



21

21世纪大学课程辅导丛书

普通物理 大学物理

— 经典题 — 考研题解析 —

新版

张淳民 刘凤英 查新未
黄海清 孟 杰
主 审 陈秉乾



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS



21

21世纪大学课程辅导丛书

普通物理 大学物理

——经典题——考研题解析——

新版

张淳民 刘凤英 查新未
黄海清 孟 杰

主 审 陈秉乾



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书为理科“普通物理”和工科“大学物理”课程的辅助教材,由北京大学、清华大学、西安交通大学等学校长期从事物理学教学和研究的教授编写,是一部经典题和考研题解析荟萃。本书的体系新颖、特色鲜明,每章由“知识架构”、“知识要点”、“名师指点”、“精选题解”等四部分组成。例题的示范求解由“思路分析”、“精解”和“方法点拨”等三部分组成。书中所有题目均选自多年来国内外的优秀教材、经典题解和研究生入学考试试卷中的典型试题。

本书的指导思想是帮助学生理清学习思路,总结并掌握各章节的要点;通过各类精选题的剖析、求解和示范,分析解题思路,示范解题过程,总结方法要略,展示题型变化;达到扩展知识视野,启迪创新思维,促进能力提高的目的。

本书适合作为高等院校理工科各专业及师范院校大学生学习“普通物理”和“大学物理”课程的教学辅导书,也适合报考硕士学位研究生人员全面复习以及大学物理教师教学参考之用。

图书在版编目(CIP)数据

普通物理、大学物理经典题、考研题解析/张淳民等编著. —西安:
西安交通大学出版社,2008.9
21世纪大学课程辅导丛书
ISBN 978-7-5605-2804-5

I. 普… II. 张… III. 物理学—高等学校—解题 IV. 04-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 130628 号

书 名 普通物理、大学物理经典题、考研题解析
编 著 张淳民 刘凤英 查新未 黄海清 孟 杰
责任编辑 任振国 秦志峰

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)
网 址 <http://www.xjtupress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315 82669096(总编办)
传 真 (029)82668280
印 刷 陕西元盛印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 16 字数 382 千字
版次印次 2008 年 10 月新版 2008 年 10 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5605-2804-5/O·279
定 价 22.50 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

订购热线:(029)82665248 (029)82665249

投稿热线:(029)82664954

读者信箱:jdjgy@yahoo.cn

版权所有 侵权必究

丛书总序

“21 世纪大学课程辅导丛书”第一版出版已有十年时间,几经再版,深受广大读者的喜爱。为了满足读者朋友的需要,也为了适应高等教育改革的形势和新的教学要求,我们组织作者对本丛书进行了修订,以全新的面貌奉献给大家。

我们出版这套丛书的目的是为普通高等学校理工类专业的大学生提供一流的学习资源,使大家共享一流教师的教学经验和教学成果,更好地学习、掌握基础课和专业基础课知识,为今后的学习和深造打下良好的基础。

西安交通大学是国内仅有的几所具有百年历史的高等学府,是首批进入国家“211 工程”建设的七所大学之一,1999 年被国家确定为中西部地区惟一所以建设世界知名高水平大学为目标的学校。西安交大历来重视本科生教学,1996 年成为全国首家本科教学评估为优秀的大学。学校拥有国家级、省部级、校级教学名师数十名,具有丰富的、一流的教学资源。

本丛书由西安交通大学长期在教学一线主讲的教授、副教授主编,他们具有丰富的基础课、专业基础课教学和辅导经验。丛书作者们在长期的教学实践中,深深了解学生在学习基础课、专业基础课时的难点和困惑点之所在,对如何使学生更有效地学习、掌握课程的基本知识和解题技巧进行了深入的探索和研究,并将成果体现于书中。

本丛书以普通高等学校的学生为主要对象,不拘泥于某一本教材,而是将有特色和使用量较大的各种版本的教材加以归纳总结,取其精华,自成一体。书中对课程的基本内容、研究对象、教学要求、学习方法、解题思路等进行了全面、系统的总结和提炼,按基本知识点、重点与难点、典型题解析、自我检测题等环节进行编排;书后附录了自我检测题参考答案和近年来一些院校的期末考试题、考研试题及相应题解。本丛书的指导思想是帮助学生理清学习思路,总结并掌握各章节的要点;通过各类精选题的剖析、求解和示范,分析解题思路,示范解题过程,总结方法要略,展示题型变化;达到扩展知识视野,启迪创新思维,促进能力提高的目的。

本丛书既可以单独使用,也可以与其他教材配合使用;既可以作为课程学习时的同步自学辅导教材,也可以作为考研复习时的主要参考资料。

我们衷心希望本丛书成为您大学基础课和专业基础课学习阶段的良师益友,帮助您克服困难,进入大学学习的自由王国;也希望在考研冲刺时本丛书能助您一臂之力,使您一举成功!

