数学

配人教A版

必修4

无防伪标 视为盗版

主　编：泓　翰
副主编：商学浩

高中新课标 GAO ZHONG XIN KE BIAO

课时1+3

学案与测评

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

数学

配人教A版

必修4

主编 泓翰

副主编 商学浩

编写 杨洪伟 张金信 杨学华

高中新课标 GAO ZHONG XIN KE BIAO

课时1+3

学案与测评

WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

学案与测评：人教 A 版. 数学. 4：必修/泓翰主编. —武汉：武汉大学出版社，2008.9

ISBN 978-7-307-06344-0

Ⅰ. 学… Ⅱ. 泓… Ⅲ. 数学课—高中—习题 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 105054 号

责任编辑：李汉保

出版发行：武汉大学出版社(430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn 网址：www.wdp.com.cn)

印刷：济南铁路局印刷厂

开本：880mm×1230mm 1/16 印张：6.5 字数：280 千字

版次：2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-06344-0/G·1169 定价：17.50 元

Instruction [使用说明]

《学案与测评》是高中同步教学辅导用书，它以国家教育部新课程改革精神为指导，按照教育教学规律，科学地将教学与学习过程划分为课前、课中、课后三个阶段，并根据每个阶段的不同特点，确定浏览、研读、尝试、检测、评价等不同学习方式。本书循序渐进的合理设计，科学严谨的规范操作，将会确保广大学子在体味成长快乐的同时，享受成绩飞升的喜悦！

同步到课时，精确到课堂。
关怀到细节，服务到全程！

使用阶段	栏目名称		使用建议	使用效果
 课前	基础探究		课前预习	掌握本课时基础知识
 课中	互动学案	重点突破	课堂及时巩固	掌握重、难点知识
		范例点评	课堂梳理题型及方法	掌握各类题型的解题方法
		举一反三	课堂及时训练	熟练运用各类题型的解题方法
 课后	同步测评		实战练兵，自我检测	夯实基础，查缺补漏
	小结复习		自我梳理	掌握本章重、难点知识 构建完整的知识框架
	单元测试		正规测试	加强实战演练，提高应试技巧

泓翰编撰

www.honghanbook.com

高中新课标学案与测评【编委会】

xue an yu ce ping

泓翰编撰

www.honghanbook.com

Contents [目录]

高中新课标学案与测评

第一章　三角函数

第二章　平面向量

泓翰编撰

第三章　三角恒等变换

第一章 三角函数

第1课时　任意角

基础探究

1. 按________方向旋转所成的角叫做正角，按________方向旋转所成的角叫做负角；如果一条射线________，我们称它形成了一个零角.

2. 在直角坐标系中研究角时，如果角的顶点与____________，角的始边与________________，那么，角的终边(除终点外)在第几象限，我们就说这个角是第几象限角. 若角的终边落在坐标轴上，则认为这个角________________.

3. 所有与角 α ______________，连同角 α 在内，可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成________.

互动学案

重点突破

1. 在研究象限角时要注意以下几个问题：

(1)象限角的前提条件是，角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的正半轴重合；

(2)角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限的角(或者说这个角属于第几象限)；

(3)角的终边若落在坐标轴上，就说这个角不属于任何象限；

(4)要能熟练地写出各象限角的取值范围，如：

第一象限角

$\{\alpha|k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$；

第二象限角

$\{\alpha|k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$；

第三象限角

$\{\alpha|k\cdot360°+180°<\alpha<k\cdot360°+270°,k\in\mathbf{Z}\}$；

第四象限角

$\{\alpha|k\cdot360°+270°<\alpha<k\cdot360°+360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

2. 终边相同的角：

(1)研究终边相同的角的前提条件是：角的顶点在坐标原点，角的始边与 x 轴的正半轴重合；

(2)所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合 $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

(3)对于终边相同的角应注意以下几点：

①k 为整数；

②α 为任意角；

③$k\cdot360°$ 与 α 之间用“+”号连接，如 $k\cdot360°-45°$ 应看成是 $k\cdot360°+(-45°)$；

④终边相同的角不一定相等，但相等的角终边一定相同；

⑤终边相同的角有无数多个，它们相差 360°的整数倍.

范例点评

题型一　角的概念问题

【例1】 设 $M=\{$小于 90°的角$\}$，$N=\{$第一象限的角$\}$，则 $M\cap N=$ （　　）

A. {锐角}　　B. {小于 90°的角}

C. {第一象限的角}　　D. 以上都不对

分析　小于 90°的角由锐角、零角、负角组成，而第一象限的角包含锐角及其他终边在第一象限的角，所以 $M\cap N$ 由锐角和终边在第一象限的负角组成，故上述 A、B、C 都不对.

解　D

点评　小于 90°的角不都是锐角，它还包含零角和负角，只有小于 90°的正角才是锐角，要注意从现在开始角已经推广到了任意角.

举一反三

1. (2006·天津·模拟)下列各命题正确的是 （　　）

A. 终边相同的角一定相等

B. 第一象限的角都是锐角

C. 锐角都是第一象限的角

D. 小于 90°的角都是锐角

题型二　判断象限角

【例2】 在 0°～360°之间，求出与下列各角终边相同的角，并判断下列各角是哪个象限的角.

