初三分册

裘宗沪 主编

奥林匹克数学教程

OLYMPIC MATHEMATICS TEACHING

开明出版社

中国数学会普及工作委员会 编

奥林匹克数学教程

（初三分册）

主编　　裘宗沪　刘玉翘
编著　　王连笑　陈传理
　　　　罗增儒　刘诗雄

前　　言

1981年，中国数学会开始举办“高中数学联赛”，经过1981、1982、1983三年的实践，这一群众性的数学竞赛活动得到了全国广大中学师生的欢迎，也得到了教育行政部门、各级科学技术协会以及社会各阶层人士的肯定和支持；“试题所涉及的知识范围不超出现行教学大纲”这一命题原则，也得到了更多的理解和拥护，由此“高中数学联赛”已形成制度。同时，全国各地都提出了举办“初中数学联赛”的要求。1984年，中国数学会普委会委托天津数学会举办一次初中数学邀请赛，有14个省、市、自治区参加。这次活动的成功，为后来举办“初中数学联赛”摸索了很多经验。当年11月，在宁波召开的中国数学会第三次普及工作会议一致通过了举办“初中数学联赛”的决定，并详细商定了一些具体办法，规定“初中数学联赛”在每年四月的第一个星期日举行。会上湖北省数学会、山西省数学会、黑龙江省数学会分别主动承担了1985年、1986年、1987年的具体工作，从此，“初中数学联赛”也形成了制度。

为了规范数学竞赛的命题，明确竞赛内容的要求，并使参加竞赛的同学有所遵循，应广大师生和教练员的要求，1992年中国数学会普委会第七次全国工作会议上讨论并通过了“数学竞赛大纲（初审稿）”。后几经研讨和修改于1994年3月福州会议上通过了“初中数学竞赛大纲（修订稿）”。

本书是根据“初中数学竞赛大纲（修订稿）”并参考了

“教学大纲”而编写的。按年级分三册，在内容安排上力争与课堂教学同步，每册都比课堂教学内容加深加宽，并补充了教学中没有而竞赛中要求的内容、方法和思想。在编排体例上按教程的形式，分章节，每节后都有习题；为便于教和学，每个习题书后都附有解答或提示。为了给同学们提供练习的机会，每一本教程都另配有一本练习册，练习册与教程的章节顺序一致，其题目主要选自各级各类竞赛试题或预选题。

由于目前我国初中教学正向九年义务教育大纲过渡，本教程在安排上考虑了过渡时期的特点，在内容编排上兼收并蓄，使用者可按教学进程删减选用部分章节，有些课外内容可提前或错后讲解。

参加本书编写的都是中国数学奥林匹克高级教练员，他们在培训学生和教师上有丰富的经验，本书是他们经验的总结。我们出版这套书，渴望对参加竞赛的同学、辅导教师提供学习、辅导的资料和方法，以教材的形式编写就是希望能更加实用。

书中的缺点和错误欢迎读者指正。

袁宗沪

1994 年 5 月

中国数学会普及工作委员会

简　介

中国数学会是受中国科学技术协会领导的全国性学术团体，中国数学会普及工作委员会是其下属机构，成立于1980年，该委员会把开展群众性数学竞赛作为它的一项主要工作，目前由它主办的全国性中小学数学竞赛包括：

“全国小学数学奥林匹克”（创办于1991年），它是一个“普及型，大众化”的活动，分为初赛（每年3月）、决赛（每年4月）和总决赛（即夏令营、每年暑期）。

“全国初中数学联赛”（创办于1984年），采用“轮流做东”的形式由各省、市、自治区数学竞赛组织机构具体承办，每年4月举行，分为一试和二试。

“全国高中数学联赛”（创办于1981年），承办方式与初中联赛相同，每年10月举行，分为一试和二试，在这项竞赛中取得优异成绩的全国约90名学生有资格参加由中国数学会主办的“中国数学奥林匹克（CMO）即全国中学生数学冬令营”（每年元月）。

