邓孝友 编

高等学校试用教材 · 工程数学 ·

积分变换及其应用

中南工业大学出版社

内 容 简 介

本书内容包括付里叶变换和拉普拉斯变换及其应用，是按照教育部1980年颁发《工程数学教学大纲（草案）》（四年制试用，“积分变换”部分）的要求而编写的。书中各章附适量习题，并附习题答案。本书特点是讲解比较详细，浅近易懂，附适量应用例题。

高等学校试用教材
工 程 数 学
积分变换及其应用
邓孝友 编
责任编辑：田荣璋 谢曹琳
*
中南工业大学出版社出版发行
长沙市东方印刷厂印装
湖南省新华书店经销
*
开本：850×1168 1/32 印张：3 字数：70千字
1988年1月第1版 1988年1月第1次印刷
印数：0001－3000册
*
ISBN 7-81020-121-2/O·019
定价：0.60元

前　　言

一、本书是编者按照教育部1980年颁发的高等工业学校《工程数学教学大纲(草案)》(四年制试用)“积分变换”部分的要求编写的。先在我校物理探矿、工业企业自动化、金属物理与计算机等专业使用。根据试用中的经验和本校及外校同志的意见不断修改补充而形成此书。此书内容不仅介绍了付里叶变换与拉普拉斯变换，而且还将它应用于求解微分方程，特别是偏微分方程。

根据各专业的不同要求可选用全书内容或某部分内容。全书(除打*号内容外)的教学时数大约为16学时；如果不求解偏微分方程，其教学时数为12学时；如果只需要拉普拉斯变换及其应用，教学时数为6—8学时。

二、本书适用于工科物理探矿、金属物理、应用物理、工业企业自动化、计算机、机械等专业，也可供综合性大学、高等师范院校物理专业使用，也可供有关科技工作者参考。

三、本书由中南工业大学蔡海涛教授审阅，提出了宝贵的意见。华南工学院王康廷教授对原稿也提出了宝贵的意见。还有本校及兄弟院校的同仁也提出了一些有益的意见，编者在此表示衷心感谢。

由于编者的水平有限，因此本书会存在不少缺点和错误，诚心希望同志们批评指正。

编　者

1987年10月

目　　录

第一章　付里叶变换及其应用

通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的变换，称为积分变换，它是应用日益广泛的一种运算工具。在积分变换中主要讨论付里叶(Fourier)变换和拉普拉斯(Laplace)变换。

§1.1　付里叶积分

在付里叶级数中曾将周期函数分解为一系列谐函数（正弦和余弦函数），在物理上，这表示可以把周期性的机械振动分解为一系列谐振动，把周期性的交变电压或电流分解为一系列谐变电压或电流等。

我们进一步问非周期性的机械振动是否也能分解为谐振动？非周期性的交变电压或电流是否也能分解为谐变电压或电流呢？从数学上来说，非周期函数是否也能分解为谐函数？

我们从函数 $f(t)$ 在区间$(-L,\ L)$上的付里叶级数展开式出发，讨论当 $L\to+\infty$时它的极限形式，得出非周期函数$f(t)$的付里叶积分展开式。

设函数 $f(t)$ 在 $(-L,\ L)$ 上满足狄利克莱(Dirichlet)条件：即$f(t)$在$(-L,\ L)$上，1° 连续或只有有限个第一类间断点；2° 只有有限个极值点，则在 $(-L,\ L)$ 上 $f(t)$ 可展成付里叶级数，且在连续点处，级数和为

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}t+b_n\sin\frac{n\pi}{L}t\right)\quad(1.1)$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{n\pi}{L}t\,dt\quad(n=0,1,2,\cdots)\quad(1.2)$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\ \sin\frac{n\pi}{L}t\,dt \qquad (n=1,2,\cdots) \quad (1.3)$$

将(1.2)中a_n与(1.3)中b_n代入(1.1)可得

$$f(t)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(\tau)d\tau+\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(\tau)\ \cos\frac{n\pi}{L}(t-\tau)dt \quad (1.4)$$

对于周期为T的连续函数$f(t)$来说，不论t为何值，都可由付里叶级数(1.1)或(1.4)表示，只要选取$L=\frac{T}{2}$。但对非周期函数$f(t)$来说，不论L选得多么大，级数(1.1)或(1.4)只能表示$(-L, L)$内的所有的t所对应的函数值$f(t)$，而不能表示在$(-L, L)$外的t所对应的函数值。

为了表示非周期函数$f(t)$在所有t上的值，很自然地考虑$L\to+\infty$时(1.4)的极限形式。

假设$f(t)$在区间$(-\infty,+\infty)$上绝对可积，即$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<+\infty$，

由于
$$\left|\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt\right|\le\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|f(t)|dt$$
$$\le\frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt\to 0\ ,$$

故当$L\to+\infty$时，只须考虑(1.4)中剩下的级数项的极限形式.注意级数(1.1)中每一谐振动

$$a_n\cos\frac{n\pi}{L}t+b_n\sin\frac{n\pi}{L}t$$

的频率$\omega_n=\frac{n\pi}{L}$，即

$$\omega_1=\frac{\pi}{L}, \quad \omega_2=\frac{2\pi}{L}, \quad \cdots, \quad \omega_n=\frac{n\pi}{L}, \quad \cdots$$

频率 ω 的增量

$$\Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}=\frac{\pi}{L} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

