离散数学辅导与习题解答

经典 Classics

经典教材辅导用书 ▌数学系列

知识要点

疑难解析

习题详解

解题方法及技巧

模拟试题及解答

▌清华版《离散数学》（第三版）（耿素云等编）

梅家斌 刘红玲 罗娟 曹剑文 编

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

经典教材辅导用书·数学系列丛书

离散数学辅导与习题解答

清华版《离散数学》(第三版)(耿素云等编)

梅家斌　刘红玲　罗　娟　曹剑文　编

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

离散数学辅导与习题解答/梅家斌　刘红玲　罗　娟　曹剑文　编.—武汉：华中科技大学出版社，2008年9月

ISBN 978-7-5609-4705-1

Ⅰ.离…　Ⅱ.①梅…　②刘…　③罗…　④曹…　Ⅲ.离散数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第102142号

离散数学辅导与习题解答　梅家斌　刘红玲　罗　娟　曹剑文　编

策划编辑：周芬娜

责任编辑：余　涛　　　封面设计：潘　群

责任校对：朱　霞　　　责任监印：周治超

出版发行：华中科技大学出版社(中国・武汉)

武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)87557437

录　　排：武汉佳年华科技有限公司

印　　刷：湖北恒泰印务有限公司

开本：710mm×1000mm　1/16　　印张：11.5　　字数：287 000

版次：2008年9月第1版　　印次：2008年9月第1次印刷　　定价：19.00元

ISBN 978-7-5609-4705-1/O・457

内 容 简 介

本书是《离散数学》第三版(耿素云,清华大学出版社,2004年)的配套参考书,共分九章.包括命题逻辑(一阶逻辑)、集合的基本概念和运算、二元关系与函数、代数系统的一般性质,几个典型的代数系统、图的基本概念、一些特殊的图、树.附录部分提供了两套近几年本科离散数学模拟试题及解答.

本书按章顺序排列,每章均由四个部分组成,即主要内容、释疑解惑、典型例题解析、习题分析与解答.主要内容包括每章主要概念、定理、公式等,这一部分内容可为读者快速地复习书中内容提供方便,并为阅读后面的内容打下基础;释疑解惑主要针对各章较难理解及容易混淆的问题进行答疑辅导,以帮助读者对书中内容正确而全面的理解.典型例题解析是本书的重点内容,这一部分我们精选了各章最能反映本章主要知识点的具有一定难度的综合题作为典型例题进行分析、解答.有些例题采取多视角分析,并尽量提供一题多解.主要通过对例题的解答分析加深读者对所学知识的深化理解及解题方法的融会贯通.从而起到举一反三、触类旁通的作用.建议读者把这一部分内容作为重点仔细揣摩和研读定会大有受益.第四部分是习题解答,我们以耿素云等编写的由清华大学出版社出版的离散数学1~9章书后习题为蓝本,对上面的所有习题进行了解答,其中的重难点习题还进行了详尽的分析.

本书在归纳内容、释疑解惑的基础上用丰富的例题为读者诠释概念、演绎技巧,以培养读者分析问题和解决问题的能力.

本书可作为高等理工科院校计算机科学、工程与应用专业的教学参考书,亦可作为本科生学习与考研的指导书.

前　　言

离散数学是计算机科学中最重要的基础理论之一，也是培养学生缜密思维、提高学生素质的核心课程．与学习其他基础数学课程一样，在学习离散数学中，解题是巩固知识、深化理解的一条必要途径．通过解题方法的训练，可以培养学生的综合分析能力和理论联系实际的学风．

本书共九章，在编排上按章分类，每章均分四个部分．第一部分为内容提要，涉及主要的概念、定理、公式，为后面的内容提供一个理论框架．第二部分为释疑解惑，主要针对书中一些较难理解的概念，较难掌握的内容、方法进行答疑辅导，以帮助读者正确理解书中内容，为下一步深入学习做准备．第三部分是典型例题解析，这一部分结合各章主要知识点，选择适量典型例题，进行分析、解答．有些例题采取多视角分析，并尽量提供一题多解．力图通过对例题的解答、分析加深读者对所学知识的理解及解题方法的融会贯通，从而起到举一反三、触类旁通的作用．读者通过这一部分的学习，能启迪思维、拓展新的解题思路、掌握更多新的解题方法．第四部分为习题分析与解答，是第三部分的强化，在第三部分的基础上进一步为读者提供一个练习的平台．读者最好先不看解答，自己先解题，在百思不得其解后再参阅解答，这样做效果一定会更好．这一部分主要选择耿素云等编著的《离散数学》（清华大学出版社，第三版）习题为对象，并对书中所有习题进行解答，在解答中大部分都有较详细的分析，另外还补充了部分较难习题供部分读者考研参考．本书附录部分收录了近几年本科离散数学模拟试题两套，另有两套研究生入学考试试题，均作了详细地分析和解答，以供读者参考．

