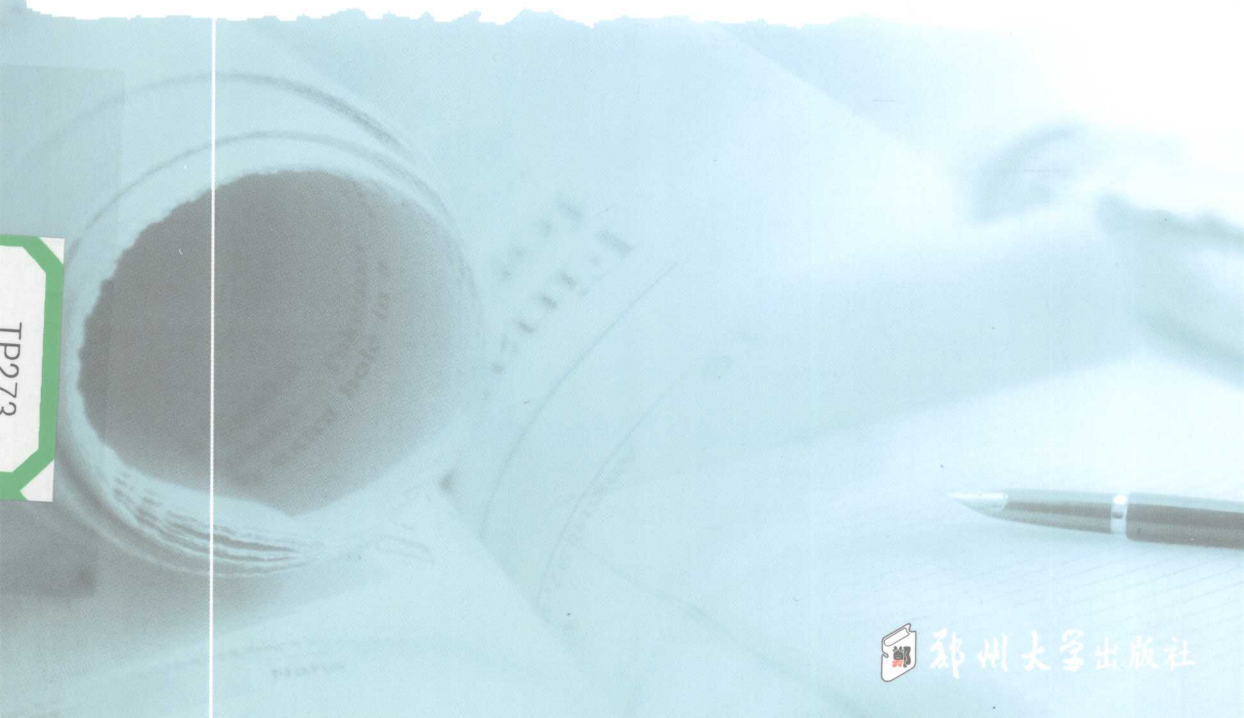
青年科技创新人才学术文库

非线性随机控制系统

FEIXIANXING SUIJI KONGZHI XITONG

刘海军　慕小武　编著

21世纪研究生规划教材



TP273

郑州大学出版社

非线性随机控制系统

青年科技创新人才学术文库

非线性随机控制系统

刘海军　慕小武　编著

21世纪研究生规划教材

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

非线性随机控制系统/刘海军,慕小武主编.—郑州:
郑州大学出版社,2008.11
(青年科技创新人材学术文库)
ISBN 978-7-81106-965-5

Ⅰ.非…　Ⅱ.①刘…②慕…　Ⅲ.非线性控制系统　Ⅳ.TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 141214 号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052
出版人:邓世平　　发行部电话:0371-66966070
全国新华书店经销
河南新丰印刷有限公司印制
开本:710 mm×1 010 mm　　1/16
印张:7.5
字数:157 千字
版次:2008 年 11 月第 1 版　　印次:2008 年 11 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978-7-81106-965-5　　定价:16.00 元

本书如有印装质量问题,请向本社调换

前 言

近年来,非线性随机系统的控制问题得到理论界和工程界的很大关注,取得了很多重要进展,如最优控制、反馈设计和滤波等.本书主要着重于系统稳定、镇定和最优控制的理论,从随机稳定的基本概念出发,介绍若干经典结果及近年来的一些最新的进展,希望能提供有关问题历史发展的脉络和方向.本书的写作过程中参考了国内外学者的相关文献与专著,当然也包括了作者近年的一些工作与心得.