此外该委员会还配合中国数学奥林匹克委员会组织冬令营活动、选拔与培训国家集训队和代表队，为近年来我国在国际数学奥林匹克（IMO）中取得优异成绩作出了贡献。

为了使各种类型、各个层次的数学普及读物以及中小学

课内外教材的策划、编写形成规模与系列，中国数学会普及工作委员会与开明出版社共同创办了“数学编辑室”。

本书主编裘宗沪教授是中国数学会普及工作委员会主任、中国数学奥林匹克委员会副主席。1993年被国家数学竞赛世界联盟（WFNMC）授予“爱尔特希（Erdös）国家奖”，这是第一位获此殊荣的亚洲数学家。

目　　录

第一章　函数……………………………………………（1）

§1·1　函数的概念与图象……………………………（1）

§1·2　二次函数………………………………………（8）

§1·3　含参数的二次函数……………………………（15）

§1·4　二次方程与二次不等式………………………（22）

§1·5　二次函数的最值………………………………（29）

第二章　解三角形……………………………………（37）

§2·1　三角函数………………………………………（37）

§2·2　正弦定理和余弦定理…………………………（44）

§2·3　正弦定理和余弦定理的应用…………………（49）

§2·4　三角形的面积问题……………………………（64）

第三章　相似形………………………………………（70）

§3·1　比例线段………………………………………（70）

§3·2　相似三角形……………………………………（77）

§3·3　面积和面积方法………………………………（84）

§3·4　共线点与共点线………………………………（93）

第四章　圆……………………………………………（100）
§4·1　圆的有关性质……………………………………（100）
§4·2　圆的位置关系……………………………………（107）
§4·3　四点共圆…………………………………………（114）
§4·4　四种命题…………………………………………（121）

第五章　平方数、勾股数和不定方程…………………（128）
§5·1　完全平方数………………………………………（128）
§5·2　勾股数……………………………………………（137）
§5·3　一些特殊不定方程的解法………………………（144）

第六章　反证法、极端原理和存在性问题……………（155）
§6·1　反证法……………………………………………（155）
§6·2　极端原理…………………………………………（163）
§6·3　存在性问题………………………………………（169）

第七章　覆盖问题……………………………………（177）

习题提示与解答………………………………………（187）
附录：　初中数学竞赛大纲……………………………（252）

第一章　函数

函数是数学中最重要的概念之一．由于引进了变量和函数的定义，可以用较高的观点来看待中学范围内的许多知识，揭示它们的内在联系．另外，函数定义最生动地反映了事物的相互联系和相互制约，使我们在考察问题时不局限在静止的、孤立的情况，而必须用运动、发展、变化的观点去研究．因此，函数也是数学竞赛中的重要内容．

§1·1　函数概念与图象

若对于数集 X 中的每个 x，有且仅有一个 y 值与之对应，则称 y 是 x 的函数．由 x 确定 y 值的对应规律（或法则）用"f"表示．记 y 为 $f(x)$，即 $y=f(x)$．x 的允许值范围又称为函数的定义域．应当注意的是，记号 $f(x)$ 既表示函数本身，有时也用来表示函数在 x 处的取值．$f(x)$ 是一个完整的记号，不能把 f 与 x 分开．一个函数由它的定义域与对应规律完全确定．通常，用数学式子表示函数关系，也可以通过坐标系用图形表示函数．

1．函数值与函数表达式

对于函数 $y=f(x)$，若任取 $x=a$，则可求出所对应的 y 值，$y=f(a)$. 在解题中往往会遇到求函数值与确定函数表达式的问题.

例 1 已知 $f(x)=(m^2+2m)x^{m^2+m-1}$，当 m 为何值时：

(1) $f(x)$ 是正比例函数；

(2) $f(x)$ 是反比例函数；

(3) $f(x)$ 是二次函数.