应该特别指出的是，本书仅是教学参考书，决非解题的万能钥匙．希望读者务必把学习教材、独立作业放在首位，这样体会才会更加深刻，从而收到事半功倍的效果．

限于作者水平，本书疏漏难免，欢迎读者批评指正．

作　者

2008 年 6 月

目　　录

第1章 命题逻辑

- 命题逻辑
  - 五种基本联结词：$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - 命题公式及等值演算
  - 真值表
  - 等值公式
  - 重言式与重言蕴涵式
  - 三个补充联结词：$\overline{\vee}, \downarrow, \uparrow$
  - 对偶式
  - 范式
    - 析取范式（主析取范式——小项之析取）
    - 合取范式（主合取范式——大项之合取）
  - 推理的常用方法
    - 真值表法
    - 直接证法：利用前提引入、结论引入规则
    - 间接证法：通过否定结论找出矛盾（反证法）

- 常用的命题定律
  - (1) $A \Leftrightarrow \neg\neg A$　双重否定律
  - (2) $A \Leftrightarrow A \vee A$
  - (3) $A \Leftrightarrow A \wedge A$　（(2)(3) 等幂律）
  - (4) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
  - (5) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$　（(4)(5) 交换律）
  - (6) $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
  - (7) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$　（(6)(7) 结合律）
  - (8) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
  - (9) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$　（(8)(9) 分配律）
  - (10) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
  - (11) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$　（(10)(11) 德·摩根律）
  - (12) $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$
  - (13) $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$　（(12)(13) 吸收律）
  - (14) $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$
  - (15) $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$　（(14)(15) 零律）
  - (16) $A \vee 0 \Leftrightarrow A$
  - (17) $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$　（(16)(17) 同一律）
  - (18) $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$　排中律
  - (19) $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$　矛盾律
  - (20) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$　蕴涵等值式
  - (21) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$　等价等值式
  - (22) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$　假言易位
  - (23) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$　等价否定等值式
  - (24) $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$　归谬论

常用的命题等值公式
$$\begin{cases} A\rightarrow B\Leftrightarrow \neg A\vee B \\ A\,\bar{\vee}\,B\Leftrightarrow \neg(A\leftrightarrow B) \\ A\leftrightarrow B\Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(\neg A\vee\neg B) \end{cases}$$

常用推理定律
$$\begin{cases} (1)\ A\Rightarrow A\vee B & \text{附加} \\ (2)\ A\wedge B\Rightarrow A & \text{化简} \\ (3)\ (A\rightarrow B)\wedge A\Rightarrow B & \text{假言推理} \\ (4)\ (A\rightarrow B)\wedge\neg B\Rightarrow\neg A & \text{拒取式} \\ (5)\ (A\vee B)\wedge\neg A\Rightarrow B & \text{析取三段论} \\ (6)\ (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)\Rightarrow A\rightarrow C & \text{假言三段论} \\ (7)\ (A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C)\Rightarrow A\leftrightarrow C & \text{等价三段论} \\ (8)\ (A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(A\vee C)\Rightarrow B\vee D & \text{构造性二难} \end{cases}$$

常用推理规则如下所示.

(1) 前提引入规则:在证明的任何步骤上,都可以引入前提.

(2) 结论引入规则:在证明的任何步骤上,所证明的结论都可作为后续证明的前提.

(3) 置换规则:在证明的任何步骤上,命题公式中的任何子命题公式都可以用与之等值的命题公式置换.例如,可用$\neg A\vee B$置换$A\rightarrow B$等.

在以下推理规则中,用$A_1,A_2,\cdots,A_k\Rightarrow B$,表示$B$是$A_1,A_2,\cdots,A_k$的逻辑结论,在证明的序列中,若已有$A_1,A_2,\cdots,A_k$,则可以引入$B$.根据8条推理定律可得下面推理规则.

(4) 假言推理规则:$(A\rightarrow B)\wedge A\Rightarrow B$.

(5) 附加规则:$A\Rightarrow A\vee B$.

(6) 化简规则:$A\wedge B\Rightarrow A$.

(7) 拒取式规则:$(A\rightarrow B)\wedge\neg B\Rightarrow\neg A$.

(8) 假言三段论规则:$(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)\Rightarrow A\rightarrow C$.