在学习使用过程中,您如果发现书中有不妥之处或有好的建议,敬请批评指正并反馈给我们,我们一定会进一步改进自己的工作,力争使您满意。

真诚感谢您使用西安交大版图书。

西安交大出版社网址: <http://press.xjtu.edu.cn/>

理工医事业部网址: <http://lgny.xjtupress.com/>

理工医事业部信箱: jdlgy@yahoo.cn

西安交通大学出版社

2008年6月

西安交通大学出版社

2008年6月

西安交通大学出版社

2008年6月

西安交通大学出版社

2008年6月

西安交通大学出版社

2008年6月

西安交通大学出版社

2008年6月

西安交通大学出版社

2008年6月

西安交通大学出版社

2008年6月

西安交通大学出版社

2008年6月

西安交通大学出版社

2008年6月

西安交通大学出版社

2008年6月

西安交通大学出版社

2008年6月

西安交通大学出版社

2008年6月

前言

呈现在读者面前的这本《普通物理、大学物理经典题、考研题解析》是一部经典题和考研题集锦,汇集了国内外多年来使用的优秀试题、经典题和研究生入学考试试题,涵盖了普通物理和大学物理的全部内容。“普通物理”和“大学物理”是理工科大学生必修的一门重要基础课程,也是报考理工科硕士研究生的考试科目之一,在理工科大学生能力、素质和创新意识培养方面占有极其重要的基础地位。学好这门课程,对大学生创新意识、能力培养及未来发展具有极其重要的作用。

由于该课程包含力学、热学、电磁学、光学和近代物理等部分,涵盖面大,内容丰富,试题类型多,涉及范围广。长期以来,许多学生未能摸索出解题的思路、方法和规律,深受解题困扰,颇感解题困难。针对这一现状,本书编者在长期教学实践中,从国内外的优秀教材、经典题解和历年来研究生入学考试试题中,经过多年的筛选、积累,精选出了具有代表性的大量典型试题,从思路分析、精解、方法点拨等方面进行详细的剖析、求解和示范,目的是为在校大学生学习和掌握普通物理、大学物理知识,为报考硕士研究生的复习和大学物理教师教学提供一本经典的学习指导书和参考书。基于上述想法,我们确立了该书的框架、体系和编写思路。

与国内外已经出版的同类书籍比较,本书的特色及独到之处有以下几点。

1. 本书由北京大学、清华大学、西安交通大学等长期从事物理教学和研究的教授编写。
2. 本书通用性强,并不限于与哪一套教材相配套,而是针对理工科大学生应该掌握的物理教学内容和基本要求,为提高分析解题能力以及培养学生的科学素养、创新意识和能力而构思编写的。
3. 所有例题均选自国内外多年来使用的优秀试题、经典题以及历年来研究生入学考试中的常用题型和典型试题。这些饱含经验与智慧、经过千锤百炼的命题,每题展示一种类型;另外还有部分优秀的综合性题目,均具有典型的代表性。
4. 该书具有不同于目前国内出版的各类“普通物理”和“大学物理”学习指导书和题解的显著特色:

每章含有“知识架构;知识要点;名师指点;精选题解”四大部分。

在“精选题解”部分,每道题由“思路分析;精解;方法点拨”三部分组成。重点突出,结构合理,特色鲜明。通过方法点拨,使学生掌握解题要领,达到举一反三、融会贯通的目的。

5. 本书与《普通物理、大学物理经典名题名师解析》(科学出版社,2006)互为姐妹篇,与其不同之处为:增添了选择题、填空题;所选题难度达到或略高于目前国内考研试题水平,适应面广;大量增添了近年来研究生入学考试试题。