首先,第1章是随机系统的介绍,主要是随机稳分方程的基本知识,如解的存在唯一性、Itô 公式和解关于初值的连续依赖性,解的不等式.为了介绍最优控制问题,也简单介绍了微分方程有关粘性解的概念.

第2章介绍 Lyapunov 稳定性理论,如各种稳定性的定义、定理,渐近稳定性定理,指数稳定性定理,LaSalle 不变原理.

在稳定性理论中,Backstepping 反馈设计法是一个重要的方法,第3章介绍随机系统的 Backstepping 反馈设计法,此方法的优点是可直接得到控制律的显示表达式.把观测器设计,特别是高增益的观测设计与 Backstepping 反馈设计法结合,实现一些复杂系统的稳定性是本章的特色;这里既考虑了适应问题,也考虑了鲁棒问题,还考虑了输出镇定问题.

第4章介绍矩稳定性和 Peuteman-Aeyels 定理,其结果包括渐近稳定、一致渐近稳定和指数稳定性的结论. 作为定理的应用, 讨论了随机线性系统的切换镇定问题,并利用 S-程序原理, 给出了系统镇定的充分必要条件.

稳定性理论的另一个内容是有限时间稳定性,对于确定系统,有很多重要进展.但对于随机系统,相关文献不多,第5章给出有关的研究进展.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

在稳定性发展中，MARKOV 切换扩散系统的研究是一般随机系统稳定理论的发展，第 6 章介绍此类系统稳定性理论，包括稳定性、渐近稳定性、指数稳定条件和 LaSalle 不变原理．在这方面作出重要贡献的是 Mao Xuerong，Yuan Chenggui，George Yin 和 Qing Zhang.

当前控制论研究的一个热点为混杂系统，一般是指连续系统与离散系统耦合生成的系统，它的状态变量既包括连续状态变量，也包括离散状态变量．随机混杂系统（stochastic hybrid systems）首先由 Hu，J.，J. Lygeros 和 S. Sastry 提出，其连续状态服从一个由混杂状态决定的随机微分方程，离散状态的转移（也称系统的切换）规律依赖于连续状态是否达到给定区域的边界．近来，随机混杂系统已逐渐成为控制理论与应用研究的热点领域．其应用范围包括：自动电力火车管理、计算机的驱动系统、机器人系统、高水平的柔性制造系统、交通管理系统、网络系统，航天、化学反应过程、医疗、金融投资和社会管理等．对确定性混杂系统的稳定性研究有不少成果，如 Micheal 的混杂系统稳定性理论，Lygeros 的不变原理，多 Lyapunov 方法，但对于随机混杂系统研究尚不多见．第 7 章介绍广义随机混杂系统稳定性理论最近的一些进展．

第 8 章介绍随机切换系统的鲁棒最优切换控制问题．对于既存在切换费用，又存在未知扰动的随机混杂系统，利用动态规划与偏微方程的粘性解理论，讨论系统的鲁棒最优控制问题．得出系统的值函数在粘性解意义下满足一组变分不等式．同时证明在多增长函数类中（the class of multi－growth functions），变分不等式的解是唯一的．

本书的写作过程中，得到了许多人的帮助，在此向他们表示衷心的感谢．特别感谢郑州大学数学系的领导和同事们如耿献国教授、陈国旺教授、陈绍春教授、施仁杰教授、胡泽军教授、石东洋教授、杨志坚教授、宋士仓教授、王书彬教授、卜春霞教授、赵永成博士、任国彪博士、程桂芳博士、张松祺老师、刘辽燕老师、宋金玉老师、黄卫红老师等的支持与帮助．同时，也感谢几年来参加非线性系统讨论班的同学们，他们的参与讨论，使本书很多章节与内容更加完善．

最后，限于作者的学识与研究兴趣，本书在选材上，在内容的论述上肯定有局限性，也难免有不当之处，望得到读者与同行的批评指正．

刘海军　慕小武

2008 年 7 月

目 录

第 1 章

预备知识

本章给出关于随机微分方程的一些基本知识，包括解的存在唯一性定理、Itô 微分公式和偏微分方程粘性解的概念与性质.

1.1 随机微分方程

考虑如下 Itô 过程

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t),t)dt + g(x(t),t)dw(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $x \in R^n$ 是系统的状态，$x(0) = x_0$ 为初始值，$w(t)$ 是一个定义在完备空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 r - 维标准 Brownian 运动，且带有一个自然 σ - 域流 $\mathcal{F}(t)_{t\geq 0}$ $(i.e.\ ,\mathcal{F}(t)) = \sigma\{w(s): 0 \leq s \leq t\}$，$f: R^n \times R \to R^n$ 和 $g: R^n \times R \to R^{n\times r}$ 是局部 Lipschitz 的连续函数. 同时假设初值 x_0 是一个独立于 $\mathcal{F}(t), t>0$ 的任意 n - 维随机向量，且 $\mathbf{E}|x_0|^2 < \infty$.