(1) 908°28′；(2) −734°.

分析　找出在 0°～360°范围内与所研究角终边相同的角.

解　(1) 908°28′=188°28′+2×360°，则 188°28′即为所求角，因它是第三角限的角，故 908°28′也是第三象限的角；

(2) $-734°=346°-3\times360°$，则 $346°$ 即为所求角，因它是第四象限的角，故 $-734°$ 也是第四象限的角.

点评　终边相同的角，其所在的象限是相同的，因而在判断象限角时要注意应用终边相同的角的公式. 方法是将角表示为"$\alpha+k\cdot360°$，其中 $k\in\mathbf{Z},\alpha\in[0°,360°)$"的形式，由 α 所在的象限来判断.

举一反三

2. 已知角 α 是第三象限角，则角 $-\alpha$ 的终边在　　(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

题型三　象限角及终边相同角的集合的写法

【例 3】 写出终边在第一、三象限的角的集合.

分析　应用终边相同的角的知识分别写出第一、三象限角的边界的表达式，再用不等式表示其间的角，最后求满足条件的角的集合的并集，并用最简单的式子表示.

解　方法一：终边在第一象限的角的集合为

$\{\alpha|k\cdot360°<\alpha<90°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，

终边在第三象限的角的集合为

$\{\alpha|180°+k\cdot360°<\alpha<270°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，

又 $k\cdot360°=2k\cdot180°$，

$180°+k\cdot360°=(2k+1)\cdot180°$，

故终边在第一、三象限的角的集合为

$\{\alpha|k\cdot180°<\alpha<90°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

方法二：终边在 x 轴上的角为 $\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$，终边在 y 轴上的角为 $\{\beta|\beta=90°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$，

故终边在第一、三象限的角的集合为

$\{\alpha|k\cdot180°<\alpha<90°+k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$.

点评　在 $(0°,360°)$ 内先寻找边界角，然后再表示终边相同的角.

举一反三

3. 终边与坐标轴重合的角 α 的集合是　　(　　)

A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha|\alpha=k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot90°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$

题型四　已知角 α 所在象限角，求 $2\alpha,\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{3}$ 所在象限角

【例 4】 若 α 是第一象限角，求 $\frac{\alpha}{3}$ 是第几象限角.

分析　首先表示出已知象限角，运用不等式的性质得出 $\frac{\alpha}{n}$ 的范围，然后分类讨论.

解　$\because\alpha$ 是第一象限角，

$\therefore k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore\frac{k}{3}\cdot360°<\frac{\alpha}{3}<\frac{k}{3}\cdot360°+30°,k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=3n$ 时，则有 $n\cdot360°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+30°,n\in\mathbf{Z}$，

$\therefore\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限角.

当 $k=3n+1$ 时，$n\cdot360°+120°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+150°,n\in\mathbf{Z}$，

$\therefore\frac{\alpha}{3}$ 是第二象限角.

当 $k=3n+2$ 时，$n\cdot360°+240°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+270°,n\in\mathbf{Z}$，

$\therefore\frac{\alpha}{3}$ 是第三象限角.

综上，知 $\frac{\alpha}{3}$ 为第一、二、三象限角.

点评　已知 θ 为某象限的角，如何确定 $\frac{\theta}{n}$ 所在象限的问题：

(1) $\frac{\theta}{2}$ 所在象限的问题：

作出各个象限的角平分线，它们与坐标轴把周角等分成8个区域，从 x 轴的非负半轴起，按逆时针方向把这8个区域依次循环标上号码1、2、3、4，则标号是几的两个区域，就是 θ 为第几象限的角时，$\frac{\theta}{2}$ 终边落在的区域，$\frac{\theta}{2}$ 所在的象限就可以直观地看出，如图1所示.

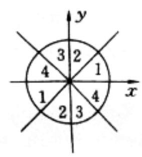


图 1

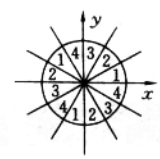


图 2

(2) $\frac{\theta}{3}$ 所在象限的问题：

作出三等分各个象限的从原点出发的射线，它们与坐标轴把周角等分成12个区域，从 x 轴的非负半轴起，按逆时针方向把这12个区域依次循环标上号码1、2、3、4，则标号是几的区域，就是 θ 为第几象限的角时，$\frac{\theta}{3}$ 终边落在的区域，$\frac{\theta}{3}$ 所在的象限就可以直观地看出了，如图2所示.

(3) $\frac{\theta}{n}$ 所在象限的问题：

一般地，要确定 $\frac{\theta}{n}$ 所在的象限，可以作出 n 等分各个象限的从原点出发的射线，它们与坐标轴把周角等分成 $4n$ 个区域，从 x 轴的非负半轴起，按逆时针方向把这 $4n$ 个区域依次循环标上号码1、2、3、4，则标号是几的区域，就是 θ 为第几象限的角时，$\frac{\theta}{n}$ 终边落在的区域，$\frac{\theta}{n}$ 所在的象限就可以直观地看出.

举一反三

4. 已知角 α 是第二象限角，求角 2α 的终边所在的位置.