6. 本书物理概念、图像及解题思路清晰,做题规范,格式漂亮,严谨科学。

本书由西安交通大学张淳民教授,清华大学刘凤英教授,西安邮电学院查新未教授,空军工程大学黄海清副教授,北京大学孟杰教授编写。

其具体分工如下:第1,2,3,4,5,6,7章(查新未);第8,9,10,11章(黄海清);第12,13,14章(刘凤英);第15,16章(张淳民);第17章(孟杰)。

全书各章中的“名师指点”内容由北京大学陈秉乾教授和西安交通大学张淳民教授编写。

张淳民教授主持了本书编写大纲的制订及本书编写工作,对本书全部内容进行了修改、统稿并根据主审意见进行了定稿。

北京大学陈秉乾教授任本书主审,对全书内容进行了认真、细致的审阅,提出了非常宝贵的指导与修改意见,并给予本书以高度的评价。

西安交通大学出版社任振国同志任本书编辑,为本书编写方案的制订和体系的形成提出了重要的建议。

研究生任文艺对本书部分章节内容进行了认真、细致的修改和校订,并参加了部分内容的编写工作;研究生简小华、孙尧、杜娟、朱化春、祝宝辉、吴海英、黄伟健、朱兰艳、孙明昭、步志超、张霖、刘宁等参加本书的文字录入及校改工作,在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限,本书在许多方面还存在着需要完善之处,也一定存在着很多不妥和错误,衷心希望读者提出宝贵意见。

编者

2008年7月于西安

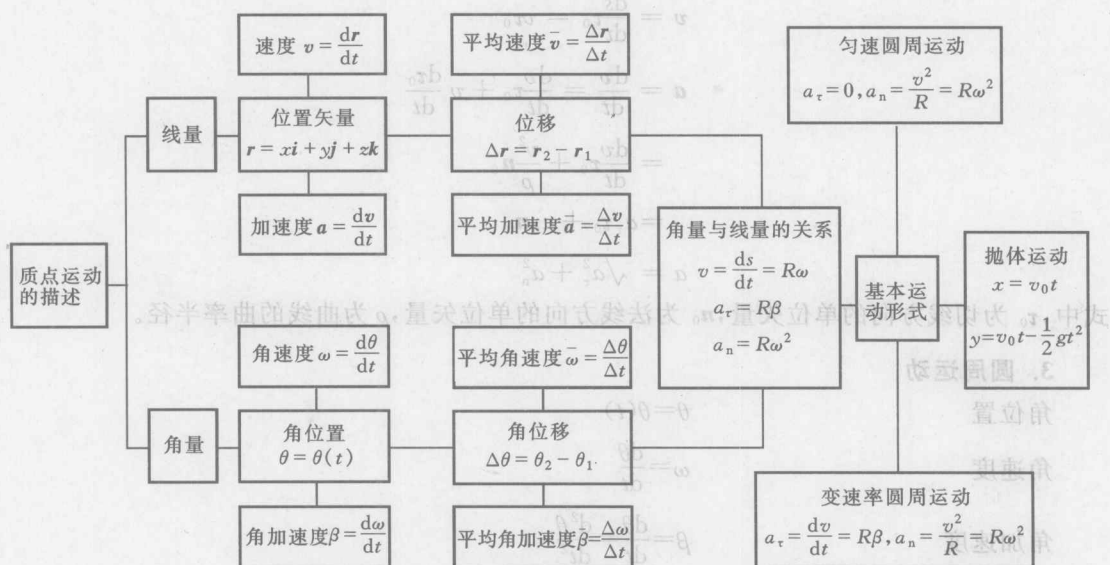
目 录

第一篇 力 学	(1)
第 1 章 质点运动学	(1)
第 2 章 质点动力学	(12)
第 3 章 刚体的定轴转动	(25)
第二篇 振动和波	(39)
第 4 章 简谐振动	(39)
第 5 章 波动	(50)
第三篇 热 学	(63)
第 6 章 气体动理论	(63)
第 7 章 热力学	(77)
第四篇 电磁学	(94)
第 8 章 静电场	(94)
第 9 章 静电场中的导体与电介质	(114)
第 10 章 稳恒磁场	(134)
第 11 章 电磁感应	(152)
第五篇 光 学	(170)
第 12 章 光的干涉	(170)
第 13 章 光的衍射	(186)
第 14 章 光的偏振	(196)
第六篇 近代物理	(209)
第 15 章 狭义相对论	(209)
第 16 章 量子物理基础	(221)
第 17 章 原子物理	(234)