对于系统(1.1)引用如下引理，请参阅[36, Fridman].

引理 1.1.1 对于系统(1.1)，假设函数 $f(x,t)$，$g(x,t)$ 是 $(x,t) \in R^n \times [t_0, t_0 + T]$ 上的可测函数，且

$$|f(x,t)| \leq K(1 + |x|),\ |g(x,t)| \leq K(1 + |x|) \tag{1.2}$$

其中 K 是一个正常数. 同时假设，对任意 $N > 0$，存在正常数 K_N 使得

$$\begin{cases} |f(x,t) - f(\bar{x},t)| \leq K_N |x - \bar{x}|, \\ |g(x,t) - g(\bar{x},t)| \leq K_N |x - \bar{x}| \end{cases} \tag{1.3}$$

对于 $|x| \leq N$，$|\bar{x}| \leq N$，$t_0 \leq t \leq t_0 + T$ 成立. 则在 $M_w^2[t_0, t_0 + T]$ 中，系统(1.1)的解 $x(t)$ 存在且唯一. 且满足

$$\mathbf{E}|x(t)^2| \leq c^*(1 + \mathbf{E}|x_0|^2) \tag{1.4}$$

其中 c^* 是一个仅赖于 T, K 的常数.

引理 1.1.2 条件同引理 1.1.1，且对正整数 m，有 $\mathbf{E}|x_0|^{2m} < \infty$，则

$$\mathbf{E}\,|\,x(t)\,|^{2m}\leqslant(1+\mathbf{E}\,|\,x_0\,|^{2m})e^{c^* t} \tag{1.5}$$

$$\mathbf{E}\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\,x(t)-x_0\,|^{2m}\}\leqslant\bar{c}(1+\mathbf{E}\,|\,x_0\,|^{2m})t^m \tag{1.6}$$

其中 c^*,c 是仅依赖于 K,T,m 的常数.

引理 1.1.3 (Itô 公式)对于由(1.1)确定的随机过程 $x(t)$. 设 $F(t,x)$: $[0,T]\times R^n\to R$ 关于 t 是连续可微的,关于 x 是二阶连续可微的,且满足

$$\begin{cases} F_t(\cdot,x(\cdot)),F_x(\cdot,x(\cdot))f(\cdot,x(\cdot))\in L_{\mathcal{F}}^{1,loc}(0,T,R), \\ \mathrm{tr}(g'(t,x(\cdot))\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}g(x,t))\in L_{\mathcal{F}}^{1,loc}(0,T,R), \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}g(x,t)\in L_{\mathcal{F}}^{2,loc}(0,T,R) \end{cases} \tag{1.7}$$

则 $F(t,x(t))$定义如下一个随机过程

$$\mathrm{d}F(t,x)=\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}f(x,t)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(g'(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}g(x,t))\right)\mathrm{d}t+$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}g(x,t)\mathrm{d}w(t). \tag{1.8}$$

1.2 偏微分方程的粘性解

为了介绍偏微分方程粘性解的概念,首先介绍函数的上切、下切概念. 记 $\mathcal{O}$ 是 R^n 中的闭凸子集,$u:R^n\to R$ 是 R^n 上的下半连续函数.

定义 1.2.1 [26, Crandall]令 $u:\mathcal{O}\in R^n\to R,\hat{x}\in\mathcal{O}$. 且 $S(n)$是 $n\times n$ 的对称矩阵. 对$(p,X)\in(R^n,S(n))$,如果

$$u(x)\leqslant u(\hat{x}+\langle p,x-\hat{x}\rangle+\frac{1}{2}\langle X(x-\hat{x}),x-\hat{x}\rangle+$$
$$o(\,|\,x-\hat{x}\,|^2),\text{当 } x\in\mathcal{O}\to\hat{x} \tag{1.9}$$

成立,则称(p,X)是 u 在 $\hat{x}$ 处的二阶上切,所有的上切构成的集合(上切锥)记为 $\mathcal{J}_{\mathcal{O}}^{2,+}u(\hat{x})$. 一般情况下,$(p,X)$是 u 在 $\hat{x}$ 处的二阶上切也记为$(p,X)\in\mathcal{J}_{\mathcal{O}}^{2,+}u(\hat{x})$.