误区警示

对角的理解不能仅限于初中阶段对角的认识.

【案例分析】 用集合表示下列范围内的角.

(1) 0°到 90°的角;(2) 第一象限的角;(3) 锐角;

(4) 小于 90°的角.

错解 这四个范围均可表示为(0°,90°).

正解 (1) {0°到 90°的角}=[0°,90°];

(2) {第一象限的角}=$\{\alpha|k\cdot 360°<\alpha<90°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}\}$;

(3) {锐角}=(0°,90°);

(4) {小于 90°的角}=$\{\theta|\theta<90°\}$.

同步测评

基础巩固

①将$-885°$化为$\alpha+k\cdot 360°(k\in \mathbf{Z},\alpha\in[0°,360°))$的形式是 ( )

A. $-165°+(-2)\times 360°$　　B. $195°+(-3)\times 360°$

C. $195°+(-2)\times 360°$　　D. $165°+(-3)\times 360°$

②已知角α终边上有一点$P(a,0)(a>0)$,则角α是 ( )

A. 第一象限角　　B. 第四象限角

C. 第一或第四象限角　　D. 以上都不对

③下列各角中,与角 330°的终边相同的角是 ( )

A. 510°　B. 150°　C. $-150°$　D. $-390°$

④下列角中,属于第二象限的是 ( )

① 160°　② 490°　③ $-960°$　④ $-1\ 600°$

A. ①　　B. ①②

C. ①②③　　D. ①②③④

⑤角α的终边落在第二、四象限角平分线上,则角α的集合是________.

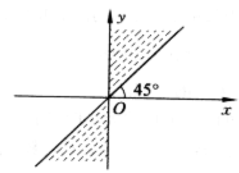
⑥与$-1\ 484°37'$终边相同且绝对值最小的角是________.

能力提高

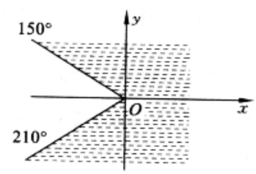
⑦若α、β的终边相同,则$\alpha-\beta$的终边在________上.

⑧写出角的终边在下图阴影区域内的角的集合(包括边界).

(1)



(2)



拓展延伸

⑨(2005·全国Ⅲ·改编)已知α是第三象限的角,则$\frac{\alpha}{2}$是 ( )

A. 第一或第二象限的角　　B. 第二或第三象限的角

C. 第一或第三象限的角　　D. 第二或第四象限的角

第 2 课时　弧度制

基础探究

1. 把________叫 1 弧度的角,用________表示,读作________.

2. 正角的弧度数是________,负角的弧度数是________,零角的弧度数是________. 如果半径为r的圆心角α所对弧长为l,则角α的弧度数的绝对值是________.

3. 360°=________rad,180°=________rad,1°=________rad≈________rad,1 rad=________≈________=________.

4. 在弧度制下,角的集合与实数集$\mathbf{R}$之间建立起________的关系:每一个角都有________的一个实数(即这个角的弧度数)与它对应;反过来,________.

互动学案

重点突破

1. 弧度制和角度制互化的具体做法如下:首先牢记最基本的对应关系:180°=π rad,然后将所需转化的值按要求填入下式:

$\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{这个角的弧度数}{这个角的角度数}$，

最后将未填的部分求出，再添上相应的单位即可.

2. 角度制与弧度制的比较

(1)弧度制是以“弧度”为单位度量角的制度，角度制是以“度”为单位度量角的制度.

(2)1弧度是等于半径长的圆弧所对的圆心角(或该弧)的大小，而1°是圆周长的$\frac{1}{360}$所对的圆心角(或该弧)的大小.

(3)不管是以“弧度”还是以“度”为单位的角的大小都是一个与半径的大小无关的常数.

(4)用弧度为单位表示角的大小时，“弧度”两字可以省略不写，这时弧度数在形式上虽是一个无名数(不带单位的数)，但我们应该把它理解为名数(带单位的数)，如 sin 2 是指 sin(2 弧度)，$\pi=180^\circ$是指 π 弧度$=180^\circ$；但如果以度为单位表示角时，度就不能省去.

(5)以弧度为单位表示角时，常常把弧度数写成多少 π 的形式，如无特殊要求，不必把 π 写成小数，如 $45^\circ=\frac{\pi}{4}$ 弧度，不必写成 $45^\circ\approx0.79$ 弧度.

(6)弧度制与角度制一样，只是一种度量角的方法.弧度制与角度制相比有一定的优点：其一是在进位上，角度制在度、分、秒上是60进位制，不便于计算，而弧度是十进位制，给运算带来方便；其二是在有关公式中，用弧度制比用角度制要简单.

范例点评

题型一　弧度制概念问题

【例1】 下列命题中真命题是　　(　　)

A. 一弧度是一度的圆心角所对的弧

B. 一弧度是长度为半径的弧

C. 一弧度是一度的弧与一度的角之和

D. 一弧度是长度等于半径长的弧所对的圆心角的大小，它是角的一种度量单位

分析　本题考查弧度制下，角的度数单位：一弧度的概念.根据一弧度的定义“我们把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做一弧度的角”对照各选项，可知D为真命题.