解 (1) 若 $f(x)$ 是正比例函数，则 m 须满足

$$\begin{cases} m^2+2m\neq 0 \\ m^2+m-1=-1, \end{cases} \text{即} \begin{cases} m(m+2)\neq 0 \\ (m-1)(m+2)=0. \end{cases}$$

$\therefore\ m=1.$

(2) 若 $f(x)$ 是反比例函数，则 m 须满足

$$\begin{cases} m^2+2m\neq 0 \\ m^2+m-1=-1, \end{cases} \text{即} \begin{cases} m(m+2)\neq 0 \\ m(m+1)=0. \end{cases}$$

$\therefore\ m=-1.$

(3) 要 $f(x)$ 是二次函数，则 m 须满足

$$\begin{cases} m^2+2m\neq 0 \\ m^2+m-1=2, \end{cases} \text{即} \begin{cases} m(m+2)\neq 0 \\ m^2+m-3=0. \end{cases}$$

$\therefore\ m=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$

答：当 $m=1$ 时，$f(x)$ 是正比例函数；当 $m=-1$ 时，$f(x)$ 是反比例函数；当 $m=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 时，$f(x)$ 是二次函数.

例 2 设 $S(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$C(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，

求证：(1) $S\left(\dfrac{1}{t}\right)=S(t)$；

(2)$S^2(t)+C^2(t)=1$.

证 (1) $S(\frac{1}{t})=\frac{\frac{2}{t}}{1+(\frac{1}{t})^2}=\frac{2t}{1+t^2}=S(t)$.

(2) $S^2(t)+C^2(t)=(\frac{2t}{1+t^2})^2+(\frac{1-t^2}{1+t^2})^2$

$$=\frac{4t^2+(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}=\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2}=1.$$

例3 已知 $f(\frac{2x+1}{x})=x^2-3x+7$,试求 $f(x)$的表达式.

解 令$\frac{2x+1}{x}=t$,则 $x=\frac{1}{t-2}$.

$\therefore$ $f(t)=(\frac{1}{t-2})^2-3\cdot(\frac{1}{t-2})+7$

$$=\frac{1-3(t-2)+7(t-2)^2}{(t-2)^2}$$

$$=\frac{7t^2-31t+35}{(t-2)^2},$$

$\therefore$ $f(x)=\frac{7x^2-31x+35}{(x-2)^2}$.

2. 求函数的定义域

例4 求下列函数的定义域:

(1)$y=lg\sqrt{lg\sqrt{lg\sqrt{lgx}}}$.

(2)$f(x)=m\sqrt{x^{2n}-a^{2n}}$.($a\neq0$,$m$、$n$ 为正整数,$m>1$)

解 (1)由 $lgx>0$ 知 $x>1$,

$lg\sqrt{lgx}>0$ 知 $x>10$,

$lg\sqrt{lg\sqrt{lgx}}>0$ 知 $x>10^{100}$.

所以函数的定义域为 $x>10^{100}$.

(2)因为 $f(x)=m\sqrt{x^{2n}-a^{2n}}$($a\neq0$,$m$、$n$ 为正整数,$m>1$).

所以当 m 为偶数时,

由 $$x^{2n}-a^{2n}\geqslant0,\text{即 } x^{2n}\geqslant a^{2n}$$

得 $$|x|\geqslant|a|$$

于是 $$x\leqslant-|a|\text{ 或 }x\geqslant|a|.$$

当 m 为奇数时,自变量 x 取一切实数.

3. 函数图象

函数图象能生动、形象地反映函数的性质借助于函数图象还能讨论函数解析式中参变系数的取值范围.

例 5 作函数 $y=|2x-1|+|x+1|$ 的图象.

分析 根据绝对值定义,先将绝对值符号去掉,分成几个不含有绝对值的一次函数.

解 由 $2x-1=0$、$x+1=0$ 即 $x=\frac{1}{2}$,-1 把全体实数划分为三个部分,进行讨论.

若 $x\leqslant-1$,则 $y=-(2x-1)-(x+1)=-3x$;

若 $-1<x<\frac{1}{2}$,则 $y=-(2x-1)+(x+1)=-x+2$;

若 $x\geqslant\frac{1}{2}$,则 $y=(2x-1)+(x+1)=3x$.

因此,所求图形如图 1—1.

例 6 作 $y=2|x-3|$,$y=x-a$ 的图象,问 a 取什么值时,它们可围出一个平面区域,并求其面积.