同样地,若(1.9)的不等号改变方向,且 $u:R^n\to R$ 是 R^n 上的上半连续函数,则称(p,X)是 u 在 $\hat{x}$ 处的二阶下切,并记为$(p,X)\in\mathcal{J}_{\mathcal{O}}^{2,-}u(\hat{x})$. 易见上切和下切有 $\mathcal{J}_{\mathcal{O}}^{2,+}(-u(\hat{x}))=-\mathcal{J}_{\mathcal{O}}^{2,-}u(\hat{x})$成立.

可以看出 $\mathcal{J}_{\mathcal{O}}^{2,+}u(\hat{x})$依赖于定义域 $\mathcal{O}$,但是对于 $\mathcal{O}$ 中的内点 x,其上切锥和下切锥是唯一的,并由 $\mathcal{J}_{\mathcal{O}}^{2,+}u(\hat{x})$和 $\mathcal{J}^{2,-}u(\hat{x})$表示.

另外,对 $x\in\mathcal{O}$,定义

$$\mathcal{J}_{\mathcal{O}}^{2,+}u(\hat{x})=\{(p,X)\in R^n\times S(n):\exists(x_k,p_k,X_k)\in\mathcal{O}\times R^n\times S(n),$$

$(p_k, X_k) \in \mathcal{J}_{\mathcal{O}}^{2,+}u(x_k)$，使得$(x_k, u(x_k), p_k, X_k) \to (x, u(x), p, X)\}$ (1.10)

和

$\bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{O}}^{2,-}u(\hat{x}) = \{(p, X) \in R^n \times S(n): \exists (x_k, p_k, X_k) \in \mathcal{O} \times R^n \times S(n),$

$(p_k, X_k) \in \mathcal{J}_{\mathcal{O}}^{2,-}u(x_k)$，使得$(x_k, u(x_k), p_k, X_k) \to (x, u(x), p, X)\}$ (1.11)

注 1.2.1 如果在 $\mathcal{O}$ 的某邻域有 $\varphi \in C^2$ 成立，则 $\mathcal{J}_{\mathcal{O}}^{2,+}(u-\varphi) = \{(p - D\varphi(x), X - D^2\varphi(x)): (p, X) \in \mathcal{J}_{\mathcal{O}}^{2,+}u\}$. 同样地，对于 $\mathcal{J}_{\mathcal{O}}^{2,-}$，$\mathcal{J}_{\mathcal{O}}^{2,+}$，$\mathcal{J}_{\mathcal{O}}^{2,-}$也有相似结论成立.

令 $\mathcal{O}$ 是 R^n 的局部紧子集，$T>0$，和 $\mathcal{O}_T = [0, T] \times \mathcal{O}$. 记 $\mathcal{P}_{\mathcal{O}}^{2,+}$，$\mathcal{P}_{\mathcal{O}}^{2,-}$是抛物切锥；定义如下，设 $u: \mathcal{O}_T \to R$，则 $\mathcal{P}_{\mathcal{O}}^{2,+}u$ 为如下元素(a, p, X)的集合，(s, z)是 $\mathcal{O}_T$ 内一定点. 其中$(a, p, X) \in R \times R^n \times S(n)$，且

$$u(t,x) \leqslant u(s,z) + a(t-s) + \langle p, x-z \rangle + \frac{1}{2}\langle X(x-z), x-z \rangle +$$

$$o(|t-s| + |x-z|^2)，当(t,x) \in \mathcal{O}_T \to (s,z); \qquad (1.12)$$

且定义 $\mathcal{P}_{\mathcal{O}}^{2,-}u = -\mathcal{P}_{\mathcal{O}}^{2,+}(-u)$，其中 $<\cdot,\cdot>$ 表示向量的内积.

同样可定义 $\bar{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}^{2,+}$，$\bar{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}^{2,-}$.

设 $F(t, x, D_t u, D_x u, D_{xx}^2 u) = 0$ 是一个二阶的偏微分方程，其中，$D_t u, D_x u, D_{xx}^2 u$ 是 u 关于 t, x 的一阶、二阶偏导数（向量或矩阵），定义其粘性解如下：