解　D

点评　充分利用圆的知识加深理解弧度的定义.

举一反三

1. 下列命题中假命题是　　(　　)

A. “度”与“弧度”是度量角的两种不同的度量单位

B. 一度的角是周角的$\frac{1}{360}$，一弧度的角是周角的$\frac{1}{2\pi}$

C. 根据弧度的定义，180°一定等于 π 弧度

D. 不论用角度制还是用弧度制度量角，它们均与圆的半径长短有关

题型二　角度与弧度的换算

【例2】 把22°30′化为弧度；把$\frac{\pi}{12}$化为角度.

分析　利用 $1\text{ rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$，$1^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad 进行换算.对于特殊角可利用 π rad$=180^\circ$直接换算.

解　$22^\circ30'=22.5^\circ=22.5\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{8}$ rad；

$\frac{\pi}{12}\text{ rad}=\frac{\pi}{12}\times\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{180^\circ}{12}=15^\circ$.

点评　应熟练掌握0°、30°、45°、60°、90°、120°、150°、270°的弧度表示.

举一反三

2. -300°化为弧度是　　(　　)

A. $-\frac{4}{3}\pi$　　B. $-\frac{5}{3}\pi$

C. $-\frac{7}{4}\pi$　　D. $-\frac{7}{6}\pi$

题型三　在弧度制下从(a,b)范围内找出与已知角终边相同的角

【例3】 已知角 α 的终边与$\frac{\pi}{3}$的终边相同，在$[0,2\pi)$内求$\frac{\alpha}{3}$.

分析　这里需用弧度制表示与$\frac{\pi}{3}$终边相同的角.

解　$\because\alpha$的终边与$\frac{\pi}{3}$的终边相同，

$\therefore\alpha=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，$\therefore\frac{\alpha}{3}=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\ (k\in\mathbf{Z})$，

又$\because 0\leqslant\frac{\alpha}{3}<2\pi$，$\therefore 0\leqslant\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}<2\pi$.

当 $k=0、1、2$ 时，有$\frac{\alpha}{3}=\frac{\pi}{9}、\frac{7\pi}{9}、\frac{13\pi}{9}$，它们均在$[0,2\pi)$内，

故所求角为$\frac{\pi}{9}、\frac{7\pi}{9}、\frac{13\pi}{9}$.

点评　与 α 终边相同的角的弧度制形式为 $2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$，这里 α 应为弧度.寻找某个区间内与 α 终边相同的角 β 时，要先表示出 β 的一般形式，然后再讨论 k 的取值.

举一反三

3. 已知角$\frac{\alpha}{2}$的终边与$\frac{\pi}{4}$的终边相同，在$[0,2\pi)$内求 α.

题型四 扇形面积公式及弧长公式的应用

【例4】 已知一扇形的周长为40 cm，当它的半径和圆心角取什么值时，才能使扇形的面积最大？最大面积是多少？

分析 将扇形面积表示为半径的函数，然后求最大值.

解 设扇形的圆心角为θ，半径为r，弧长为l，面积为S，则$l+2r=40$，∴ $l=40-2r$，

∴ $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}(40-2r)r=-r^2+20r=-(r-10)^2+100$，

∴ 当$r=10$ cm时，扇形的面积最大，最大值为$100\ \text{cm}^2$，这时$\theta=\frac{l}{r}=\frac{40-2\times10}{10}=2$ rad.

点评 扇形四要素：S、l、r、θ，每三要素之间均构成联系，主要注意用弧度制来表示.

举一反三

4. 一条弦的长度等于半径r，求：

(1)这条弦所对的劣弧长；

(2)这条弦和劣弧所组成的弓形的面积.

误区警示

用弧度制表示角时，注意不能与角度制混合使用.

【案例分析】 把下列各角化成0到2π的角加上$2k\pi(k\in\mathbf{Z})$的形式.

(1) $\frac{23\pi}{3}$；(2) $-450°$.

错解 (1) $\frac{23\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+7\pi$；

(2) $-450°=-720°+270°=-4\pi+270°$.

正解 (1) $\frac{23\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}+6\pi$；(2) $-450°=\frac{3\pi}{2}-4\pi$.

同步测评

基础巩固

① 下列四个命题中，不正确的一个是 ( )

A. 半圆所对的圆心角的弧度数是π

B. 周角的大小等于2π

C. 长度等于半径的弦所对的圆心角大于1弧度

D. 半径为2，弧长为4的圆心角的弧度数为4

② $315°$角的弧度数为 ( )

A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{7\pi}{4}$ C. $-\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{5\pi}{4}$

③ 半径为r，圆心角是α(弧度)的扇形面积是 ( )

A. $\frac{1}{2}r^2\alpha$ B. $\frac{1}{2}r\alpha^2$

C. $\frac{1}{2}r\alpha$ D. $\frac{1}{2}r^2\alpha^2$

④ 下列终边相同的角是 ( )

A. $\frac{3}{2}\pi$和$2k\pi-\frac{3}{2}\pi(k\in\mathbf{Z})$ B. $-\frac{\pi}{5}$和$\frac{22}{5}\pi$

C. $-\frac{7}{9}\pi$和$\frac{11}{9}\pi$ D. $\frac{20}{3}\pi$和$\frac{122}{9}\pi$

⑤ 在半径为1的单位圆中，一条弦AB的长度为$\sqrt{3}$，则弦AB所对的圆心角α是 ( )

A. $\alpha=\sqrt{3}$ B. $\alpha<\sqrt{3}$

C. $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ D. $\alpha=120$

能力提高

⑥ 将分针拨慢10分钟，则分针转过的弧度数是________.

