集值映象与微分包含

秦松喜

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

集值映象与微分包含

秦松喜

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

集值映象与微分包含/秦松喜. —厦门:厦门大学出版社,2008.5
ISBN 978-7-5615-3017-7

Ⅰ.集… Ⅱ.秦… Ⅲ.①集值映象—高等学校—教材②微分方程—高等学校—教材 Ⅳ.O189 O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 073349 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门大学 邮编:361005)
http://www.xmupress.com
xmup@public.xm.fj.cn
沙县方圆印刷有限公司印刷
2008 年 5 月第 1 版 2008 年 5 月第 1 次印刷
开本:850×1168 1/32 印张:6.5 插页:2
字数:162 千字 印数:000 1—1 000 册
定价:15.00 元

内容提要

本书内容主要包括集值分析基础和微分包含理论两个板块。前者包括集值映象的连续性理论和选取理论,是后者存在的基础;后者是微分方程理论的推广,主要包括微分包含解的存性理论与定性理论,并对极大单调的微分包含理论和应用做了比较详细的介绍.两个板块都建立在泛函分析的基础之上,要求读者掌握点集拓扑学和泛函分析基础理论.

为了让数学与应用数学专业高年级学生也能读懂本书的基本内容,作者特意将学生在本科阶段难以学到或难以学好的上、下半连续,弱收敛和紧(或弱紧)致性等部分内容做了归纳和加深,这些内容连同其他必备知识组成第一章.不管是本科生还是研究生,要读懂本书都得先仔细读好这一章.

前　言

自从Jean-Pierre Aubin和Arrigo Cellina的第一本微分包含读本*Differential Inclusions*(《微分包含》)于1984年出版以来，国内的一些高校相继在研究生阶段开设了微分包含这门难度较大的课程. 这门课程之所以难学是因为它所承续的理论体系与我国本科阶段的数学与应用数学专业教学内容不能完全衔接，只有学过点集拓扑学的泛函分析研究方向的研究生才能够将它消化，仅受过少课时泛函分析教育训练的本科生是学不下去的.

微分包含理论作为泛函分析的一个分支，当然也是一门综合性很高的课程. 推广微分包含理论不但对提高学生的数学素质有积极的推动作用，而且还可以加强最优化方法的理论基础. 据笔者搜索，国内目前尚无中文版微分包含读本，英文版读本也只发行过一次，而且数量极其有限. 为了在国内将这一数学分支理论推广到本科生中去，笔者对目前国内仅有的一个版本*differential Inclusions*做了翻译、改造和补充，打算分成上下两部出版推荐给读者. 上部取名为“集值映象与微分包含”，主要介绍集值分析和微分包含两个板块. 对第一个板块以够用为准则，因为国内已经有了较为系统的中文版集值分析读本. 重点内容在第二个板块，主要包括微分包含解的存在性理论和定性理论，并注重将它们与微分方程相对应的理论结合起来，希望收到相辅相成的效果. 下部取名为“微分包含与最优化理论”，主要介绍微分包含解的生成理论(即可行性理论)及其在优化理论中的应用. 当然目前还处于探索性初级

阶段，不可能一下子将它做得很丰满.

由于推广微分包含理论还处于尝试阶段，而且缺乏教学实践机会，本书错漏之处一定不少，恳请读者多多原谅并不吝赐教.

作　者

2008 年 3 月

目　　录

第一章　预备知识

集值映象就是多值映象，它是微分包含赖以存在的基础. 微分包含从某种意义上讲是微分方程的推广，它以泛函分析和点集拓扑学理论为工具，综合应用数学分析、解析几何和微分方程的基础理论，建立起微分包含解的存在性理论、定性理论和生成理论. 其中，单值函数的上、下极限，上、下半连续理论，赋范线性空间中的弱收敛和弱紧性理论这些容易被普通本科生忽视的内容将起到非常重要的作用. 我们首先对这些内容进行复习归纳和补充，然后再推广泛函分析中的最佳逼近理论，并对凸分析理论做一个简要的介绍.