定义 1.2.2 [26, Crandall] 令 $u = (u^1, \cdots, u^r)$ 是一个定义在 $\mathcal{O}_T$ 上的下半连续函数，称其是 $F(t, x, D_t u, D_x u, D_{xx}^2 u) = 0$ 的粘性上解，是指对$(t, x) \in \mathcal{O}_T$ 和 $(a, p, X) \in \bar{\mathcal{P}}_{\mathcal{O}}^{2,+}u$ 有：

$$F(t, x, a, p, X) \geqslant 0 \qquad (1.13)$$

成立。同样地，设 $u \in \mathrm{USC}(\mathcal{O})$（$\mathcal{O}$ 上的上半连续函数组成的集合），称其是方程 $F(t, x, D_t u, D_x u, D_{xx}^2 u) = 0$ 的粘性下解，是指对$(t, x) \in \mathcal{O}_T$ 和$(a, p, X) \in \mathcal{P}_{\mathcal{O}}^{2,-}u$ 有

$$F(t, x, D_t u, D_x u, D_{xx}^2 u) \leqslant 0 \qquad (1.14)$$

成立. 若函数 $u(t, x)$既是方程 $F(t, x, D_t u, D_x u, D_{xx}^2 u) = 0$ 的粘性上解，也是粘性下解，则称其为方程的粘性解.

引理 1.2.1 [26, Crandall] 设 $\mathcal{O}$ 是 R^n 中的子集，$u \in \mathrm{USC}(\mathcal{O})$，$v \in \mathrm{LSC}(\mathcal{O})$（$\mathcal{O}$ 上的下半连续函数组成的集合）且

$$M_\alpha = \sup_{\mathcal{O} \times \mathcal{O}}\left(u(x) - v(x) - \frac{\alpha}{2}|x-y|^2\right), \qquad (1.15)$$

对 $\alpha > 0$. 令 $M_\alpha < \infty$ 对较大的 α 和(x_α, y_α)使得

$$\lim_{\alpha \to \infty}\left(M_\alpha - \left(u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - \frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2\right)\right) = 0 \qquad (1.16)$$

则有：

$$\begin{cases} (\mathrm{i}) \lim\limits_{\alpha \to \infty} \alpha |x_\alpha - y_\alpha|^2 = 0 \\ (\mathrm{ii}) \lim\limits_{\alpha \to \infty} M_\alpha = u(\hat{x} - v(\hat{x}) = \sup_O(u(x) - v(x)) \\ 对于 \hat{x} \in \mathcal{O} 是 x_\alpha 的极限点, as\ \alpha \to \infty \end{cases} \qquad (1.17)$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

成立.

引理 1.2.2 [26,Crandall]设 $\mathcal{O}_i, i=1,\cdots,k$ 是 R^{n_i} 子集. $\mathcal{O}=\mathcal{O}_1\times\cdots\times\mathcal{O}_k, u_i\in$ USC$(\mathcal{O}_i)$, φ 是 $\mathcal{O}$ 上的可微函数.

令

$$w(x)=u_1(x_1)+\cdots+u_k(x_k)\text{对 } x=(x_1,\cdots,x_k)\in\mathcal{O}, \tag{1.18}$$

且 $\hat{x}=(\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_k)\in\mathcal{O}$ 是 $w-\varphi$ 的局部极大值点相对于 $\mathcal{O}$.

则对 $\varepsilon>0$ 存在 $X_i\in S(n_i)$(其中 $S(n_i)$ 是 $n_i\times n_i$ 的对称矩阵,使得

$$(D_{x_i}\varphi(\hat{x}),X_i)\in\bar{\mathcal{J}}_{\mathcal{O}_i}^{2,+}u_i(\hat{x}_i),\text{对 } i=1,\cdots,k \tag{1.19}$$

且分块矩阵 X_i 满足

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon}+\|A\|I\right)\leqslant\begin{pmatrix}X_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & X_k\end{pmatrix}\leqslant A+\varepsilon A^2 \tag{1.20}$$

其中 $A=D^2\varphi(\hat{x})\in S(n), n=n_1+\cdots+n_k$.

第 2 章

非线性随机系统的 Lyapunov 稳定性理论

2.1 引入

考虑如下 Itô 过程

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = f(x(t),t)\,\mathrm{d}t + g(x(t),t)\,\mathrm{d}w(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $x \in R_n$ 是系统的状态，且具有初始值为 $x(t_0) = x_0$，$w(t)$ 是一个定义在完备空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的一个 r - 维标准的 Brownian 运动，且带有一个自然 σ - 域流 $\mathcal{F}(t)_{t\geqslant 0}$($i.e.$,$\mathcal{F}(t) = \sigma\{w(s):0 \leqslant s \leqslant t\}$,$f:R^{n+1} \to R^n$ 和 $g:R^{n+1} \times R \to R^{n\times r}$ 是局部 Lipschitz 的连续函数. 同时假设 $f(0,t) = 0$ 和 $g(0,t) = 0$，则 $x(t) \equiv 0$ 就是系统(2.1)的一个平衡点. 对于初值 x_0，假定它是一个独立于 $\mathcal{F}(t), t > 0$ 的任意 n - 维随机向量，且 $\mathbf{E}|x_0|^2 < \infty$.