⑦ 若α和β的终边关于y轴对称，则必有 ( )

A. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

B. $\alpha+\beta=(2k+1)\pi\ (k\in\mathbf{Z})$

C. $\alpha+\beta=2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$

D. $\alpha+\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$

⑧ 半径为10 cm的滑轮，每分钟按逆时针方向旋转300转，求滑轮上长为12 cm的弦的中点P每秒钟经过的弧长.

拓展延伸

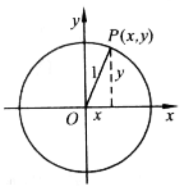
⑨ 已知扇形内切圆半径与扇形半径之比为1∶3，求内切圆面积与扇形面积之比.

第3课时　任意角的三角函数

基础探究

1. 在直角坐标系中,我们称以原点 O 为圆心,以单位长度为半径的圆为________.

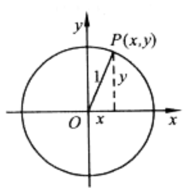
2. 如图,设 α 是一个任意角,它的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$,那么:



(1) y 叫 α 的________,记作________,即 $\sin\alpha=y$.
(2) x 叫 α 的________,记作________,即 $\cos\alpha=x$.
(3) $\frac{y}{x}$ 叫 α 的________,记作________,即 $\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$.

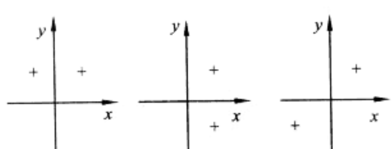
3. 正弦、余弦、正切都是以________为自变量,以________为函数值的函数,统称为三角函数.

4. 利用任意角定义三角函数,由图填表:



三角函数	定义	定义域
$\sin\alpha$	$\frac{y}{r}$	
$\cos\alpha$		
$\tan\alpha$		$\{\alpha\mid\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

5. 三角函数在各象限符号



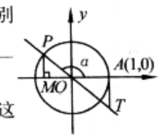
$\sin\alpha$　　$\cos\alpha$　　$\tan\alpha$

注意:口诀"一全正,二正弦,三两切,四余弦"

6. 终边相同角的同一三角函数值________.
$\sin(\alpha+k\cdot360^\circ)=$________[$\sin(\theta+k\cdot2\pi)=$________].
$\cos(\alpha+k\cdot360^\circ)=$________[$\cos(\theta+k\cdot2\pi)=$________].
$\tan(\alpha+k\cdot360^\circ)=$________[$\tan(\theta+k\cdot2\pi)=$________].

7. 三角函数线

(1)设角 α 的终边与单位圆的交点为 P,过点 P 作 x 轴的垂线,垂足为 M,则有向线段________分别是角 α 的正弦线与余弦线,即 $MP=$________$=\sin\alpha$, $OM=$________$=\cos\alpha$;



(2)过点 $A(1,0)$ 作单位圆的切线,设这条切线与角 α 的终边或角 α 终边的________交于点 T,则有向线段________就是角 α 的正切线,即 $AT=$________$=$________.

互动学案

重点突破

1. 任意角三角函数的定义:对于任一角 α 的终边上的任一点 $P(x,y)$, $\frac{y}{r}$、$\frac{x}{r}$、$\frac{y}{x}$ 这三个比值是唯一确定的,故 $\frac{y}{r}$、$\frac{x}{r}$、$\frac{y}{x}(x\neq0)$ 是 α 的函数.可以取 $r=1$,定义 α 的三角函数:设 α 是任一角,它的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$,那么 $\sin\alpha=y$, $\cos\alpha=x$, $\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$.

2. 三角函数的值在各象限的符号,依据定义转化为考查 x、y 的符号,可用"一全正,二正弦,三两切,四余弦"记忆取正值的情况,其含义是在第一象限各三角函数为正,在第二象限正弦为正,在第三象限正切和余切为正,在第四象限余弦为正.

3. 由三角函数的定义可得:终边相同的角的同一三角函数的值相等,由此可将求任意角的三角函数值,转化为求0到 2π 的角的三角函数值.

范例点评

题型一　求特殊角的三角函数值

【例1】 若角 α 的终边落在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上,求 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$.

分析　(1) 角 α 可能是第一象限角或第三象限角.
(2) 在 α 终边上找出到原点距离为1的点的坐标.
(3) 利用定义求出三角函数值.

解　设 $P(x,y)$,使 $|OP|=1$,于是 $x^2+y^2=1$,由 $y=\sqrt{3}x$ 得 $x=\pm\frac{1}{2}$.

当 $x=\frac{1}{2}$ 时, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$,有 $\sin\alpha=y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha=x=\frac{1}{2}$, $\tan\alpha=\frac{y}{x}=\sqrt{3}$;

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，有 $\sin\alpha=y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=x=-\frac{1}{2}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\sqrt{3}$.