解 如图 1—2,$y=2|x-3|$ 的图象是折线 C;$y=x-a$

的图象是直线 l.

要使 C 和 l 相交，须且仅须 $a<3$. 这时它们的交点是

$$A(6-a,6-2a),$$

$$B\left(\frac{a+6}{3},\frac{6-2a}{3}\right).$$

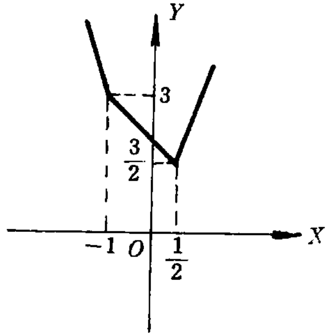

图1-1

下面计算$\triangle ABC$的面积.

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \text{梯形 } AHKB-\triangle AHC-\triangle BKC\\ &=\frac{1}{2}\left(6-2a+\frac{6-2a}{3}\right)\times\left(6-a-\frac{a+6}{3}\right)-\frac{1}{2}\times(6-2a)(6-a-3)\\ &\quad-\frac{1}{2}\times\frac{6-2a}{3}\times\left(3-\frac{a+6}{3}\right)\\ &=\frac{2}{3}(3-a)^2\end{aligned}$$

$(a<3)$.

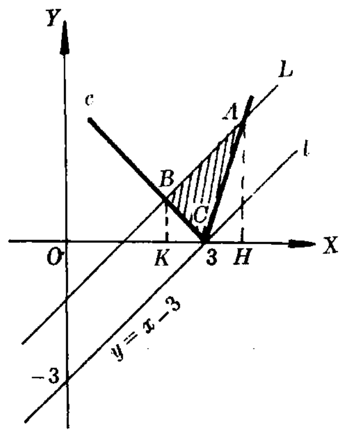

图1-2

例7 设 a,b,c 为常数，且 $a<b<c$，试求 $y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的最小值.

解 首先去绝对值.

当 $x\geqslant c$ 时，

$$y=3x-(a+b+c);$$

当 $b\leqslant x<c$ 时，

$$y=x-(a+b-c);$$

当 $a<x<b$ 时，

$$y=-x-(a-b-c);$$

当 $x\leqslant a$ 时，

$$y=-3x+(a+b+c).$$

由此可得，函数 $y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的图象如图 1－3 所示，其中

$A(b,c-a)$，$B(a,-2a+b+c)$，$D(c,2c-a-b)$.

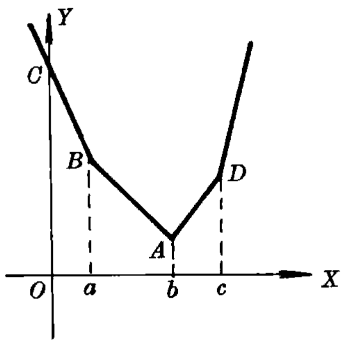

图 1－3

由于图象是折线，所以最小值必定在 A,B,D 这三个折点上取得．因为

$$c-a<-2a+b+c,c-a<2c-a-b,$$

所以最小值在 A 点取得，即当 $x=b$ 时，y 的最小值是 $c-a$.

例 8　设 $f(x)=ax+\frac{1}{a}(1-x)(a>0)$，求 $f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时的最小值 $g(a)$.

解　$f(x)=(a-\frac{1}{a})x+\frac{1}{a}(a>0)$.

当 $a>1$ 时，$a-\frac{1}{a}>0$，$f(x)$ 随 x 的增大而增大，这时 $f(x)$ 在〔0,1〕上的最小值应在 $x=0$ 处，即 $f(0)=\frac{1}{a}$.

当 $0<a<1$ 时，$a-\frac{1}{a}<0$，$f(x)$ 随 x 的增大而减小．$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值应在 $x=1$ 处，即 $f(1)=a$.

当 $a=1$ 时，$f(x)=1$ 是常量函数，

$$\therefore\quad g(a)=\begin{cases}\frac{1}{a} & (a\geqslant 1),\\ a & (0<a<1).\end{cases}$$

习题 1·1(答案见 P187)

(答案见 P187)

1. 已知 $y=y_1+y_2^2$，其中 y_1 与 x 成正比例函数，y_2 与 x 成反比例函数，且当 $x=2$，$x=3$ 时，y 的值都为 19. 求 y 关于自变量 x 的函数表达式.