定义 2.1.1 (弱依概率稳定)对 $\forall \varepsilon > 0, \delta > 0, \exists r > 0$，使得对 $t \geqslant t_0$，$|x_0| < r$，成立

$$P\{|x(t,\omega,t_0,x_0)| > \varepsilon\} < \delta \tag{2.2}$$

则称随机系统是弱依概率稳定.

进一步，若系统是弱依概率稳定，且对 $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0$，使得

$$\lim_{t\to\infty} P\{|x(t,\omega,t_0,x_0)| > \varepsilon\} < 0, \text{当} |x_0| < r, \tag{2.3}$$

则称系统(2.1)是弱渐近稳定的.

注 2.1.1 若以上 r 的选择与 t_0 无关，而且极限过程中以 $t - t_0$ 为准，则以上的弱稳定、弱渐稳称为一致的. 若公式(2.3)中 r 可选择为∞，则弱渐稳称为全局的.

定义 2.1.2 (依概率稳定)对 $\forall \varepsilon > 0, \delta > 0, \exists r > 0$，使得对 $t \geqslant t_0$，$|x_0| < r$，成立

$$P\{\sup_{t > t_0} |x(t,\omega,t_0,x_0)| > \varepsilon\} < \delta \tag{2.4}$$

则称随机系统是依概率稳定.

进一步,若系统是依概率稳定,且对$\forall\varepsilon>0$,成立

$$\lim_{|x_0|\to 0} P\{\lim_{t\to\infty}|x(t,\omega,t_0,x_0)|=0\}=1, \tag{2.5}$$

则称系统(2.1)是渐近稳定的.

注 2.1.2 若以上r的选择与t_0无关,而且极限过程中以$t-t_0$为准,则以上的稳定、渐稳称为一致的. 若公式(2.5)中关于x_0的极限可去掉,则称系统是全局渐稳的. 易见依概率稳定、渐稳蕴涵弱的依概率稳定、渐稳.

2.2 Lyapunov 稳定性定理

定理 2.2.1 对于系统(2.1),记其中$U_1=\{t>0\}\times U$包含射线$x=0$,如果存在正定函数$V(t,x)\in C_0^2(U_1)$,使得

$$LV=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}f+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(g^T\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}g\right)\leqslant 0, x\neq 0. \tag{2.6}$$

则系统是依概率稳定的.

证 选取r使得以r半径、以原点$x=0$为中心的球形领域U_r包含于U_1. 记$V_r=\inf\limits_{x\in U/U_r}V(t,x)(V_r>0)$. 记$x(t,t_0,x)$表示系统(2.1)在时刻$t$的状态,记$\tau_r=\inf\{t:|x(t)|>r\}$,且$\tau_r(t)\min\{t,\tau_r\}$. 易得

$$\mathbf{E}V(\tau_r(t),x(\tau_r(t),t_0,x))\leqslant V(t_0,x), \tag{2.7}$$

对$|x|<r$,由契贝晓夫不等式得

$$P\{\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}|x(u,t_0,x_0)|>r\}\leqslant\frac{\mathbf{E}V(\tau_r(t),x(\tau_r(t),t_0,x))}{V_r} \tag{2.8}$$

令$t\to\infty$,得

$$P\{\sup_{t_0\leqslant u\leqslant t}|x(u,x_0,s)|>r\}\leqslant\frac{V(t_0,x)}{V_r} \tag{2.9}$$

由于$V(t_0,0)=0$,且$V(s,x)$关于x连续,就得到所需结论.

定理 2.2.2 对于系统(2.1),假设存在一个正定的函数$V(t,x)\in C_0^2(\{t>0\}\times U)$,其是径向无界的使得$LV\leqslant 0$. 记$U_{\varepsilon,r}=\{x:\varepsilon<|x|<r\}$,$\varepsilon,r>0$. 若系统在有限时间内由$U_{\varepsilon,r}$内依概率1达到区域$\{x:\varepsilon<|x|<r\}$的边界.

则系统是依概率渐进稳定的.