(9) 析取三段论规则:$(A\vee B)\wedge\neg B\Rightarrow A$.

(10) 构造性二难规则:$(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(A\vee C)\Rightarrow B\vee D$.

(11) 合取引入规则:$A,B\Rightarrow A\wedge B$.

一、内容提要

1. 命题及联结词

1) 命题与真值

具有确定的真假意义的陈述句称为命题.命题的判断结果称为命题的真值.真值只有两个:真或假,分别用T、F表示或用1、0表示.

2) 简单命题

不能再分的简单陈述句称为简单命题或原子命题.常用字母$p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots$表示.

3) 复合命题

可以再分为简单命题的命题,或说用联结词联结的简单命题称复合命题.常用联结词有以下8种.

(1) 否定式:设p为一命题,$\neg p$表示p的否定,$\neg p$为真当且仅当p为假,$\neg$为否定联结词.

(2) 合取式:设 p,q 为两命题,$p\wedge q$ 表示 p 与 q 的合取式. $p\wedge q$ 为真当且仅当 p,q 都为真,$\wedge$ 为合取联结词.

(3) 析取式:设 p,q 为两命题,$p\vee q$ 表示 p 与 q 的析取式. $p\vee q$ 为真当且仅当 p,q 中至少有一个为真($p\vee q$ 为假当且仅当 p,q 同时为假),$\vee$ 为析取联结词.

(4) 蕴涵式:设 p,q 为两命题,$p\rightarrow q$ 称为 p 与 q 的蕴涵式. $p\rightarrow q$ 为真当且仅当 p 为假或 p,q 都为真(或 $p\rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真,q 为假),p 称为蕴涵前件,q 称为蕴涵后件,$\rightarrow$ 为蕴涵联结词.

(5) 等价式:设 p,q 为两命题,$p\leftrightarrow q$ 称为 p 与 q 的等价式. $p\leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 真值相同,$\leftrightarrow$ 为等价联结词.

(6) 异或(排斥或)式:设 p,q 为两命题,$p\,\overline{\vee}\,q$ 称为 p 与 q 的异或(排斥或)式. $p\,\overline{\vee}\,q$ 为真当且仅当 p 与 q 真值相反,$\overline{\vee}$ 为异或或排斥或联结词.

(7) 与非式:设 p,q 为两命题,$p\uparrow q$ 称为 p 与 q 的与非式. $p\uparrow q$ 为假当且仅当 p 与 q 都为真.

(8) 或非式:设 p,q 为两命题,$p\downarrow q$ 称为 p 与 q 的或非式. $p\downarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为假.

六个联结词的真值表如表 1-1 所示.

表 1-1

p	q	$\neg p$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$	$p\,\overline{\vee}\,q$	$p\uparrow q$	$p\downarrow q$
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0

2. 命题公式与分类

1) 命题常项

具有确定的真值的简单命题,称为命题常项,常用字母 p,q,r 等表示.

2) 命题变项

如果表示的是泛指的简单命题,称为命题变项,也用字母 p,q,r 等表示. 此时 p,q,r 是变量,没有确定的真值(它们的取值为 1 或 0),命题变项不是命题.

3) 合式公式

(1) 单个的命题变项或常项(含永真式 1 或永假式 0)是合式公式.

(2) 若 A 是合式公式,则 $\neg A$ 也是合式公式.

(3) 若 A,B 都是合式公式,则 $A\wedge B, A\vee B, A\rightarrow B, A\leftrightarrow B, A\,\overline{\vee}\,B$ 也是合式公式.

(4) 只有有限次地应用(1)～(3)形成的符号串才是合式公式,合式公式也称为命题公式,简称合式公式.

4) 公式的层次

(1) 若 A 是单个的命题变项或常项,则把 A 称为 0 层公式.

(2) 称 A 是 $n+1(n\geqslant 0)$ 层公式是指 A 符合下列情况之一.

① $A=\neg B$,B 为 n 层公式.

② $A=B\wedge C$,其中 B,C 分别为 i 层和 j 层公式,且 $n=\max(i,j)$.

③ $A=B\vee C$,其中 B,C 的层次同②.

④ $A=B\rightarrow C$,其中 B,C 的层次同②.

⑤ $A=B\leftrightarrow C$,其中 B,C 的层次同②.

⑥ $A=B \veebar C$，其中 B,C 的层次同②.

(3) 若 A 的层次为 k，则把 A 称为 k 层公式.

5) 赋值或解释

设 A 为一公式，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是出现在 A 中的全部命题变项，为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 各指定一个真值(0 或 1)，称为对 A 的一个赋值或解释.若赋值使 A 的真值为 1，则把该赋值称为 A 的成真赋值；若赋值使 A 的真值为 0，则把该赋值称为 A 的成假赋值.