第一篇 力学

第 1 章 质点运动学

1.1 知识架构



1.2 知识要点

1. 描述质点运动的基本物理量

位置矢量 $r = r(t)$

位移矢量 $\Delta r = r_2 - r_1$

速度矢量 $v = \frac{dr}{dt}$

加速度矢量 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$

2. 速度、加速度在不同坐标系下的表达式

直角坐标系

$$r = xi + yj + zk$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k$$

$$=v_x i + v_y j + v_z k$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$a = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} i + \frac{d^2 y}{dt^2} j + \frac{d^2 z}{dt^2} k$$

$$=a_x i + a_y j + a_z k$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

自然坐标系

在某些问题中,若已知质点的运动轨道,那么可在此曲线轨道上任选一定点,则质点的位置可用其和 O 点间的路程 s 来表示。

$$s = s(t)$$

$$v = \frac{ds}{dt} \tau_0 = v \tau_0$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \tau_0 + v \frac{d\tau_0}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt} \tau_0 + \frac{v^2}{\rho} n_0$$

$$= a_\tau \tau_0 + a_n n_0$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

式中, τ_0 为切线方向的单位矢量, n_0 为法线方向的单位矢量, ρ 为曲线的曲率半径。

3. 圆周运动

角位置

角速度

角加速度

角量与线量之间的关系

$$\theta = \theta(t)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$v = R\omega, \quad a_\tau = R\beta, \quad a_n = R\omega^2$$

4. 相对运动

$$\mathbf{r}_{\text{绝对}} = \mathbf{r}_{\text{相对}} + \mathbf{r}_{\text{牵连}}$$

$$\mathbf{v}_{\text{绝对}} = \mathbf{v}_{\text{相对}} + \mathbf{v}_{\text{牵连}}$$

$$\mathbf{a}_{\text{绝对}} = \mathbf{a}_{\text{相对}} + \mathbf{a}_{\text{牵连}}$$

或

$$\mathbf{r}_{A\text{对}C} = \mathbf{r}_{A\text{对}B} + \mathbf{r}_{B\text{对}C}$$

$$\mathbf{v}_{A\text{对}C} = \mathbf{v}_{A\text{对}B} + \mathbf{v}_{B\text{对}C}$$

$$\mathbf{a}_{A\text{对}C} = \mathbf{a}_{A\text{对}B} + \mathbf{a}_{B\text{对}C}$$

1.3 名师指点

运动学问题可以分为以下两类。

(1) 已知质点的运动方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, 求质点的速度 $\mathbf{v}$ 和加速度 $\mathbf{a}$ 。对于此类问题,只需要按

运动方程对时间 t 求导即可。

(2) 已知加速度 a 及初始条件,求速度和运动方程。对于这类问题可应用积分法求解。对有些问题,要先进行分离变量或变量代换,再利用积分法解之。

在实际求解中,可由题目的已知条件和要求解的物理量,判断属哪一类问题。不同类型的问题采用不同方法求解。另外,应选择合适的坐标系。一般采用直角坐标系,但对圆周运动或曲线运动采用自然坐标系更方便进行数学运算。

1.4 精选题解

1-1 瞬时速度 v 的大小 $|v|$ 可以用下列哪个式子来表示:

- A. $\frac{dr}{dt}$; B. $\frac{d|r|}{dt}$; C. $\left|\frac{dr}{dt}\right|$; D. $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ 。

【思路分析】 由于速度 $v = \frac{dr}{dt}$, 所以速度 v 的大小 $|v| = \left|\frac{dr}{dt}\right|$, 故应选 C。

1-2 一个质点在做匀速率圆周运动时:

- A. 切向加速度改变,法向加速度也改变;
B. 切向加速度不变,法向加速度改变;
C. 切向加速度不变,法向加速度也不变;
D. 切向加速度改变,法向加速度不变。

【思路分析】 质点在做匀速率圆周运动时,其速度的大小不变,则切向加速度 $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$,

而法向加速度的大小不变,但方向在改变,故应选 B。

1-3 一质点从静止出发,绕半径为 R 的圆周做匀变速圆周运动,角加速度为 β ,当该质点走完一周回到出发点时,所经历的时间为:

- A. $\frac{2\pi}{\beta}$; B. $\sqrt{\frac{4\pi}{\beta}}$; C. $\sqrt{\frac{4\pi R}{\beta}}$; D. $\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}$ 。

【思路分析】 对匀变速圆周运动,其公式与匀加速直线运动相似,由此解之。

精解 $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$, 又因质点从静止出发, $\omega_0 = 0$, 则 $\theta = \frac{1}{2}\beta t^2$, 而质点走完一周回到出

发点时, $\theta = 2\pi$, 所以 $2\pi = \frac{1}{2}\beta t^2$, 可以解出 $t = \sqrt{\frac{4\pi}{\beta}}$, 故选 B。

1-4 质点沿半径为 R 的圆周按规律 $s = bt - ct^2/2$ 运动,其中 b, c 是常数,则在切向加速度和法向加速度大小相等以前所经历的时间为()。

(中国科学院西安光机所 2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试题)

- A. $\frac{b}{c} + \sqrt{\frac{R}{c}}$; B. $\frac{b}{c} - \sqrt{\frac{R}{c}}$; C. $\frac{b}{c} - cR^2$; D. $\frac{b}{c} + cR^2$ 。

【思路分析】 此题属于运动学中的自然坐标问题。可由 $s = bt - ct^2/2$ 求出速率及切向加速度,进一步求出法向加速度,再由切向加速度大小等于法向加速度的条件,即可解出时间 t 。

精解 $v = \frac{ds}{dt} = b - ct$

而

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -c, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(b-ct)^2}{R}$$

当 $a_t = a_n$ 可得

$$\frac{(b-ct)^2}{R} = c$$

则

$$t = \frac{b}{c} \pm \sqrt{\frac{R}{c}}$$

所以选 A、B。

1-5 下列哪种速度的数量级在 10^2 m/s:

A. 提速后的火车速度; B. 声速; C. 赛马的速度; D. 第一宇宙速度。

(西安交通大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题)

【思路分析】 此题属于常识问题,一般火车速度、赛马的速度的数量级为 10 m/s,声速的数量级可达为 $10^2 \sim 10^3$ m/s,而第一宇宙速度的数量级为 10^4 m/s。所以选 B。

1-6 在相对地面静止的坐标系内, A、B 二船均以 2 m/s 的速率匀速行驶, A 船沿 x 轴正向, B 船沿 y 轴正向。今在 A 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系(x, y 方向单位矢用 i, j 表示), 那么在 A 船上的坐标系中, B 船的速度(以 m/s 为单位)为_____。

(北京理工大学 2002 年攻读硕士学位研究生入学考试试题)

A. $2i+2j$; B. $-2i+2j$; C. $-2i-2j$; D. $2i-2j$ 。

【思路分析】 此题属于运动学中的相对运动问题,应清楚求谁相对谁的速度。由已知条件有 $v_{A对地} = 2i, v_{B对地} = 2j$, 而所求的是 $v_{B对A}$, 由相对速度公式可解出。

精解 由于 $v_{A对地} = 2i, v_{B对地} = 2j$; 利用相对速度公式

$$v_{A对C} = v_{A对B} + v_{B对C}$$

则有

$$v_{B对A} = v_{B对地} - v_{A对地} = 2j - 2i$$

所以

$$v_{B对A} = 2j - 2i$$

所以选 B。

1-7 一质点作匀加速直线运动, 在 t s 时间内走过路程 s m, 而其速度增为初速的 n 倍。此过程中的加速度 a 为_____。

(北京理工大学 2003 年攻读硕士学位研究生入学考试试题)

【思路分析】 对匀加速直线运动, 可由路程及速度公式, 得出加速度。

精解 由 $v = v_0 + at, s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, 并利用 $v = nv_0$

可解出

$$a = \frac{2s(n-1)}{t^2(n+1)}$$

1-8 已知某质点的运动方程为 $x = 3\cos 4t, y = 3\sin 4t$ (SI), 该质点的切向加速度和法向加速度大小各为多少?