证明 由引理1.1.3,随机过程$V(\tau_u(t),X^{s,x}(\tau_u(t)))$是个上鞅,由上鞅的收敛定理,存在随机变量$\xi$,使得

$$\lim_{t\to\infty}V(\tau_u(t),X^{s,x}(\tau_u(t)))=\xi \tag{2.10}$$

令B_x表示使得$\tau_u(t)=\infty$的样本点. 由于函数V满足定理2.2.1,故它是依概率稳

定的. 即得

$$\lim_{x\to 0} P\{B_x\} = 0 \tag{2.11}$$

再由系统在有限时间内必达 U 的边界,在 B_x 中的样本去一个零测度集外,满足 $\inf\limits_{t>0} |X^{t_0,x}(t)| = 0$,易见

$$\lim_{t\to 0}\inf |X^{t_0,x}(t)| = 0, \tag{2.12}$$

由于 V 是连续的,得

$$\lim_{t\to 0}\inf V(t, X^{t_0,x}(t)) = 0, \tag{2.13}$$

由(2.10)得

$$\lim_{t\to 0} V(t, X^{t_0,x}(t)) = 0, \tag{2.14}$$

因此

$$\lim_{t\to 0} X^{t_0,x}(t) = 0, \tag{2.15}$$

证毕.

2.3 随机 LaSalle 稳定性定理

1892 年,Lyapunov 给出了动力系统的稳定性概念,并给出被后人称之为 Lyapunov 函数法(或 Lyapunov 第二方法),此后,该方法得到了巨大应用与推广,而推广中一个重要的结论就是 LaSalle 不变原理,它给出了系统的 ω 极限集和系统的渐近行为之间的联系. 随机不变原理由多人研究,这里主要介绍由 Mao Xuerong[72, Mao]给出的结果.

定理 2.3.1　[72, Mao]对于系统(2.1),假设满足引理 1.1.1 的条件. 如果存在一个函数 $V \in C^{2,1}(R^n \times R_+; R_+)$ 以及函数 $\gamma \in L^1(R_+; R_+)$ 和连续函数 $w: R^n \to R_+$,使得

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf_{0\leqslant t\leqslant\infty} V(x,t) = \infty \tag{2.16}$$

和

$$LV(x,t) \leqslant \gamma(t) - w(x),\ (x,t) \in R^n \times R_+. \tag{2.17}$$

并且,对任意的初始值 $x_0 \in R^n$,存在 $p > 2$ 使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\infty} \mathbf{E}|x(t,x_0)|^p < \infty$$

则,对任意 $x_0 \in R^n$,成立

$$\lim_{t\to\infty} V(t;x_0) \text{存在,且几乎处处有限.}$$

并且

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\infty} w(x(t;x_0)) = 0, a.s. \tag{2.18}$$

为了说明定理的含义，令 $D_w=\{x\in R^n:w(x)=0\}$. 由上面定理可知，D_w 非空，其实，满足下式的 $\omega\in\Omega$

$$\lim_{t\to\infty}V(t;x_0)<\infty\text{，且}\lim_{t\to\infty}w(x(t,\omega;x_0))=0$$

由于 $\{x(t,\omega;x_0):t\geqslant0\}$ 有界，以及 $w(\cdot)$ 连续，记 $\bar{x}$ 为 $\{x(t,\omega;x_0):t\geqslant0\}$ 的一个聚点，则必有 $w(\bar{x})=0$.

令 $d(x,D_w)$ 表示 x 与集合 D_w 的距离($d(x,D_w)=\min_{y\in D_w}|x-y|$). 则(2.18)指

$$\lim_{t\to\infty}d(x(t;x_0),D_w)=0,a.s.$$

为了定理的证明，首先介绍两个引理.

引理 2.3.1　令 $A(t)$ 和 $U(t)$ 是两个连续适定的增过程，且 $A(0)=U(0)=0$, $a.s.$ 令 $M(t)$ 是满足 $M(0)=0,a.s.$ 的实值连续局部鞅. ξ 是一个非负的随机变量. 定义

$$X(t)=\xi+A(t)-U(t)+M(t)$$

如果 $X(t)$ 非负，则

$$\{\lim_{t\to\infty}A(t)<\infty\}\subset\{\lim_{t\to\infty}X(t)\text{存在且有限}\}\cap\{\lim_{t\to\infty}U(t)<\infty\},a.s.$$

其中，$B\subset D,a.s.$ 是指 $P(B\cap D^c)=0$. 特别地，若 $\{\lim_{t\to\infty}A(t)<\infty\},a.s.$，则对几乎处处 $w\in\Omega$，成立

$$\lim_{t\to\infty}X(t)\text{存在且有限，且}\lim_{t\to\infty}U(t,\omega)<\infty$$

此引理参见 Liptser 和 Shiryayev[63]. 定理 7.