对以上定义的两点说明如下.

(1) 含命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的公式 A 的赋值是由二进制数字组成的长为 n 的符号串.例如，101是含命题变项 p_1,p_2,p_3 的公式 A 的一个赋值，其含义为指定 p_1,p_3 的真值为1，P_2 的真值为 0.

(2) 若公式中命题变项由 p,q,r 给出，则它们的顺序由英文字母顺序给出.

6) 真值表

设公式 A 含 n ($n\geqslant 1$)个命题变项，将 A 在 2^n 个赋值下取值情况列成表，称为 A 的真值表.

7) 公式的分类

设 A 为一个公式，则有下列结论成立.

(1) 若 A 无成假赋值，则称 A 为重言式或永真式.

(2) 若 A 无成真赋值，则称 A 为矛盾式或永假式.

(3) 若 A 至少有一个成真赋值，则称 A 为可满足式.

(4) 若 A 至少有一个成真赋值，又至少有一个成假赋值，则称 A 为非重言式的可满足式.

3. 等值演算

1) 等值式

如对任一组赋值，公式 A 与 B 的真值都相同，则称公式 A 与 B 等值，记为 $A\Leftrightarrow B$，可证 $A\Leftrightarrow B$ 的充要条件是 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，即 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow 1$(常用此作为 A,B 等值的定义).

2) 等值演算

由已知等值式推演出新的等值式的过程称为等值演算.常用等值演算方法有：真值表法、推证法、化主范式法.

3) 置换规则

设 $\Phi(A)$是含公式 A 的公式，$\Phi(B)$是用 B 置换了 $\Phi(A)$中的 A 之后的公式，若 $A\Leftrightarrow B$，则 $\Phi(A)\Leftrightarrow\Phi(B)$.

4) 联结词的优先顺序

在演算中，$\neg$最优先；其次为 $\wedge$、$\vee$ 和 $\veebar$($\wedge$、$\vee$ 和 $\veebar$ 同级)；再其次为$\rightarrow$和$\leftrightarrow$($\rightarrow$和$\leftrightarrow$同级)；若有括号(圆括号)，则括号最优先；同级按从左至右的顺序演算.

4. 联结词全功能集

1) 真值函数

记$\{0,1\}^n=\{0\cdots0,00\cdots1,\cdots,1\cdots1\}$，即$\{0,1\}^n$ 是由 0 和 1 组成的全长为 n 的符号串集合.其定义域为$\{0,1\}^n$，值域为$\{0,1\}$的函数为 n 元真值函数.$\{0,1\}^n$ 到$\{0,1\}$共有 2^{2^n} 个不同的真值函数.

2) 联结词全功能集

设 S 为一个联结词集合，若任意真值函数都可以仅用 S 中的联结词表示的公式所表示，则把 S 称为联结词全功能集.

3）极小全功能集

若一个联结词的全功能集中不含冗余的联结词，把该全功能集称为极小全功能集.

4）常见联结词全功能集

常见的联结词全功能集有{¬，∧，∨，$\not\leftrightarrow$，→，↔}，{¬，∧，∨，→，↔}，{¬，∧，∨}，{¬，∧}，{¬，∨}，{↑}，{↓}，{¬，→}，其中{¬，∨}，{¬，∧}，{↑}，{↓}，{¬，→}为极小全功能集.

5. 对偶与范式

1）对偶式

设公式 A 为仅含{¬，∧，∨}中联结词的公式，将∨换成∧，∧换成∨，若含 0，换成 1；若含 1，换成 0，所得公式记为 A^*，A^* 称为 A 的对偶式.

2）文字

把命题变项或其否定称为文字.

3）简单析取式

由有限个文字组成的析取式称为简单析取式.

4）简单合取式

由有限个文字组成的合取式称为简单合取式.

5）极小项

在含 n 个命题变项的合取式中，如果每一个变项与其对应的否定项不能同时出现，但两者必须出现且仅出现一次，这种合取式称为极小项，简称小项.

n 个命题变项共可产生 2^n 个极小项，分别记为 $m_0, m_1, \cdots, m_{2^n-1}$，其中极小项 m_i 仅与 i（$0 \leqslant i \leqslant 2^n-1$）的二进制编码对应的赋值为成真赋值，其他为成假赋值.

