x_0)$. 对分段函数求函数值 $f(x_0)$ 时, 要根据 x_0 所在的区间, 用 $f(x)$ 相对应的表达式求 $f(x_0)$.

$$\text{例 7 设 } f(x) = \begin{cases} \lim_{u \rightarrow 0} (1+xu)^{\frac{1}{u}}, & x \geq 1, \\ \ln(1+x), & |x| < 1, \\ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin ux}{u}, & x \leq -1, \end{cases} \text{ 求 } f(-1), f(0), f(1).$$

解 这是分段函数,求函数值时必须根据自变量所在的区间的解析表达式计算.

$$f(-1) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(-u)}{u} = -\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(-u)}{-u} = -1,$$

$$f(0) = \ln(1+x) \Big|_{x=0} = \ln 1 = 0,$$

$$f(1) = \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e.$$

例 8 设 $\int_0^x f(u) du = \sin x + \cos x$, 求 $f(\pi)$.

解 这里函数 $f(x)$ 是变上限积分的被积函数,利用变上限积分的性质,等式两边同时求导,即可得 $f(x)$,从而易由 $f(x)$ 直接得到 $f(\pi)$.

$$\text{由 } \int_0^x f(u) dx = \sin x + \cos x \text{ 两边同时求导,得 } f(x) = \cos x - \sin x,$$

$$\text{求得 } f(\pi) = (\cos x - \sin x) \Big|_{x=\pi} = -1.$$

(2) 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$, 求 $f[g(x)]$ 的表达式

解题提示 若已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式,求函数 $f[g(x)]$ 的表达式,相当于已知 $y = f(u)$ 及 $u = g(x)$,求复合函数 $f[g(x)]$,只需用 $g(x)$ 替换 $f(x)$ 中的 x 即可.

例 9 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f(x-1)$, $f[f(x)]$.

解 用 $g(x) = x-1$ 代替 $f(x)$ 中的 x , 得

$$f(x-1) = \frac{x-1}{\sqrt{1+(x-1)^2}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}},$$

用 $g(x) = f(x)$ 代替 $f(x)$ 中的 x 可得

$$f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

例 10 设 $f(x) = \frac{ax}{2x+3}$, 且 $f[f(x)] = x$, 求 a .

解 本题是已知 $f[f(x)]$ 的表达式,反求参数 a .

$$\text{由 } f[f(x)] = \frac{af(x)}{2f(x)+3} = x,$$

$$\text{得 } \frac{a \frac{ax}{2x+3}}{2 \frac{ax}{2x+3} + 3} = \frac{a^2 x}{2ax+6x+9} = x,$$

$$\text{即 } a^2 x = (2a+6)x^2 + 9x,$$

比较同次幂的系数,得 $a^2 = 9$, $2a+6=0$,解得 $a = -3$.

(3) 已知 $f[g(x)]$ 的表达式,反求 $f(x)$ 的表达式

解题提示 若已知 $f[g(x)]$ 的表达式,反求 $f(x)$ 的表达式,一般求解步骤是:令 $g(x) = u$,解出 $x = \varphi(u)$,求出 $f(u)$ 的表达式,再将 u 换成 x 即得 $f(x)$ 的表达式.

例 11 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{1+x}$, 求 $f(x)$.

解 令 $\frac{1}{x}=u$, 得 $x=\frac{1}{u}$, 于是 $f(u)=\frac{\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}}=\frac{1}{1+u}$. 再将 u 换成 x , 得 $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

例 12 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$, 试以 $f(x)$ 表示 $f(3x)$.

解 先将 $3x$ 代入 $f(x)$ 的表达式中得 $f(3x)=\frac{3x}{3x-1}$, 又由 $f(x)=\frac{x}{x-1}$, 解得 $x=\frac{f(x)}{f(x)-1}$, 代入 $f(3x)$ 有

$$f(3x)=\frac{3x}{3x-1}=\frac{3\frac{f(x)}{f(x)-1}}{3\frac{f(x)}{f(x)-1}-1}=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}.$$

例 13 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+3$, 求 $f(x)$.

解 若令 $x+\frac{1}{x}=u$, 此时求 x 有些复杂. 根据所给表达式可直接凑成

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1,$$

于是 $f(x)=x^2+1$.

6. 判断给定函数的奇偶性

解题提示 判断函数奇偶性的方法主要是根据奇、偶函数的定义及运算性质:

(1) 两个奇函数的代数和是奇函数; 两个偶函数的代数和是偶函数; 奇函数与偶函数的代数和既非奇函数, 也非偶函数.

(2) 两个奇函数的乘积是偶函数; 两个偶函数的乘积是偶函数; 奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

另外, 应掌握一些常见函数的奇偶性: x^{2n+1} (n 为正整数)、 $\sin x$ 、 $\arctan x$ 等是奇函数, x^{2n} (n 为正整数)、 $\cos x$ 等是偶函数.

注 判断 $f(x)$ 是否为奇函数, 通过直接计算 $f(x)+f(-x)=0$ 是否成立往往更简便.

例 14 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;

(2) $f(x)=F(x)\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)$ (其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$, $F(x)$ 是奇函数);

(3) $f(x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$;

(4) $f(x)=x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)$.

解 (1) 因为 $f(x)+f(-x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$
 $=\ln(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln 1=0$,

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(2) 令 $g(x)=\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}$.

因为 $g(-x)=\frac{a^x}{1+a^x}-\frac{1}{2}=\frac{1+a^x-1}{1+a^x}-\frac{1}{2}=-\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)=-g(x)$,