当然，我们还要建立一些本科阶段不曾学过的定理，如度量空间中的单位分解定理、等度振荡函数簇的紧致性定理；还要建立有界序列的渐近中心概念及判定准则；要对凸函数的次微分性质做粗略的归纳总结.

§1　上极限和下极限

1.1　数列的上极限和下极限

我们知道，任意一个给定的实数列 $\{a_n\}$（不管它是否有界）不一定有极限. 但我们可以用这个数列造出两个单调数列：

$$\beta_k = \sup_{n \geqslant k}\{a_n\} = \sup\{a_k, a_{k+1}, \cdots\}, k = 1,2,\cdots. \tag{1}$$

$$\alpha_k = \inf_{n \geqslant k}\{a_n\} = \inf\{a_k, a_{k+1}, \cdots\}, k = 1,2,\cdots. \tag{2}$$

其中数列$\{\beta_k\}$单调下降,数列$\{\alpha_k\}$单调上升.

若$\{a_n\}$有下(或上)界,则$\{\beta_k\}$(或$\{\alpha_k\}$)也有下(或上)界,从而$\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k$(或$\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k$)存在.

当$\{a_n\}$无上(或下)界时,$\{\beta_k\}$(或$\{\alpha_k\}$)恒为$+\infty$(或$-\infty$),我们仍然认为$\{\beta_k\}$(或$\{\alpha_k\}$)的极限存在.

当$\{a_n\}$无下(或上)界时$\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k$(或$\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k$)不一定存在,但当$a_n \to -\infty (n\to+\infty)$(或$a_n\to+\infty(n\to+\infty)$)时,

$$\beta_k \to -\infty(k\to\infty)(\text{或 } \alpha_k \to +\infty(k\to\infty)).$$

综上所述,我们有:

$$\lim_{k\to\infty}\beta_k = \begin{cases} \text{有限常数} & \text{当}\{a_n\}\text{有下界} \\ +\infty & \text{当}\{a_n\}\text{无上界} \\ -\infty & \text{当 } a_n \to -\infty(n\to\infty) \end{cases}$$

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k = \begin{cases} \text{有限常数} & \text{当}\{a_n\}\text{有上界} \\ -\infty & \text{当}\{a_n\}\text{无下界} \\ +\infty & \text{当 } a_n \to +\infty(n\to\infty) \end{cases}$$

定义 1 我们称由上面这两个式子确定的$\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k$和$\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k$为$\{a_n\}$的上极限和下极限.分别记为:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \text{ 或} \limsup_{n\to\infty} a_n \text{ 或} \inf_{n\geqslant 1}\sup_{k\geqslant n} a_k$$

和

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \text{ 或} \liminf_{n\to\infty} a_n \text{ 或} \sup_{n\geqslant 1}\inf_{k\geqslant n} a_k.$$

注:(1) 我们只对$\{a_n\}$是实数列的情况定义上、下极限;

(2) 每个有界实数列都有有限的上、下极限;

(3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \geqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.

由数列$\{\beta_n\}$和$\{\alpha_n\}$的构造法,我们容易证明下列两条结论:

(1)$\alpha_n \leqslant a_n \leqslant \beta_n, n = 1,2,\cdots$;

(2) $\forall n > 0$，$\exists p_n, q_n$ 使 $a_{n+p_n} \leqslant \alpha_n + \dfrac{1}{n}, a_{n+q_n} \geqslant \beta_n - \dfrac{1}{n}$.

因此，$\{a_n\}$有两个特殊子列$\{a_{n+p_n}\}$和$\{a_{n+q_n}\}$满足：

(3) $a_{n+p_n} - \dfrac{1}{n} \leqslant \alpha_n \leqslant a_n; a_n \leqslant \beta_n \leqslant a_{n+q_n} + \dfrac{1}{n}$.

定理 1　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在的充要条件是$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ 和$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ 都存在而且相等.

