水文水资源随机分析

金光炎 著

中国科学技术出版社

内 容 提 要

本书介绍水文水资源学科中随机分析的理论和方法。主要内容为随机分析的基础知识、回归和相关、频率分析和计算、抽样误差、资料生成、随机过程以及随机模型，并附有常用的数表。深入浅出，结合水文水资源问题的实际。读者对象为大专水平以上的水文水资源工作者，并可作为大专院校有关专业的师生和其它学科随机分析工作者参考。

序　言

大约一个世纪以来，特别是近三四十年之内，随机分析的理论和方法在水文水资源实践中的应用，不断发展，不断丰富，解决了许多水文分析计算、水文预测预报以及水资源评价和管理等方面的问题，为水利水电工程和其他部门的实际需要服务，起到了良好的作用。

以概率论和数理统计学为基础的随机分析应用于水文水资源研究的问题，近几十年来有过不少争论。通过这些争论和多年的实践，都表明在研究水文水资源问题中正确应用随机分析的方法是必要的。并且，作为一种技术途径而存在是合适的。

随机分析应用于水文水资源学科中，有着丰富的内容，本书只叙述国内外常用的部分。书中没有用到高深的数学，以利广大实际工作者阅读。对一些定理和方法进行论证时，采用了比较简明的办法，虽然在数学上不够严格，但对实用来讲已经足够了。否则，将会占去很多的篇幅。

随着电子计算机的普及和应用，使分析计算的时间大为缩短，也使手算难以完成的工作得以实现，这是有利的一面。但若纯粹地"资料加统计"，机械地应用随机分析方法、偏信计算机所得的结果而不与水文水资源的概念相结合，将会使成果不可信赖。因此，仔细审查所用的资料、选择合适的模型和方法以及对成果进行合理性分析，乃是必不可少的。

本书共分十九章。前八章为与随机分析有关的概率统计基本知识，第九至十一章是回归和相关分析，第十二至十五章是频率分析和计算，第十六章为抽样误差，最后三章分别是资料生成（资料

系列的模拟)、随机过程和随机模型。书末列有常用的数表。

作者力图做到深入浅出,结合水文水资源的实际,希望能为理论研究和实际应用相结合做出应有的贡献。

该书稿曾多次在学习班和大学讲课中使用,得到了许多读者的建议和意见,作者都一一作了考虑,在此表示衷心的感谢。

本书的主要读者对象是大专水平以上的水文水资源工作者,也可作为大专院校有关专业的师生和其它随机分析工作者参考。

限于作者的水平,缺点和错误在所难免,敬请批评指正。

金　光　炎

1992.5.

目　　录

第一章　概率的概念和定理

§1—1　随机事件和概率

自然界中，有许多现象，在一定的条件组实现下，完全可以事先预言它们是否出现。例如，水在一个大气压下，加热到100℃时必然沸腾，这是必然出现的现象，其中的条件组是一个大气压和温度100℃。我们把这一类现象叫做必然事件。如果在上述条件组实现下，水会结冰，这是不可能出现的现象，我们称它为不可能事件。然而，自然界中还有许多现象，它们在一定条件组实现下，可能出现，也可能不出现。例如，一枚均质的硬币，每次投掷时，可能出现正面，也可能出现反面，这类现象称为随机事件。

在水文和水资源的问题中，多为随机事件。例如，每年汛期，江河某断面处会出现一个最大流量，但这个流量可能大于、也可能小于某规定的流量。这说明了每年的最大流量在数量上的出现是个随机事件。

随机事件虽在相同的条件组实现下可以出现种种结果，但它们不是杂乱无章的，而是有规律可循。人们通过长期的反复观察（或试验），发现不可预言的只是对一次或少数几次观察而言；在大量观察后发现，随机事件都表现有一定的规律性，可以预言其出现的可能性大小。例如，投掷硬币许多次，可以观察到出现正面与出现反面的比例总是近似1∶1，即可在今后的投掷中预言其出现正面或反面的可能性均为1/2；对于指定断面处的年最大流量来说，

经多次观察后，亦可发现它大于某个规定流量的年数与总年数之比，会愈来愈接近于一个常值，因而可预言其今后出现的可能性。如果把这种可能性大小用数量来表示，则称这种数量指标为出现所指事件的概率。

从上述可知，随机事件经大量重复试验后，会呈现出某些规律，我们把这些规律称为统计规律性。概率论和数理统计学是研究事物的量的统计规律性的一门数学学科。

概率分两类：先验概率与后验概率。若某个事件出现或不出现的概率，可以事先作出估计，如上述掷硬币那样，则这类概率叫做事先概率。若对某一事件，我们不能预估其出现或不出现的概率，如上述最大流量的例子，要估计其概率，就只能通过观测来估算，则这种概率就是后验概率。