6）极大项

在含 n 个命题变项的析取式中，如果每一个变项与其否定不能同时出现，但两者之一必须出现且仅出现一次，则该析取式称为极大项，简称大项.

n 个命题变项共可产生 2^n 个极大项，分别记为 $M_0, M_1, \cdots, M_{2^n-1}$，其中极大项 M_i 仅与 i（$0 \leqslant i \leqslant 2^n-1$）的二进制编码对应的赋值为成假赋值，其他为成真赋值.

7）析取范式

仅由有限个简单合取式组成的析取式，称为析取范式.

8）主析取范式

仅由有限个极小项组成的析取式，称为主析取范式.

9）合取范式

仅由有限个简单析取式组成的合取式，称为合取范式.

10）主析取范式

仅由有限个极大项组成的合取式，称为主合取范式.

11）主要定理

定理 1.1　任一命题公式都存在着与其等值的析取范式和合取范式.

定理 1.2　任一命题公式都唯一地存在着与其等值的主析取范式与主合取范式.

6. 推理理论

1）推理的形式结构

设 $A_1, A_2, \cdots, A_k, B$ 为命题公式，称

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B \qquad (*)$$

为推理的形式结构，$A_1,A_2,\cdots,A_k$ 为推理的前提，B 为推理的结论. 若（$*$）式为重言式，则称推理正确，此时称 B 是 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 的逻辑结论或有效结论，并可将（$*$）式记为 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k\Rightarrow B$.

2）推理定律

重言蕴涵式称为推理定律. 每一个等值式可产生两个推理定律.

3）证明

证明是一个描述推理过程的命题公式序列，其中的每个命题公式或者是已知的前提，或者是由某些前提应用推理规则得到的结论.

4）推理定律

称重言蕴涵式为推理定律. 主要的推理定律有：

(1) $A\Rightarrow A\vee B$;　附加

(2) $A\wedge B\Rightarrow A$;　化简

(3) $(A\to B)\wedge A\Rightarrow B$;　假言推理

(4) $(A\to B)\wedge\neg B\Rightarrow\neg A$;　拒取式

(5) $(A\vee B)\wedge\neg A\Rightarrow B$;　析取三段论

(6) $(A\to B)\wedge(B\to C)\Rightarrow A\to C$;　假言三段论

(7) $(A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C)\Rightarrow A\leftrightarrow C$;　等价三段论

(8) $(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(A\vee C)\Rightarrow B\vee D$.　构造性二难

判断推理是否正确，就是判断推理的形式结构（$*$）是否为重言式. 其主要方法有：

(1) 真值表法；

(2) 等值演算法；

(3) 主析取（主合取）范式法.

5）构造证明法

6）推理规则

(1) 前提引入规则.

(2) 结论引入规则.

(3) 置换规则.

(4) 假言推理规则：$(A\to B)\wedge A\Rightarrow B$.

(5) 附加规则：$A\Rightarrow A\vee B$.

(6) 化简规则：$A\wedge B\Rightarrow A$ 或 $A\wedge B\Rightarrow B$.

(7) 拒取式规则：$(A\to B)\wedge\neg B\Rightarrow\neg A$.

(8) 假言三段论规则：$(A\to B)\wedge(B\to C)\Rightarrow A\to C$.

(9) 析取三段论规则：$(A\vee B)\wedge\neg A\Rightarrow B$ 或 $(A\vee B)\wedge\neg B\Rightarrow A$.

(10) 合取引入规则：$A,B\Rightarrow A\wedge B$.

(11) 构造性二难规则：$(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(A\vee C)\Rightarrow B\vee D$.

7. 小结

学习第 1 章（命题逻辑）要注意以下几点.

(1) 要弄清命题与陈述句的关系，命题都是陈述句，但陈述句不都是命题. 只有陈述句所表达的判断结果是唯一确定的（正确的或错误的），它才是命题.

(2) 弄清由五种基本联结词联结的复合命题的逻辑关系及其真值，特别是要弄清楚蕴涵式 $p\to q$

的逻辑关系及其真值，这里，q 是 p 的必要条件. 无论蕴涵关系如何表述，都要仔细地区分出蕴涵式的前件和后件，否则会将必要条件当成充分条件，当然就有可能将假命题变成真命题，或将真命题变成假命题.

(3) 记住 24 个基本的等值式，这是学好命题逻辑的关键所在. 这是因为，在等值演算过程中，在求主析取范式和主合取范式过程中，在将公式化成等值的某个全功能联结词集中公式的过程中都要用到基本的等值式.