证明　充分性由(1) 推出. 必要性由(3) 推出. ▮

由(1) 和(2) 还得：

(4) $\alpha_{n+p_n} \leqslant a_{n+p_n} \leqslant \alpha_n + \dfrac{1}{n}; \beta_n - \dfrac{1}{n} \leqslant a_{n+q_n} \leqslant \beta_{n+q_n}$.

所以，当 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ 和 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ 存在时，它们分别是$\{a_{n+q_n}\}$和$\{a_{n+p_n}\}$的极限，即$\{a_n\}$一定有两个子列收敛于它的上、下极限.

定理 2　设$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = L$(或$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = l$)，则 L(或 l) 是$\{a_n\}$的所有收敛子列的极限中的最大(或小) 值. ▮

证明　根据上面的讨论，只要证明，对于$\{a_n\}$的任意收敛子列$\{a_{n_k}\}$有 $l \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \leqslant L$ 就行了. 事实上，由(1) 可得：

$$\alpha_{n_k} \leqslant a_{n_k} \leqslant \beta_{n_k}.$$

令 $k \to \infty$ 取极限即得所要证的结论. ▮

直接应用上、下极限的构造过程和定理 2，我们还可以证明上、下极限的其他结论：

(5) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-a_n) = -\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$，

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-a_n) = -\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$；

(6) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n + b_n) \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$，

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n + b_n) \geqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$；

(7) 当 $a_n \geqslant 0, b_n \geqslant 0$ 时，

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n \cdot b_n) \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$，

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n b_n \geqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n \varliminf_{n\to\infty} b_n;$$

(8) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在时，

$$\varlimsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \varlimsup_{n\to\infty} b_n \text{（其中} \lim_{n\to\infty} a_n > 0\text{）};$$

(9) 设 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的子列，则

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} a_{n_k} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n;$$

(10) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n - \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$.

1.2 函数的上极限和下极限

设函数 $f(x)$ 在度量空间 X 的一个子集 D 上有定义，它的值域是 $[-\infty, +\infty]$ 的子集，$x_0 \in X$. 我们称 $f(x)$ 在 x_0 附近有界，如果存在一个常数 $M_{x_0} > 0$ 和 x_0 的一个邻域 $B(x_0, \delta)$ 使

$$\text{当 } x \in (B(x_0, \delta) \cap D) \setminus \{x_0\} \text{ 时 } |f(x)| \leqslant M_{x_0}.$$

现在我们仿照数列的上（下）极限构造方法，定义函数 $f(x)$ 在 x_0 的上（下）极限：

定义 2　给定 $x_0 \in X$，$\forall \delta > 0$，令

$$f_1^{x_0}(\delta) = \sup_{x \in (B(x_0, \delta) \cap D) \setminus \{x_0\}} f(x),$$

$$f_2^{x_0}(\delta) = \inf_{x \in (B(x_0, \delta) \cap D) \setminus \{x_0\}} f(x).$$

如果 $\lim\limits_{\delta\to 0^+} f_1^{x_0}(\delta)$（$\lim\limits_{\delta\to 0^+} f_2^{x_0}(\delta)$）存在（可以是为无穷大量），就称此极限值为 $f(x)$ 在 x_0 的上（下）极限，记作

$$\varlimsup_{x\to x_0} f(x) \text{ 或 } \limsup_{x\to x_0} f(x) \left(\varliminf_{x\to x_0} f(x) \text{ 或 } \liminf_{x\to x_0} f(x) \right).$$

由本定义直接得出下面的

定理 3　设 $\varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x) = L$（$\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x) = l$），则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使当 $x \in (B(x_0, \delta) \cap D) \setminus \{x_0\}$ 时，

$$f(x) \leqslant L + \varepsilon \left(l - \varepsilon \leqslant f(x) \right). \quad \blacksquare$$

显然，本定理的逆定理不成立. 下面的定理是本定理的推论.

定理 4 设 $f(x)$ 在 x_0 附近有界，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是 $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)$ 和 $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)$ 同时存在而且相等. ▮

1.3 上、下半连续函数

设 $X, D, f(x)$ 的意义与前面相同，$x_0 \in D$.