2. 令 $f(x)$ 是一个多项式，对所有实数 x，$f(x^2+1)=x^4+5x^2+3$，试确定，对所有实数 x，$f(x^2-1)$ 的表达式.

3. 设 $f(x)=ax^2+bx+5$，且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$，求 a、b 的值.

4. 已知函数 $y=\dfrac{\sqrt{3-x}}{(1-|x-1|)lg(x+2)}$，求自变量 x 的取值范围.

5. 若函数 $f(u)$ 的定义域为 $-1<u<2$，求 $f(lgx)$ 的定义域.

6. 已知 $f(x)=(2x^5+2x^4-53x^3-57x+54)^{1992}$，求 $f[\frac{1}{2}(\sqrt{111}-1)]$.

7. 作函数 $|y|=|x+2|$ 的图象，并求出图象与 y 轴所围成的区域的面积.

§1·2 二次函数

二次函数在中学数学中的地位十分显要，起着承上启下的枢纽作用．二次三项式可以看作是带有变数的二次函数的表达式，求二次三项式的值，实质上就是求二次函数的值；一元二次方程的讨论，就是研究二次函数在定义域内的零点情况；至于一元二次不等式，就是研究二次函数在定义域内的正值区间和负值区间．这样，四个"二次"就四位一体，融化渗透在一起，而二次函数起了中心环节和主导作用.

1. 二次函数的图象

设二次函数 $y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$ ①

经配方，得

$$y=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}, \qquad ②$$

或
$$y=a(x+m)^2+n, \qquad ③$$

其中 $m=\frac{b}{2a}$，$n=\frac{4ac-b^2}{4a}$，或记为 $n=-\frac{\Delta}{4a}$，$\Delta=b^2-4ac$.

我们知道，当 a,b,c 为确定的实数时，①，②，③对应的图象是确定的抛物线．由②能明显看出这个抛物线的顶点是 $(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})$，对称轴方程是 $x=-\frac{b}{2a}$，而系数 $a\neq 0$ 确定抛物线的开口大小和方向，当 $a>0$ 时抛物线开口向上，当 $a<0$ 时抛物线的开口向下，$|a|$ 越大则抛物线靠近对称轴.

例 1 已知二次函数的图象的顶点为(1,2)，且与直线 $y=2x+k$ 相交于(2,－1)，试求：

(1)二次函数的解析式；

(2)k 的值；

(3)该二次函数的图象与直线 $y=2x+k$ 的另一交点的坐标.

解 (1)因二次函数的图象的对称轴平行于 y 轴，且已知其顶点为(1,2)，故可设所求解析式为 $y=a(x-1)^2+2$.

又∵ 其图象与 $y=2x+k$ 相交于(2,−1)，

∴ $-1=a(2-1)^2+2$，故 $a=-3$.

∴ 所求二次函数的解析式为

$$y=-3(x-1)^2+2=-3x^2+6x-1.$$

(2)∵ 直线 $y=2x+k$ 过(2,−1)，

∴ $-1=4+k$，故 $k=-5$.

(3)解方程组 $\begin{cases} y=2x-5, \\ y=-3x^2+6x-1 \end{cases}$

得另一交点的坐标为$\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{19}{3}\right)$.

2. 二次函数的图形变换

二次函数的图形变换主要是对称变换和平移变换，而对称变换主要指关于直线 $x=a$、直线 $y=p$ 以及关于点(h,k)的对称变换，下面只通过实例说明.

例 2 求曲线 $y=2x^2+4x+3$ 关于点 $M(2,3)$的对称曲线方程.

分析 点(x,y)关于点(h,k)的对称点坐标是$(2k-x,2k-y)$.

解法一 曲线 C：$y=2x^2+4x+3$ 关于直线 $x=2$ 的对称曲线为 C_1，在 C 的方程中以 $2\times2-x$ 代 x，y 保持不变，则