(浙江大学 2006 年攻读硕士学位研究生入学考试试题)

【思路分析】 可由质点的运动方程得出速率及切向加速度, 进一步得出法向加速度。

精解 由运动方程

$$x = 3\cos 4t, \quad y = 3\sin 4t$$

消去 t 得轨迹方程

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

即质点作半径为 3 的圆周运动。

又 $v_x = \frac{dx}{dt} = -12\sin 4t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 12\cos 4t$

所以

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 12$$

切向加速度为

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$$

法向加速度为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 48$$

【方法点拨】 对运动学中的自然坐标问题,须用自然坐标的速率及切向加速度公式求解。

1-9 一质点沿 x 轴方向运动,其加速度随时间的变化关系为 $a = 3 + 2t$ (SI),如果初始时质点的速度 $v_0 = 5$ m/s,则当 $t = 3$ s 时,质点的速度 v 为多少?

(浙江大学 2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试题)

【思路分析】 对直线运动,可由 $a = \frac{dv}{dt}$ 公式通过积分得出。

精解 由 $a = \frac{dv}{dt}$, 又 $a = 3 + 2t$, 所以

$$\frac{dv}{dt} = 3 + 2t \quad dv = (3 + 2t)dt$$

两边积分

$$\int_5^v dv = \int_0^3 (3 + 2t) dt$$

得

$$v = 23$$

【方法点拨】 对直线运动,加速度已知求速度,属第二类问题,可由积分求解。

1-10 半径为 R 的圆周上运动的质点,其速率与时间关系为 $v = ct^2$ (式中 c 为常量),则从 $t = 0$ 到 t 时刻质点走过的路程 $s =$ _____; t 时刻质点的切向加速速 $a_\tau =$ _____; 法向加速度 $a_n =$ _____。

(北京航空航天大学 2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试题)

【思路分析】 此题属于运动学问题,因作曲线(圆周)运动,可应用自然坐标系中的相应公式求解。

精解 (1) 由 $v = \frac{ds}{dt}$, 可得

$$\frac{ds}{dt} = ct^2$$

则 $ds = ct^2 dt$, 两边积分

$$\int_0^s ds = \int_0^t ct^2 dt$$

得

$$s = \frac{1}{3} ct^3$$

切向加速度

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 2ct$$

法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{c^2 t^4}{R}$$

【方法点拨】 对运动学中的自然坐标问题,须用自然坐标的速率及切向、法向加速度公式求解。

1-11 当火车静止时,乘客发现雨滴下落方向偏向车头,偏角为 30° 。当火车以 35 m/s 的速率沿水平直路行驶时,发现雨滴下落方向偏向车尾,偏角为 45° ,假设雨滴相对地的速度保持不变,试计算雨滴相对地的速度大小。

(北京航空航天大学 2005 年攻读硕士学位研究生入学考试试题)

【思路分析】 关于相对运动,必须明确速度是相对哪个参考系而言的。火车的速度是相对地面参考系的,而乘客观察到的雨滴速度是雨滴相对于火车参考系而言的。

精解 建立坐标系如图 1-1 所示,以车前进方向为 x 轴正向,竖直向上为 y 轴正向。设雨滴相对地的速度大小为 v 。由已知条件知

$$\boldsymbol{v}_{\text{雨对地}} = v \sin 30^\circ \boldsymbol{i} - v \cos 30^\circ \boldsymbol{j} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{v}_{\text{车对地}} = 35 \boldsymbol{i} \quad (2)$$

利用速度合成公式

$$\boldsymbol{v}_{\text{雨对地}} = \boldsymbol{v}_{\text{雨对车}} + \boldsymbol{v}_{\text{车对地}}$$

即

$$\boldsymbol{v}_{\text{雨对车}} = \boldsymbol{v}_{\text{雨对地}} - \boldsymbol{v}_{\text{车对地}}$$

$$= v \sin 30^\circ \boldsymbol{i} - v \cos 30^\circ \boldsymbol{j} - 35 \boldsymbol{i}$$