定义 3 我们称 $f(x)$ 在 x_0 是上（下）半连续的，如果

$$f(x_0) \geqslant \overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \limsup_{x\to x_0} f(x)$$

$$\left(f(x_0) \leqslant \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \liminf_{x\to x_0} f(x)\right).$$

如果 $f(x)$ 在它的定义域内的每一点都上（下）半连续，就称它是上（下）连续函数.

由本定义直接得下面的

定理 5 $f(x)$ 在 x_0 上（下）半连续的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$ 使当 $x \in B(x_0, \delta) \cap D$ 时有

$$f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon \left(f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(x)\right). \quad ▮$$

本定理也可以作为 $f(x)$ 在 x_0 上（下）半连续的定义.

下面的定理是本定理的直接推论.

定理 6 $f(x)$ 在 x_0 连续的充要条件是它在 x_0 既上半连续又下半连续. ▮

定理 7 设 $f(x)$ 定义在 X 上，则它上半连续的充要条件是：

$$A = \{x \in X \mid f(x) < a\} \text{ 是开集}, \forall a \in \mathbb{R};$$

下半连续的充要条件是：

$$A_1 = \{x \in X \mid f(x) > a\} \text{ 是开集}, \forall a \in \mathbb{R}.$$

证明 只证上半连续的情况：

必要性：$\forall x_0 \in A$，则 $f(x_0) < a$，对于满足 $0 < \varepsilon < a - f(x_0)$ 的正数 ε，由 $f(x)$ 的上半连续性，存在 $\delta > 0$ 使当 $x \in$

$B(x_0,\delta)$时

$$f(x)\leqslant f(x_0)+\varepsilon<a\Rightarrow B(x_0,\delta)\subset A\Rightarrow A\text{ 是开集}.$$

充分性：$\forall x_0\in X$，若$f(x_0)=+\infty$，则由定理5知$f(x)$在x_0上半连续；若$f(x_0)<+\infty$，则 $\forall\varepsilon>0$ 有 $f(x_0)+\varepsilon\in\mathbb{R}$，所以 $A_0\triangleq\{x\in X\mid f(x)<f(x_0)+\varepsilon\}$是开集，且$x_0\in A_0$，于是，存在$\delta>0$ 使 $B(x_0,\delta)\subset A_0$. 这就是说，当 $x\in B(x_0,\delta)$时

$$f(x)\leqslant f(x_0)+\varepsilon,\text{故 } f(x)\text{ 在 } x_0\text{ 上半连续}. \quad \blacksquare$$

推论 $f(x)$上半连续的充要条件是：

$$\{x\in X\mid f(x)\geqslant a\}\text{是闭集},\forall a\in\mathbb{R};$$

下半连续的充要条件是：

$$\{x\in X\mid f(x)\leqslant a\}\text{是闭集},\forall a\in\mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

§2 弱收敛和*弱收敛

设X是赋范线性空间，X^*是它的对偶空间. 我们知道X中的有界序列$\{x_n\}$不一定有收敛子列，但对任一$f\in X^*$，$\{f(x_n)\}$就成为一个有界数列，从而有收敛子列. 为扩大后续理论的适用范围，我们有必要引入新的收敛概念.

定义1 设$\{x_n\}$是赋范线性空间X中的一个点列，$x\in X$，如果 $\forall f\in X^*$ 有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x),$$

就称$\{x_n\}$弱收敛于x，而称x是它的弱极限.

为了区别起见，我们称X中的点列依范数收敛为强收敛，并称它的极限为强极限. 显然，强收敛必弱收敛，并且强极限也是弱极限. 但弱收敛不一定强收敛.

例1 在$X=L^2[0,1]$中，点列$x_n=\sin\pi nt$对一切$f\in X^*$有

$$f(x_n)=\int_0^1 f(t)\sin n\pi t\mathrm{d}t \to 0 = f(0)\ (n\to\infty),$$

所以$\{x_n\}$弱收敛于零. 但由

$$\|x_{n+1}-x_n\|^2=\int_0^1(\sin(n+1)\pi t-\sin n\pi t)^2\mathrm{d}t=1$$

知$\{x_n\}$并不强收敛.