(4) 要会准确地求出给定公式的主析取范式和主合取范式，掌握主析取范式与真值表的关系、主析取范式与成真赋值的关系、主析取范式与主合取范式的关系、公式的主合取范式与真值表及成假赋值的关系. 还要弄清不同类型公式的主析取范式及主合取范式的特点，特别是要知道，重言式的主析取范式含 2^n(n 为公式中所含的命题变项数)个极小项；重言式的主合取范式为 1，而矛盾式的主析取范式为 0，主合取范式含 2^n 个极大项.

(5) 会用多种方法(如真值表法、等值演算法、主析取范式法等)判断公式的类型及判断两个公式是否等值.

(6) 会用等值演算法将一个联结词全功能集中的公式等值地化为另一个联结词全功能中的公式.

(7) 要弄清楚推理的形式结构，掌握判断推理是否正确的方法，以及针对某些正确的推理会构造它的证明.

以上各注意事项，在习题解答中均可找到具体的实例.

二、释疑解惑

1. 命题与悖论有什么区别?

命题是指能判别真假的陈述句，而悖论只是一种陈述句，但不能判别真假.

如下面两句话.

我是中国人.

我在说谎.

第一句话是一个命题，就作者而言，“我”讲这句话，而我确实是中国人，这个陈述句有确定的真值为“真”，它是一个真命题. 而第二句话是陈述句，但不是命题. 这是为什么呢? 如果假设它也是命题，则应该有固定的真值，不是“真”就是“假”. 若其值为“真”，则我确实是在说谎，我讲的是真话，与本句含义“我在说谎”矛盾，不成立；若其值为“假”，则我应该不在说谎，我讲的是真话，根据其含义，“我在说谎”是真的，矛盾，故也不成立. 因而这个陈述句没有确定的真值，它不是命题，是悖论.

2. 什么是可兼或? 什么是不可兼或(排斥或，异或)?

在日常生活中会经常用到“或”这个关系词，有的时候它指的是可兼或，有时是指不可兼或. 而命题逻辑中析取联结词 $\vee$ 表示的是“可兼或”，不可兼析取 $\overline{\vee}$ 表示的是“不可兼或”. “可兼或”中两命题可以同时为真，也可以只有一个为真；但不可兼或中的“或”两者不能同时为真，必须有一个而且只能有一个为真. 如下面两句话.

他可能是 100 m 或 400 m 赛跑的冠军.

今天晚上我在家看电视或去剧场看戏.

第一个命题中的“或”是可兼或，因为他既可以是 100 m 赛跑的冠军，也可以是 400 m 赛跑的冠

军，因而原复合命题可选用析取联结词 $\vee$ 来表示.

第二个命题中的“或”是不可兼或，因为在同一时间内“我在家看电视”和“我去剧场看戏”两者不能同时成立. 而且对于原命题，“我在家看电视”和“我去剧场看戏”两者必须有一个为真，原命题才为真，因而必须选用联结词 $\overline{\vee}$ 来表示.

3. 等价式与蕴涵式之间有什么关系？

它们都是用来表示命题之间的联结词，等价联结词用 $\leftrightarrow$ 来表示，蕴涵联结词用 $\rightarrow$ 来表示，它们的关系是：设 A 和 B 是两个命题公式，则 $A\leftrightarrow B$ 的充要条件是 $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$.

4. 等价公式与等值式之间有什么关系？

等价公式和等值式是两个截然不同的概念. 等值公式是指两个命题公式之间的关系，两个命题公式 A 和 B 等值，即 $A\Leftrightarrow B$ 是指对于它们任意一组赋值，A 和 B 的真值都相同，表现在真值表上，它们的真值表是一样的；而等价式 $\leftrightarrow$ 是一种联结词，它将两个命题公式联结起来，如命题公式 A 和命题公式 B 用等价联结词联结以后形成了一个新的命题公式 $A\leftrightarrow B$.

但是它们之间还是有一定的联系：当 A，B 为两个命题公式时，$A\Leftrightarrow B$ 的充要条件是 $A\leftrightarrow B$ 为一个重言式.

5. 等值式与重言蕴涵式之间有什么关系？

如 $A\rightarrow B$ 为重言式，即 $A\rightarrow B\Leftrightarrow 1$，称其为重言蕴涵式，记为 $A\Rightarrow B$.

等价公式与重言蕴涵式表示的都是两个命题公式之间的关系，命题公式 A 和 B 等值即 $A\Leftrightarrow B$，与重言蕴涵式 $A\Rightarrow B$ 的关系是 $A\Leftrightarrow B$ 的充要条件是 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$.