点评 利用三角函数的定义可以求出特殊角的三角函数值.方法是确定角的终边与单位圆的交点坐标，利用三角函数定义给出三角函数值.

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	不存在	0	不存在	0

举一反三

1. 已知角 α 的终边上一点 P 的坐标为 $(-\sqrt{3},y)(y\neq0)$，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}y$，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$.

题型二 判定三角函数值的符号及求值问题

【例2】 判断下列各式的符号.

(1) $\tan250^\circ\cos(-350^\circ)$；(2) $\sin105^\circ\cos230^\circ$.

解 (1) ∵ 250° 是第三象限角，$-350^\circ=-360^\circ+10^\circ$ 是第一象限角，∴ $\tan250^\circ>0$，$\cos(-350^\circ)>0$，

∴ $\tan250^\circ\cos(-350^\circ)>0$.

(2) ∵ 105° 是第二象限角，230° 是第三象限角，

∴ $\sin105^\circ>0$，$\cos230^\circ<0$，∴ $\sin105^\circ\cos230^\circ<0$.

点评 若角确定，则角所在象限确定，角的各三角函数值的符号也就确定了.在判定符号时，要联系三角函数的定义，这样解题思路的形成就有了依托.

举一反三

2. 求值：$\sin(-1\ 320^\circ)\cos1\ 110^\circ+\cos(-1\ 020^\circ)\sin750^\circ+\tan495^\circ$.

题型三 求函数的定义域

【例3】 求下列函数的定义域

(1) $y=\sqrt{\sin x\cdot\tan x}$；(2) $y=\lg\sin2x+\sqrt{9-x^2}$.

分析 第(1)题要保证 $\sin x$、$\tan x$ 同号，还要注意 $\tan x$ 的定义域，第(2)题要使 $\sin2x>0$ 和 $9-x^2\geqslant0$ 同时成立.

解 (1) ∵ $\sin x\cdot\tan x\geqslant0$，

∴ $\sin x$ 与 $\tan x$ 同号或 $\sin x\cdot\tan x=0$，

故 x 是第一、四象限角或 x 轴上的角，

∴函数定义域为

$\left\{x\,\middle|\,2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi \text{ 或 } 2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2} \text{ 或 } x=k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2) 由题意知 $\begin{cases}\sin2x>0, & ①\\ 9-x^2\geqslant0. & ②\end{cases}$

由①得 $2k\pi<2x<2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，

即 $k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

由②得 $-3\leqslant x\leqslant3$.

所以 $-3\leqslant x<-\frac{\pi}{2}$ 或 $0<x<\frac{\pi}{2}$，

故定义域为 $\left\{x\,\middle|\,-3\leqslant x<-\frac{\pi}{2} \text{ 或 } 0<x<\frac{\pi}{2}\right\}$

点评 (1)要注意"$\sin x\cdot\tan x=0$"这一条件不能遗漏；同时在写定义域时不要写重了.如 $\left\{x\,\middle|\,2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2} \text{ 或 } x=k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，这样就重复了 $x=2k\pi$.

(2)在求①②的公共解时，可借助图形或让 k 取 0，±1、±2 等特殊值，再找公共域.

举一反三

3. 若 α 是第二象限的角，且 $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=-\cos\frac{\alpha}{2}$. 问 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角？

误区警示

利用三角函数定义求三角函数值时，要注意：准确确定角的终边与单位圆的交点坐标，或角的终边上一点到原点的距离 r.

【案例分析】 已知 α 的终边过点 $P(-3a,-4a)(a\neq0)$，则 $\sin\alpha=$________.

错解 方法一：$\sin\alpha=y=-4a$.

方法二：$r=\sqrt{(-3a)^2+(-4a)^2}=5a$，

$\therefore \sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-4a}{5a}=-\dfrac{4}{5}$.

正解　方法一：设$|OP|=r$，则 $r=\sqrt{(-3a)^2+(-4a)^2}=5|a|$，

$\therefore \sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-4a}{5|a|}$.

当 $a>0$ 时，$\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$；当 $a<0$ 时，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$.

方法二：设 α 的终边与单位圆的交点为$Q(x,y)$，则可设 $x=-3at$，$y=-4at$. 由$|OQ|^2=x^2+y^2=1$，

得$(-3at)^2+(-4at)^2=1$，$\therefore at=\pm\dfrac{1}{5}$，

即 $y=-\dfrac{4}{5}$或 $y=\dfrac{4}{5}$. 于是 $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$或 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$.

同步测评

基础巩固

①若 α 为第一象限角，那么 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ 中必定取正值的有　（　　）

A. 0个　B. 1个　C. 2个　D. 3个

②已知 $\tan x>0$，且 $\sin x+\cos x>0$，那么角 x 是　（　　）

A. 第一象限角　B. 第二象限角

C. 第三象限角　D. 第四象限角

③下列等式中成立的是　（　　）

A. $\sin 700^\circ=\sin 20^\circ$　B. $\sin 370^\circ=\sin(-350^\circ)$

C. $\cos\left(3\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}$　D. $\cos\dfrac{25}{6}\pi=\cos\left(-\dfrac{19}{6}\pi\right)$

④$5\sin 90^\circ+2\cos 0^\circ-3\sin 270^\circ+10\cos 180^\circ=$________.