定理 1 在有限维赋范线性空间 X 中,弱收敛 $\Leftrightarrow$ 强收敛.

证明 设$\dim X=m$,$e_1,e_2,\cdots,e_m$是它的一组基,其对偶基为$f_1,f_2,\cdots,f_m$;X 中的点列$\{x_n\}$弱收敛于x,令

$$x_n=a_1^{(n)}e_1+a_2^{(n)}e_2+\cdots+a_m^{(n)}e_m,n=1,2,\cdots,$$

$$x=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_me_m.$$

则由 $f_i(e_j)=\delta_{ij}$ 和$\lim\limits_{n\to\infty}f_i(x_n)=f_i(x)$,$i=1,2,\cdots,m$ 得

$$\lim_{n\to\infty}a_i^{(n)}=a_i,i=1,2,\cdots,m.$$

再由

$$\|x_n-x\|\leqslant\|e_1\|\,|a_1^{(n)}-a_1|+\|e_2\|\,|a_2^{(n)}-a_2|+\cdots+\|e_m\|\,|a_m^{(n)}-a_m|$$

就知道$\{x_n\}$强收敛于x. ▮

所以,我们在处理有限维空间中的收敛问题时,只有强收敛一种情况. 这就是很多读者容易忽视弱收敛理论的原因.

定理 2 弱极限是唯一的.

证明 设x和y都是$\{x_n\}$的弱极限,则 $\forall f\in X^*$ 有

$$f(x-y)=f(x)-f(y)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)-\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0.$$

由 Hahn-Banach 定理推出 $x-y=0$ 即 $x=y$. ▮

定义 2 我们说 X^* 中的点列$\{f_n\}$ *弱收敛于 $f\in X^*$,如果$\forall x\in X$有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x).$$

*弱收敛相当于数学分析中函数列的点态收敛,不过这里的函数列中每个函数都是线性连续泛函. 当 X 是自反空间时,*弱收敛

就是 X^* 上的弱收敛. X^* 中的强收敛指的是 $\{f_n\}$ 按范数

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} f(x)$$

收敛. 由 $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\| \|x\| (\forall x \in X)$ 知,强收敛一定 * 弱收敛. 读者不难在自反空间中举出一个 * 弱收敛但不强收敛的例子.

请读者查阅一下拓扑空间中有关列紧、自列紧、相对紧和紧的概念. 我们指出,在度量空间中,列紧 $\Leftrightarrow$ 相对紧;自列紧 $\Leftrightarrow$ 紧.

定义 3 我们称 X(或 X^*)的一个子集 A(或 A^*)是弱(或 *弱)紧的,如果 A 的任一个点列都有弱(或 *弱)收敛子列收敛于 A(或 A^*)中的点.

定义 4 我们称 $A \subset X$(或 $A^* \subset X^*$)弱(或 *弱)有界,如果 $\forall f \in X^*$(或 $\forall x \in X$),$\{f(x) \mid x \in A\}$(或 $\{f(x) \mid f \in A^*\}$)是有界集.

定义 5 在 A(或 A^*)中添进 A(或 A^*)的所有弱(或 *弱)极限点后所得到的集称为 A(或 A^*)的弱(或 *弱)闭包.

定义 6 我们称 A(或 A^*)是弱(或 *弱)相对紧的,如果它的弱(或 *弱)闭包是紧的.

§3 单位连续分解

定义 1 设 $\{\Omega_i\}_{i\in I}$、$\{\omega_j\}_{j\in J}$ 是拓扑空间 X 的两个给定的开覆盖,我们称 $\{\omega_j\}_{j\in J}$ 是对 $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ 作加细的开覆盖,如果从 $\{\omega_j\}_{j\in J}$ 中任取一个开集,都可以从 $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ 中找出一个开集将它包含.

定义 2 拓扑空间 X 的一个开覆盖 $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ 称为是局部有限的,如果 X 的每个点都有一个邻域只与 $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ 中的有限个开集相交.