6. 命题逻辑中为什么要引进三个其他联结词？

为了使命题之间关系表示更直接、更明了，补充定义了三个联结词：$\uparrow$，$\downarrow$，$\overline{\vee}$，但是它们不是独立存在的，即它们都可以用仅含有五个基本联结词的某些联结词的命题公式来等值表示，即

$P\ \overline{\vee}\ Q\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$；

$P\uparrow Q\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)$；

$P\downarrow Q\Leftrightarrow\neg(P\vee Q)$.

7. 什么是极小联结词全功能集？

一个极小联结词全功能集是由一个或若干个联结词构成的一个集合，使得任何命题公式都可以用这个集合中的某些联结词来等值地表示，而且删除这个集合中的任何一个联结词，就不能将所有命题公式表达出来. 例如，五个基本联结词中集合 $\{\neg,\wedge\}$ 可以构成一个极小联结词全功能集. 因此，也将极小联结词全功能集称为功能完备的联结词集.

8. 如何求一个命题公式的主析取范式与主合取范式？

求一个命题公式的主析取范式通常有两种方法. 一种是利用真值表法，列出这个命题公式的所有真值取法，在求主析取范式时是将所有取值为真的行列出来. 对应每一个取值为真的行，写出极小项，用联结词 $\vee$ 联结. 而主合取范式正好相反，先找出所有取值为假的行，写出其对应极大项，然后用联结词 $\wedge$ 联结. 另一种方法是利用等值公式进行等值变换，有目的地变换成析取的形式或合取的形式，最后利用分配律将其变成极小项之析取或极大项之合取.

9. 极大项与极小项之间、主合取范式与主析取范式之间有什么样的关系？

极大项用 M 表示，极小项用 m 表示，对应同一下标编码的极大项与极小项，两者有密切的联系. 这是因为由德 · 摩根定律 $\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$，$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$，因而对于同一编码有：$\neg m_i\Leftrightarrow M_i$，$\neg M_i\Leftrightarrow m_i$.

设命题公式 A 的主析取范式是 $m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_k} = \sum i_1, i_2, \cdots, i_k$，故 $\neg A = \neg(m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \cdots \vee m_{i_k}) = \neg m_{i_1} \wedge \neg m_{i_2} \wedge \cdots \wedge \neg m_{i_k} = M_{i_1} \wedge M_{i_2} \wedge \cdots \wedge M_{i_k}$，这是 $\neg A$ 的主合取范式. 由于公式 A 与 $\neg A$ 对于相同的任一种赋值，取值正好相反. 因而对应于这些行，$\neg A$ 取值应为假，故 A 取值为真，因而对于公式 A 而言，剩下的不包括这些行所对应的 $A = M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \cdots \wedge M_{j_{2^n-k}}$，其中 $j_1, j_2, \cdots, j_{2^n-k}$ 是 $0, 1, 2, \cdots, 2^n-1$ 中去除 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 所剩下的那些整数.

10. 代入规则和置换规则是同一回事吗?

代入规则和置换规则不是同一回事.

代入规则是指对重言式而言，将其中的任一命题变元出现的每一处均用任一命题公式进行替换，而得到的公式仍是重言式. 这是仅有重言式才有的特殊性质，而其他公式未必成立. 例如：重言式 $P \vee \neg P$，将其中的 P 用任一命题公式进行替换，若用 $P \wedge Q$ 进行替换，得到公式 $(P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge Q)$ 仍是一重言式.

置换规则是对任一命题公式与其子公式而言，用等值的公式替换子公式，所得公式与原公式等值，即设 C 是公式 A 的子公式，$C \Leftrightarrow D$，若用 D 置换(可以只置换其中出现的一个或所有的) C，得到的公式 B 与原公式 A 等值，即 $A \Leftrightarrow B$. 如公式 $(P \to Q) \wedge P$，其中 $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$，则可用 $\neg P \vee Q$ 进行置换，得到的公式 $(\neg P \vee Q) \wedge P$ 与原公式等值.

11. 含有 n 个命题变项的不等值的命题公式共有多少个?

含有 n 个命题变项的不等值的命题公式共有 2^{2^n} 个，这是因为对于含有 n 个命题变项的命题公式，由于每个命题变项有真、假两种取值，因而真值表共有 2^n 行，而对应这 2^n 种真值赋值，每一行均可取 T 或 F，故共有 2^{2^n} 种不同取值. 但由于命题公式的等值定义，两个命题公式的真值表对于所有的赋值只要有一次取值不同，那么这两个命题公式就是不等值的，因而所有不等值的命题公式共有 2^{2^n} 个.

三、典型例题解析

例 1 判断下列句子哪些是命题. 在命题中，判断哪些是简单命题，哪些是复合命题，求出其真值.

(1) $2x+3=6$.

(2) 明年10月1日不是晴天.