引理 2.3.2　假设 $X(t),t\geqslant0$ 是一个 n 维随机过程，并满足

$$\mathbf{E}|X(t)-X(s)|^\alpha\leqslant C|t-s|^{1+\beta},0\leqslant t,s<\infty.\tag{2.19}$$

对正数 α,β 和 C. 则 $X(t)$ 存在连续的修正 $\tilde{X}(t)$，使得对任意的 $\gamma\in(0,\beta/\alpha)$，存在一个正的随机变量 $h(\omega)$，成立

$$P\left\{\omega:\sup_{\substack{0<t-s<h(\omega)\\0\leqslant t,s<\infty}}\frac{|\tilde{X}(t,\omega)-\tilde{X}(s,\omega)|}{|t-s|^\gamma}\leqslant\frac{2}{1-2^{-\gamma}}\right\}=1$$

也就是说，$\tilde{X}(t,\omega)$ 的样本轨道是几乎处处一致依幂 γHölder 连续.

证明参见文献[36,Friedman]第一章定理 3.3.

引理 2.3.3　对于系统(2.1)，假设(S1)和(S2)成立. 令

$$y(t):=\int_0^t g(x(s),s)\mathrm{d}b(s),t\geqslant0$$

则 $y(t)$ 的样本轨道在 $t\geqslant0$ 上是一致连续的.

证由[36,Friedman]，定理 6.3，对 $p>2$，成立

$$\mathbf{E}|y(t)-y(s)|^p\leqslant\left[\frac{p(p-1)}{2}\right]^{p/2}(t-s)^{(p-2)/2}\int_s^t\mathbf{E}|g(x(r),r)|^p\mathrm{d}r.$$

结合第 1 章假设(1.3)和引理 1.1.2，得

$$\mathbf{E}|g(x(r),r|^p \leqslant \mathbf{E}[c(1+|x(r)|)]^p \leqslant (2c)^p(1+\mathbf{E}|x(r)|^p) \leqslant (2p)^p(1+K)$$

其中，$K:=\sup_{t\to\infty}\mathbf{E}|x(t)|^p<\infty$. 因此

$$\mathbf{E}|y(t)-y(s)|^p \leqslant \left[\frac{p(p-1)}{2}\right]^{p/2}(2c)^p(1+K)(t-s)^{1+(p-2)/2}.$$

由于 $y(t)$ 是连续的，由引理 2.1.3 知对 $\gamma\in(0,(p-2)/2p)$，$y(t)$ 的样品轨道是关于幂 γ 几乎处处一致 Hölder 连续的. 证毕.

定理的证明

对初始值 x_0，由 Itô 公式和条件(2.17)得

$$V(x(t),t) \leqslant V(x_0,0)+\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{d}s-\int_0^t w(x(s))\,\mathrm{d}s+$$

$$\int_0^t V_x(x(s),s)g(x(s),s)\,\mathrm{d}B(s).$$

由 $\int_0^t \gamma(s)\,\mathrm{d}s<\infty$ 和 $\gamma(s)-LV(x(s),s)\geqslant 0$，由引理 2.3.1 得对几乎所有 $\omega\in\Omega$，成立

$$\int_0^\infty w(x(t,\omega))\,\mathrm{d}t<\infty \qquad (2.20)$$

且 $\lim_{t\to\infty}V(x(t),t)$ 存在，几乎处处有限.

断言样本轨道 $x(t)$ 是几乎处处一致连续的. 其实 $x(t)=x_0+z(t)+y(t)$，其中 $z(t)=\int_0^t f(x(s),s)\,\mathrm{d}s$，由于轨道是有界的，因而存在随机变量 $h(\omega)>0$，使得 $\sup_{t\geqslant 0}|x(t,\omega)|\leqslant h(\omega)$ 进而知 $z(t)$ 是一致连续的. 再由 $y(t)$ 的一致连续性，得 $x(t)$ 的样本轨道是几乎处处一致连续的.

由于 $w(x)$ 的连续性，$w(x(t,\omega))$ 是几乎处处一致连续的，由(2.20)知必有

$$\lim_{t\to\infty}w(x(t))=0 \qquad (2.21)$$

证毕.

推论 2.3.1 对于系统(2.1)，假设条件(1.1)和(1.2)成立，如果存在一个函数 $V\in C^{2,1}(R^n\times R_+;R_+)$，以及函数 $\gamma\in L^1(R_+;R_+)$ 和连续函数 $w:R^n\to R_+$，使得

$$\lim_{|x|\to\infty}\inf_{0\leqslant t\leqslant\infty}V(x,t)=\infty$$

和

$$LV(x,t)\leqslant -w(x),(x,t)\in R^n\times R_+.$$

则，系统(2.1)是稳定的，且对任意 $x_0\in R^n$，成立

$$\lim_{t\to\infty}w(x(t;x_0))=0,a.s.$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com