$$= (v \sin 30^\circ - 35) \boldsymbol{i} - v \cos 30^\circ \boldsymbol{j}$$

由图可知

$$v_{\text{雨对车}x} = v_{\text{雨对地}x}$$

$$\frac{v}{2} - 35 = -v \frac{\sqrt{3}}{2}$$

则

$$v = \frac{70}{\sqrt{3} + 1}$$

【方法点拨】 对运动学中的相对运动问题,一般须建立坐标系,然后用速度合成公式求解。

1-12 一质点沿 x 轴作直线运动。 $a=kt$, $t=0$ 时, $x=x_0$, $v=v_0$ 。求:任意时刻质点的速度和位置,其中 k 为常量。

【思路分析】 此题的求解属于运动学中的第二类问题,可应用积分法求解。

精解 (1) 由 $a=kt$, 即

$$\frac{dv}{dt} = kt$$

$$dv = kt dt$$

两边积分,并注意 $t=0$ 时, $v=v_0$, 则

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t kt dt$$

得

$$v - v_0 = \frac{1}{2} kt^2$$

$$v = v_0 + \frac{1}{2} kt^2$$

由

$$v = \frac{dx}{dt}$$

得

$$dx = v dt = (v_0 + \frac{1}{2} kt^2) dt$$

两边积分

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_0 + \frac{1}{2} kt^2) dt$$

得

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{6} kt^3$$

【方法点拨】 已知质点的加速度 $a=a(t)$, 求任意时刻的速度和位置, 可应用积分法求解。

例 1-13 一质点沿 x 轴作直线运动。 $a=-kv$, $t=0$ 时 $x=x_0$, $v=v_0$ 。求: 任意时刻的速度和位置, 其中 k 为常量。

【思路分析】 此题的求解属于运动学中的第二类问题, 由于加速度为速度 v 的函数, 可先分离变量(或变量代换), 再利用积分法求解。

精解 由 $a=\frac{dv}{dt}=-kv$, 分离变量可得

$$\frac{dv}{v} = -k dt$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \int_0^t -k dt$$

得

$$\ln \frac{v}{v_0} = -kt$$

即

$$v = v_0 e^{-kt}$$

再由 $v=\frac{dx}{dt}$ 得

$$dx = v dt = v_0 e^{-kt} dt$$

两边积分

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt$$

得

$$x = x_0 + \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt})$$

【方法点拨】 已知质点的加速度 $a=a(v)$, 可先进行分离变量或变量代换, 再可应用积分法求解。

例 1-14 一质点沿 x 轴作加速运动。 $a=kx$, k 为常数。开始时 $x=x_0$, $v=v_0$ 。求: 任意位置的速度。

【思路分析】 这是运动学中的第二类问题。由于加速度为位置坐标的函数, 与上题方法相同, 可先分离变量或变量代换, 再利用积分法求解。

精解 由

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

得

$$v dv = a dx = kx dx$$

两边积分有

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x kx dx$$

得

$$v^2 = v_0^2 + k(x^2 - x_0^2)$$

则

$$v = \sqrt{v_0^2 + k(x^2 - x_0^2)}$$

【方法点拨】 加速度为位置坐标 x 的函数, 应先换元, 再分离变量, 然后积分。

例 1-15 如图 1-2 所示, 在离水面高为 h 的岸边, 一人用绳拉着船靠岸。设绳长为 l_0 , 当人以匀速 v_0 收绳时, 则船的速度、加速度各为多少?

【思路分析】 此题属于运动学问题, 可先写出质点的运动方程, 然后求导即可求出速度和加速度; 此题

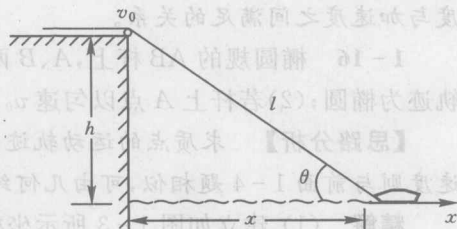


图 1-2

也可由几何约束关系求得收绳速度与船速的关系,进一步通过求导得出加速度。

精解 方法 1: 建立坐标系如图 1-2 所示。设 $t=0$ 时,滑轮与小船之间的绳长为 l_0 ,则在时刻 t ,绳长为 $l=l_0-v_0t$,此时小船的位置坐标为

$$x = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{(l_0 - v_0t)^2 - h^2} \quad (1)$$

则小船运动的速度

$$\begin{aligned} v = \frac{dx}{dt} &= \frac{-(l_0 - v_0t)v_0}{\sqrt{(l_0 - v_0t)^2 - h^2}} = \frac{-lv_0}{\sqrt{l^2 - h^2}} \\ &= -\frac{l}{x}v_0 \left(= -\frac{v_0}{\cos\theta} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

将式②再对时间求导,可得小船的加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{v_0^2 h^2}{[(l_0 - v_0t)^2 - h^2]^{3/2}} = -\frac{v_0^2 h^2}{x^3} \quad (3)$$