后验概率亦叫做频率。在水文和水资源问题中，大于某一数值的降雨量或洪峰流量的发生情况，其先验概率未知，我们可以通过已有的资料用概率统计方法来估计它们的频率。由概率论中的大数定理可知，当观测资料很多时，频率就趋于稳定，并接近于一个常数。因此，概率统计分析必须要求具有足够的资料。

随机事件（简称事件），常用字母 A、B、C 等来表示。在讨论两个或多个事件时，要表示这些事件之间的关系，需要引入一些记号，规定如下。

事件 $A+B$ 表示事件 A 和事件 B 中至少发生其中之一的事件。同样，事件 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 表示在事件 A_1、A_2、…、A_n 中至少发生其中一个的事件。

事件 AB 表示事件 A 和事件 B 同时发生的事件。如果事件 A 和事件 B 不可能同时发生，则称此两事件为互斥（互相排斥）或互不相容。同样，事件 A_1、A_2、…、A_n 表示事件 A_1、A_2、…、A_n 均同时发生的事件。

如果 $A+B$ 为必然事件，而 A 和 B 互斥，则称 B 为 A 的补事

件，用$\bar{A}$代表B；或A为B的补事件，用$\bar{B}$代表A。例如，投掷硬币一次，出现正面和反面是互斥的，它们互为补事件。

§1－2　概率的直接计算

通常，我们可以碰到这样的试验，它的各种结果具有对称性。由于这种对称性，可知各种结果在客观上具有等可能性，或者说出现各种结果的概率相同。例如，掷均质硬币一次，出现正面或反面的概率是相等的。这种试验的概率计算方法如下。

设某一试验共有n种可能的结果，其中各个结果具有对称性，即其出现是等可能的。如以m表示有利于出现事件A的可能结果数，则出现事件A的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1-1}$$

这个公式叫做概率直接计算公式，是概率计算中最基本的公式。概率论中称它为古典概率公式。

在式(1－1)中，如令$m=n$，即出现事件A的可能结果数等于试验中全部可能结果，则

$$P(A)=\frac{n}{n}=1$$

概率等于1的意义是表示在任一次试验中所指定的事件A总是出现的，此即事件A为必然事件。

另一方面，在式(1－1)中，如令$m=0$，也就是全为不利场合，则此时

$$P(A)=0$$

概率得零，表示在每次试验中事件A都不会出现，此即事件A为不可能事件。

对于随机事件，每次试验的结果可能出现这种情况，也可能出现那种情况，其概率介于0与1之间。

因此，我们得到了概率的一个重要性质，即

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1 \qquad (1-2)$$

然而，在许多实际问题中，不是所有试验都严格符合对称性的条件。如投掷一枚不均质的硬币，出现正面的概率不再是 1/2，而可能比 1/2 大一些，也可能比 1/2 小一些。不过，它一定有一个客观存在的概率。这个概率是后验的，可以通过大量试验来估算，也就是说，可以用频率来估算概率。

频率的计算，同概率的直接计算相似。假设做了一系列的试验，每次试验结果，事件 A 可以出现或不出现。我们把事件 A 出现的次数和试验的总次数之比，叫做事件 A 在这一系列试验中出现的频率。以 n 表示试验的总次数，m 为事件 A 出现的次数，则事件 A 出现的频率为

$$P^{*}(A)=\frac{m}{n} \qquad (1-3)$$

实验证明，对于次数不多的试验，事件的频率有着明显的随机性。例如投掷均质硬币 10 次，出现正面的次数不可能正好等于 5 次，可能是 4 次或更少，也可能是 6 次或更多。在另 10 次投掷中，又可能与前 10 次投掷的结果不一样。但在试验次数加多之后，事件的频率就逐渐趋于稳定，而在某一较小的范围之内摆动，试验次数愈多，频率就愈接近于一个常量。这个试验，照理讲，出现正面的频率应为 0.5。现列举前人的试验，如蒲丰(Buffon)和皮尔逊(Pearson,K.)[1]以及统计试验法[2]的结果，见表 1－1，可见多次试验结果的频率，均接近于理论值 0.5。

表 1－1　多次投掷硬币出现正面的频率

试验者或试验方法	掷硬币次数	出现正面次数	频率
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
统计试验法	5000	2439	0.4878
统计试验法	10000	4921	0.4921

概率论中的大数定理，严格地证明了在试验次数很多很多时，频率接近于概率的事实。同时，实验也验证了这个定理的正确性，这给实际工作带来了很大的方便。在水文现象中，多数事件(如某站日降雨量大于 100mm、洪峰流量超过 10,000m^3/s 等)的先验概率未知，这都可以通过逐年积累资料，用频率来估算概率。