(3) 这朵花多么好看呀!

(4) 今天下午有会吗?

(5) 地球外有的星球上有水.

(6) 我正在说谎.

(7) 请不要大声吵闹!

(8) $1+101=110$.

(9) 明天如果天气晴朗，我将去公园.

(10) 我学习英语或德语.

(11) 雪是黑的当且仅当太阳从东方升起.

(12) 2是偶数且是素数.

分析 可利用排除法来解. 首先，命题必须是陈述句，所以(3)、(4)、(7)是非陈述句，应该排除，它

们不是命题. 其次，命题必须有确定的真值，凡无确定真值的陈述句也不是命题. (1)的真值随变量 x 的不同而不同，如 $x=1.5$，它是真命题；如 x 等于其他值，它是假命题. 故该陈述句没有确定的真值，因而它也不是命题. 需要注意的是，真值是否确定与我们是否知道它的真值是两码事，如(5)是具有确定的真值的，只是目前的科技水平还无法知道该命题的真值答案而已(这类问题显然不胜枚举). (6)也不是命题，它是一个悖论. 因为，如果所说的是真话，则说“我正在说谎”是一个假命题；如果所说的是假话，则说“我正在说谎”又是一个真命题，因此，该陈述句无确定真值.

解　由以上分析可知，(2)、(5)、(8)～(12)是命题，其中(2)、(5)、(8)是原子命题，(9)～(12)是复合命题. (2)的真值要等到明年10月1日才能确定. (5)的真值目前也无法确定. 对于(8)，如果所说是二进制，则是一个真命题；如果所说是十进制，则是一个假命题. 对于(9)，当明天天气晴朗，而我又去了公园时，则其真值为T或“明天天气不是晴天”命题也为T. 对于(10)，“我学习英语”、“我学习德语”只要有一个为T，则该命题为T. (11)为假命题，因“雪是黑的”为F，“太阳从东方升起”为T，故该等价式命题为F. 对于(12)，因2既是偶数又是素数，故该等价式命题为T.

例2　将下列命题符号化.

(1) 他既聪明又用功.

(2) 辱骂和恐吓绝不是战斗.

(3) 除非天气好，否则我是不会去看电影的.

(4) 我将去现场看这场比赛，或在家看电视转播.

(5) 如果晚上他在家里且没有其他的事情，他一定会看电视或听音乐.

分析　将一个命题符号化，就是要将这个命题表达成符合规定的命题表达式. 在具体表达时，通常应先将命题中所包含的原子命题列出，然后再用适当的联结词联结起来. 将命题分解成原子命题一般并不困难，问题的关键在于要选择好适当的联结词. 要准确表达原命题的意义，就必须对原命题的中文含义有较深刻、较透彻的理解. 应特别注意的是，命题逻辑中的联结词一般和中文中的联结词之间并没有一一对应的关系，因此，必须仔细揣摩命题的实际含义，理解命题中各原子命题的结构关系，而不应拘泥于命题的形式而生搬硬套.

在(1)中，“他聪明”、“他用功”显然是并列关系，应用联结词“$\wedge$”联结. 在汉语中，并列关系可以用多个联结词表示，除用“既……又……”表达外，还可以用“且”，“不但……，而且……”等表达.

题(2)的实际含义应为：辱骂不是战斗，恐吓不是战斗，辱骂和恐吓加在一起也不是战斗，因此，应用联结词“$\vee$”表示. 注意，此例的中文意思也可写成“辱骂和恐吓都不是战斗”，因此很容易用“合取”来表示，这是因对此命题的准确含义理解不透，仅从表达形式硬套而造成的.

题(3)的实际含义是：我去看电影必定天气好，至于天气好是否一定去看电影，文中并未涉及，所以，“天气好”是“去看电影”的必要条件. 另外，在该命题中没有提出“天气好”和“去看电影”的具体时间，因此，仅按字面意义去列出原子命题，就将出现不完整的陈述句. 实际上，在叙述这个命题时是有着特定的时间的，例如可设时间为“今天”、“明天”等.

题(4)的两原子命题间是选择关系. 联结词$\vee$表示“可兼或”，而这里显然不是“可兼或”，而是一种排斥或，两命题不可同时成立.

对于题(5)，“看电视”与“听音乐”可兼而有之，即可边听音乐边看电视，因此，可用“可兼或”$\vee$表示.

解　(1) 设 P:他聪明，Q:他用功，则题(1)可表示为 $P\wedge Q$.

(2) 设 P:辱骂不是战斗，Q:恐吓不是战斗，则题(2)可表示为 $P\vee Q$.