式②、③中的负号表示小船是沿 x 轴负方向作变加速直线运动。

方法 2: 由几何约束关系知

$$l^2 = x^2 + h^2 \quad (4)$$

将式④两边关于 t 求导得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{l}{x} \frac{dl}{dt}$$

(注意 $\frac{dl}{dt} = -v_0$), 所以得小船的运动速度

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{l}{x}v_0 \left(= -\frac{v_0}{\cos\theta} \right) \quad (5)$$

将式⑤对 t 求导,得加速度

$$\begin{aligned} a = \frac{dv}{dt} &= -v_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{l}{x} \right) \\ &= -v_0 \left(\frac{\frac{dl}{dt}x - l \frac{dx}{dt}}{x^2} \right) \\ &= -v_0 \frac{-v_0x - lv}{x^3} \\ &= -\frac{v_0^2 h^2}{x^3} \end{aligned} \quad (6)$$

【方法点拨】 运动学中求速度、加速度的一般方法是先写出位置坐标与时间的关系式,然后通过求导得出速度与加速度。但对一些特殊情况,可直接由几何约束条件通过求导得出速度与加速度之间满足的关系。

1-16 椭圆规的 AB 杆上, A、B 两点分别沿 Oy 槽、 Ox 槽移动。(1) 证明杆上一点 C 的轨迹为椭圆;(2) 若杆上 A 点以匀速 v_0 运动,求 B、C 两点的速度。

【思路分析】 求质点的运动轨迹,即求质点坐标 x 、 y 满足的轨迹方程;而求 B、C 两点的速度则与前面 1-4 题相似,可由几何约束关系来求。

精解 (1) 建立如图 1-3 所示坐标系,则 C 点的坐标为

$$x_C = (l_1 + l_2) \cos\theta \quad (1)$$

由式①、②消去 θ 得 C 点的轨迹方程

$$\left(\frac{x_C}{l_1+l_2}\right)^2 + \left(\frac{y_C}{l_2}\right)^2 = 1 \quad (3)$$

可知 C 点的轨迹为椭圆。

(2) 由于 $v_A = \frac{dy_A}{dt} \mathbf{j} = -v_0 \mathbf{j}$

$$x_B^2 + y_A^2 = l_1^2 \quad (4)$$

式④两边关于 t 求导可得

$$v_B = \frac{dx_B}{dt} = -\frac{y_A}{x_B} \frac{dy_A}{dt} = \frac{y_A}{x_B} v_0 \quad (5)$$

B 点速度的方向沿 x 轴正向。

利用①式,并注意 $\cos\theta = \frac{x_B}{l_1}$ 得

$$x_C = \frac{l_1+l_2}{l_1} x_B \quad (6)$$

同理,由式②得

$$y_C = -\frac{l_2}{l_1} y_A \quad (7)$$

由式⑥、⑦可求出

$$\frac{dx_C}{dt} = \frac{l_1+l_2}{l_1} \frac{dx_B}{dt} = \frac{l_1+l_2}{l_1} \frac{y_A}{x_B} v_0 = \frac{l_1+l_2}{l_1} v_0 \tan\theta$$

$$\frac{dy_C}{dt} = -\frac{l_2}{l_1} \frac{dy_A}{dt} = \frac{l_2}{l_1} v_0$$

所以 C 点的速度为

$$v_C = \frac{l_1+l_2}{l_1} v_0 \tan\theta \mathbf{i} + \frac{l_2}{l_1} v_0 \mathbf{j}$$

【方法点拨】 有几何约束的问题,常常由几何约束条件求速度更为简捷。

1-17 质点沿半径 $R=2\text{ m}$ 的圆周自静止开始运动,角速度 $\omega=4t^2$,试求:

(1) $t=1\text{ s}$ 时,速率为多少?

(2) $t=1\text{ s}$ 时,加速度的大小?

(3) $t=3\text{ s}$ 时,质点转过的圈数。

【思路分析】 可由圆周运动的线速度与角速度关系得出速率,进一步得出切向加速度及法向加速度。从而可求得总加速度的大小。

精解 (1) 速率为

$$v = \omega R = 8t^2 \Big|_{t=1} = 8\text{ m/s}$$

(2) 由角加速度定义得

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = 8t$$

切向加速度

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 16t \Big|_{t=1} = 16\text{ m/s}^2$$

法向加速度