⑤函数 $y=\dfrac{\sqrt{\sin x}+\lg\cos x}{\tan x}$的定义域为________.

⑥角 α 终边上点 $P(-3,a)$，且 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，则 $a=$________.

能力提高

⑦下列命题中是真命题的有　（　　）

① 如果 $\alpha\neq\beta$，那么 $\sin\alpha\neq\sin\beta$；

② 如果 $\sin\alpha\neq\sin\beta$，那么 $\alpha\neq\beta$；

③ 如果 $\sin\theta>0$，那么 θ 是第一或第二象限角；

④ 如果 θ 是第一或第二象限角，那么 $\sin\theta>0$.

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

⑧设 α 是第二象限角，$P(x,\sqrt{5})$是其终边上一点，若 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$，则 $\sin\alpha$ 的值为　（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{16-2x^2}}{4}$　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　C. $-\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　D. $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

拓展延伸

⑨（创新改编题）若 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，利用三角函数线证明：$1<\sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2}$.

第4课时　同角三角函数的基本关系

基础探究

同角三角函数基本关系：

(1)平方关系________________.

(2)商数关系________________.

互动学案

重点突破

1. 设 α 的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$，则 $x^2+y^2=1$. 于是 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；当 $\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$时，有 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$.

2. 利用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，可实现同角正、余弦值的相互转化. 但应注意分析角 α 所在的象限，以便于开方时正、负号的确定.

3. 由 $\tan^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1$，得 $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. 若已知 $\tan\alpha$，求 $\sin\alpha$ 或 $\cos\alpha$ 时，可先求 $\cos\alpha$，再由 $\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha$ 求 $\sin\alpha$.

范例点评

题型一　利用同角三角函数关系式求值

【例1】　已知 $\sin\alpha=m(|m|\leqslant1)$，求 $\cos\alpha$、$\tan\alpha$.

分析　由于 m 取值情况不定，在求解 $\cos\alpha$ 时要分类讨论.

解　若 $m=\pm1$，则 $\cos\alpha=0$，$\tan\alpha$ 不存在；

若 $m=0$，当 $\alpha=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\cos\alpha=1$，$\tan\alpha=0$；

当 $\alpha=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\cos\alpha=-1$，$\tan\alpha=0$.

当 $0<|m|<1$ 时，

若 α 是第一或第四象限角，$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-m^2}$，$\tan\alpha=\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$；

若 α 是第二或第三象限角，$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-m^2}$，$\tan\alpha=-\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$.

点评　利用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$ 求 $\cos\alpha$ 时，要分析 α 在第一、四象限或在第二、三象限两种情况.

举一反三

1. 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{8}{17}$，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$.

题型二　已知 $\tan\alpha$ 值，求双弦齐次式的值

【例 2】　已知 $\tan\alpha=2$，则

(1) $\dfrac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{4\sin\alpha-9\cos\alpha}=$________；

(2) $\dfrac{2\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha-9\cos^2\alpha}=$________；

(3) $4\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-5\cos^2\alpha=$________.

分析　因为 $\cos\alpha\neq0$，所以可以将分子分母同除以 $\cos^n\alpha$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，将所求式转化为用 $\tan\alpha$ 表示. 如果所求式是双弦二次式，可通过添加分母 $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 将其化为分式.

解　(1) $\dfrac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{4\sin\alpha-9\cos\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha-3}{4\tan\alpha-9}=\dfrac{2\times2-3}{4\times2-9}=-1$；

(2) $\dfrac{2\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha-9\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan^2\alpha-3}{4\tan^2\alpha-9}=\dfrac{2\times2^2-3}{4\times2^2-9}=\dfrac{5}{7}$；

(3) $4\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-5\cos^2\alpha$

$=\dfrac{4\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-5\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{4\tan^2\alpha-3\tan\alpha-5}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{4\times2^2-3\times2-5}{2^2+1}=\dfrac{5}{5}=1$.

点评　如果已知条件涉及正切值，求双弦齐次式的值，方法就是化为正切表示的形式，然后整体代入.

举一反三

2. 已知 $3\sin\alpha-2\cos\alpha=0$，求下列各式的值.

(1) $\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$；

(2) $\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha$.

误区警示

在利用同角三角函数关系式求值时，应注意依据角所在的象限判定三角函数值的符号，避免在角的位置不定时，两次运用平方关系.

【案例分析】　已知 $\tan\alpha\neq0$，试用 $\tan\alpha$ 表示 $\sin\alpha$.

错解　设 $\tan\alpha=m$，则 $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+m^2}$.

当 $m>0$，α 为第一、三象限角时，$\cos\alpha=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$，

$\therefore \sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sqrt{\dfrac{m^2}{1+m^2}}=\pm\dfrac{|m|}{\sqrt{1+m^2}}$；

当 $m<0$，α 为第二、四象限角时，$\cos\alpha=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$，

$\therefore \sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\dfrac{|m|}{\sqrt{1+m^2}}$.