在理论上和实际上给出频率和概率间有机联系这一点，具有很大的实际意义。当我们无法求得复杂事件的概率时，可以做多次试验，把事件出现频率作为事件出现的概率的近似值或估计值。

总之，概率是表示随机事件在客观上出现的可能性大小，是一个常量，频率是个经验值，随着试验次数的增多而趋近于概率值。所以，复杂事件的概率是可以被认识的和可以设法估算的。水文事件同上述投掷硬币的简单事件不一样，因为水文资料不可能人为地在短时间内象简单事件那样重复作试验获得，而必须通过水文站上各种水文测验项目年复一年地测得。这些实测水文资料是非常宝贵的，它可同其它历史资料(如档案洪枯水记录、洪水痕迹以及当地居民的记忆等)一起来估算水文事件的频率。

§1—3　条件概率与独立性

在概率计算中，常需用到条件概率的概念。在事件 A 出现的条件下，事件 B 出现的概率，称为在事件 A 出现条件下事件 B 出现的概率，记作 $P(B|A)$。

例如，盒中有 2 个白球和 1 个红球，两人各从盒中取 1 球，使事件 A 为第一个人取出白球，事件 B 为第二个人取出白球。如果没有事件 A，事件 B 的概率 $P(B)=2/3$。倘若事件 A 已发生，则事件 B 的概率 $P(B|A)=1/2$，因为此时在事件 A 的发生过程中，已取走了 1 个白球，剩下来的只有 1 个白球和 1 个红球了。

同样，在事件 B 出现条件下事件 A 出现的概率，记作 P(A|

B)。

如果事件A的发生不影响事件B出现的概率，则称事件A对事件B独立，此时有

$$P(B|A)=P(B) \qquad (1-4)$$

同样，如果事件B对事件A独立，有

$$P(A|B)=P(A) \qquad (1-5)$$

式(1－4)及(1－5)称之为独立性的定义。

如果事件A对事件B独立，同时事件B对事件A也独立，则称事件A和事件B相互独立。

与独立相对立的概念是相关，如果事件A的发生影响到事件B出现的概率，或事件B的发生影响到事件A出现的概率，则称事件A与事件B相关。此时$P(B|A)\neq P(B)$或$P(A|B)\neq P(A)$。

在水文和水资源问题中，有时要知道事件间是否独立，可以用物理成因或经验来判断。例如，新疆北部的降雨量和淮河蚌埠站的径流量是独立的；又如同一流域上气温与蒸发量是相关的。对于一些不能直接判断的问题，以后我们可以用独立性检验的方法来推估。

§1－4　概率基本定理

一、概率相乘定理

［定理］　两个事件相乘的概率(同时发生的概率)等于其中一个事件的概率乘上另一个事件在第一个事件发生条件下的条件概率。

［证］　以事件AB表示事件A和B同时发生的事件(即A与B相乘的事件)，其概率按定理所述，表示如下：

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \qquad (1-6)$$

上式可用概率的直接计算公式来证明。设在n个等可能的结

果中，有四种不同的情况：

AB 同时发生	a 次
A 不发生，B 发生	b 次
B 不发生，A 发生	c 次
AB 都不发生	d 次

显然 $a+b+c+d=n$。于是各种情况的概率为：

$$P(A)=\frac{a+c}{n} \qquad P(B)=\frac{a+b}{n}$$

$$P(AB)=\frac{a}{n} \qquad P(B|A)=\frac{a}{a+c}$$

可以看到，在 A 已出现的条件下，$P(B|A)$分母不再是 n 而是 $a+c$ 了。由此，事件 A 和 B 相乘的概率为

$$P(AB)=\frac{a}{n}=\frac{a+c}{n}\times\frac{a}{a+c}=P(A)P(B|A)$$

式(1－6)得证。同理可证得

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \qquad (1-7)$$

所以，由式(1－6)，当 $P(A)\neq 0$ 时，条件概率 $P(B|A)$可根据 $P(AB)$及 $P(A)$求得。同样，由式(1－7)，当 $P(B)\neq 0$，$P(A|B)$也可求得。

对于独立事件，有

$$P(AB)=P(A)P(B) \qquad (1-8)$$

根据概率相乘定理，可以推出下列性质：若事件 A 对事件 B 独立，即 $P(B|A)=P(B)$，则事件 B 对事件 A 也独立，$P(A|B)=P(A)$。即两个事件的独立性是对称的。证明如下：

由式(1－6)及(1－7)可得

$$P(A)P(B|A)=P(AB)=P(B)P(A|B)$$

因为 $P(A|B)=P(A)$，故

$$P(A)P(B|A)=P(B)P(A)$$

当 $P(A)\neq 0$ 时，即得