正解　设 $\tan\alpha=m$，$\because m\neq0$ 且 m 存在，

$\therefore \alpha$ 终边不在坐标轴上.

当 α 为第一、四象限角时，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$，

$\therefore \sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha=\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$；

当 α 为第二、三象限角时，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$，

$\therefore \sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha=-\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$.

同步测评

基础巩固

①化简 $\sqrt{1-\sin^2100^\circ}=$　(　　)

A. $-\sin100^\circ$　　B. $-\cos100^\circ$

C. $\sin100^\circ$　　D. $\cos100^\circ$

②(2007·全国·改编)已知 α 是第四象限角，$\tan\alpha=-\dfrac{5}{12}$，则 $\sin\alpha=$　(　　)

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $-\dfrac{1}{5}$　　C. $\dfrac{5}{13}$　　D. $-\dfrac{5}{13}$

③(2007·全国·文)α 是第四象限角，$\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$，则 $\sin\alpha=$　(　　)

A. $\dfrac{5}{13}$　　B. $-\dfrac{5}{13}$　　C. $\dfrac{5}{12}$　　D. $-\dfrac{5}{12}$

④若 α 是第三象限角，则 $\cos\alpha\sqrt{1+\tan^2\alpha}+\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1}}=$ ( )

A. 1　B. ±1　C. −1　D. 0

⑤设 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{4}{5}$，且 α 是第二象限角，则 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=$ ( )

A. $\dfrac{4}{3}$　B. $\dfrac{3}{4}$　C. $\pm\dfrac{4}{3}$　D. $\pm\dfrac{3}{4}$

⑥化简：$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta=$______.

能力提高

⑦若 $\beta\in[0,2\pi)$，且 $\sqrt{1-\cos^2\beta}+\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sin\beta-\cos\beta$，则 β 的取值范围是 ( )

A. $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$　B. $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$

C. $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$　D. $\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$

⑧(2007·陕西)已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=$ ( )

A. $-\dfrac{3}{5}$　B. $-\dfrac{1}{5}$　C. $\dfrac{1}{5}$　D. $\dfrac{3}{5}$

拓展延伸

⑨已知 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 是方程 $8x^2+6kx+2k+1=0$ 的两个根，求实数 k 的值.

第5课时　三角函数的诱导公式(1)

基础探究

1. 角 α 的终边与角 $\pi+\alpha$ 的终边关于________对称.

2. 角 α 的终边与角 $-\alpha$(或 $2\pi-\alpha$)的终边关于________对称.

3. 角 α 的终边与角 $\pi-\alpha$ 的终边关于________对称.

4. 诱导公式

(1)公式一

$\sin(\alpha+k\cdot2\pi)=$________，$\cos(\alpha+k\cdot2\pi)=$________，$\tan(\alpha+k\cdot2\pi)=$________，其中 $k\in\mathbf{Z}$.

(2)公式二

$\sin(\pi+\alpha)=$________，$\cos(\pi+\alpha)=$________，$\tan(\pi+\alpha)=$________.

(3)公式三

$\sin(-\alpha)=$________，$\cos(-\alpha)=$________，$\tan(-\alpha)=$________.

(4)公式四

$\sin(\pi-\alpha)=$________，$\cos(\pi-\alpha)=$________，$\tan(\pi-\alpha)=$________.

即 $\alpha+k\cdot2\pi$，$-\alpha$，$\pi\pm\alpha$ 三角函数值，等于把 α 看作锐角加减后所在象限同名函数值."函数名不变，符号看象限".

互动学案

重点突破

1. α 与 $-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称，$\pi+\alpha$ 与 α 的终边共线，$\pi-\alpha$ 与 $-\alpha$ 终边共线，这样便于理解 α 与 $\pi\pm\alpha$ 终边的对称关系.

2. 本课公式可用"函数名不变，符号看象限"记忆. 其中"函数名不变"是指等式两边的三角函数同名；"符号"是指等号右边是正号还是负号；"看象限"是指假设 α 是第一象限角，要看原函数名在本公式中角的终边所在象限是取正值还是取负值. 如 $\sin(\pi+\alpha)$，若将 α 看成第一象限角，则 $\pi+\alpha$ 在第三象限，正弦在第三象限取负值，故 $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$.

3. 利用诱导公式可以将任意角的三角函数值转化为锐角的三角函数值.

4. 已知三角函数值求角要利用诱导公式先求出 $[0,2\pi)$ 内符合条件的角，然后给出所有解.

范例点评

题型一　求任意角的三角函数值

【例1】 求值：(1) $\sin1\,320^\circ$；(2) $\cos\left(-\dfrac{31}{6}\pi\right)$.

分析　要选择公式逐步将角化至锐角.

解　(1) $\sin1\,320^\circ=\sin(3\times360^\circ+240^\circ)=\sin240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin60^\circ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

(2) $\cos\left(-\dfrac{31}{6}\pi\right)=\cos\left(-6\pi+\dfrac{5\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

点评　求任意角的三角函数值时要将任意角的三角函数值转化为 $[0,2\pi)$ 内的角的三角函数值，进一步转化为锐角的