为确定的常数，即 $\frac{1}{L}=\frac{1}{\pi}\Delta\omega_n$。于是

$$\frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(\tau)\cos\frac{n\pi}{L}(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-L}^{L} f(\tau)\cos\omega_n(t-\tau)d\tau\right]\Delta\omega_n$$

其中的和式好像是以 ω 为自变量的函数

$$\Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau$$

在区间(0，$+\infty$)上的"积分和" $\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(\omega_n)\Delta\omega_n$，取 $L\to+\infty$ 时

$\Delta\omega_n=\frac{\pi}{L}\to 0$，上述积分和变成 $\Phi(\omega)$ 关于 ω 在 $(0, +\infty)$ 内的积分

$$\int_0^{+\infty}\Phi(\omega)d\omega=\int_0^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau$$

于是，由(1.4)导出了当 $L\to+\infty$ 时在无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上非周期函数分解为谐函数的表达式

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau \tag{1.5}$$

这个积分表达式称为函数 $f(t)$ 的付里叶积分公式(简称付氏积分公式)。注意上面的推导只是由(1.4)的右端从形式上导出的，是不严格的。严格的证明可参看 Г.М.Фихтенгольц著《微积分

学教程》第三卷第三分册。函数的付氏积分公式有下面的定理。

付氏积分定理：若函数 $f(t)$ 在任何有限区间上满足狄利克莱条件，并且在区间$(-\infty,+\infty)$上绝对可积，则在$f(t)$的连续点处

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau$$

而在$f(t)$的间断点t处，上式右端等于 $\frac{1}{2}\left[f(t+0)+f(t-0)\right]$

利用三角公式，付氏积分公式(1.5)变为与付氏级数相对应的形式

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[A(\omega)\cos\omega t+B(\omega)\sin\omega t]\,d\omega \tag{1.6}$$

其中 $A(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau,\qquad B(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau$

(1.7)

(1.6)表示在区间$(-\infty,\ +\infty)$上非周期函数依简谐振动的展开式，其中振动频率ω由零连续改变到$+\infty$，而(1.7)给出了振幅分布。$|G(\omega)|$的规律和初位相$\varphi(\omega)$对频率ω的依赖关系：

$$|G(\omega)|=\sqrt{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\right)^2+\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\right)^2}$$

$$\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt}$$

设在区间$(-\infty,\ +\infty)$上$f(t)$为偶函数，则$f(t)\sin\omega t$是t的奇函数，$f(t)\cos\omega t$是t的偶函数。于是

$$A(\omega)=2\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau,\qquad B(\omega)=0$$

(1.6)变为 $f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}A(\omega)\cos\omega t d\omega$(在$f(t)$的连续点处)

即 $$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\omega t d\omega\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau \qquad (1.8)$$

同理，设在区间$(-\infty,\ +\infty)$上$f(t)$为奇函数；则

$$A(\omega)=0,\ B(\omega)=2\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau$$

(1.6)变为 $f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}B(\omega)\sin\omega t d\omega$(在$f(t)$的连续点处)

即 $$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\omega t d\omega\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau \qquad (1.9)$$

设$f(t)$只是定义在半区间$(0,\ +\infty)$上的连续函数，我们可把它延续到区间$(-\infty,\ 0)$上或者成为偶函数，或者成为奇函数，于是在区间$(0,\ +\infty)$上定义的函数$f(t)$，便得到两个付氏积分展开式。依次为：

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\omega t d\omega\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau\quad(t\geq 0)\qquad(1.10)$$

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\omega t d\omega\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\quad(t>0)\qquad(1.11)$$

(1.10)称为函数$f(t)$在区间$(0,+\infty)$上的付氏余弦积分展开式。注意(1.10)在$t=0$时成立。因为$f(t)$作为偶函数延续之后，在$t=0$必然连续。(1.10)称为函数$f(t)$在区间$(0,\ +\infty)$上的付里叶正弦积分展开式，而在$t=0$时不一定成立。

例1 将函数$f(t)=\begin{cases}1, & |t|<L\\ 0, & |t|\geq L\end{cases}$展开成付里叶积分$(L>0)$。

解　$f(t)$ 为偶函数

$$A(\omega)=\int_{-L}^{L}\cos\omega\tau d\tau=\frac{2\sin\omega L}{\omega},\qquad B(\omega)=0$$

应用(1.8)得

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}A(\omega)\cos\omega t d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t\sin\omega L}{\omega}d\omega\qquad(|t|\neq L)$$

当 $t=\pm L$ 时，积分收敛于$\frac{1}{2}$，它不等于 $f(\pm L)$。

于是得到一个新的广义积分

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t\sin\omega L}{\omega}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |t|<L;\\ 0, & |t|>L;\\ \frac{\pi}{4}, & |t|=L_{\circ}\end{cases}$$

此积分是由付氏积分而得，如果直接计算是困难的。

§1.2　付里叶变换的概念

1．付氏积分公式的复数形式

由付氏积分定理知，若函数 $f(t)$满足它的条件，则在$f(t)$的连续点处，有下列等式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\qquad(2.1)$$

因为含参变量的积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau$是$\omega$的偶函数，所以

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{+\infty} d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau$$

又因为
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$$
是ω的奇函数，可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau=0$$

上式乘以虚数i与(2.1)式右端的积分相加，再应用欧拉公式得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}d\tau$$

即
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \qquad (2.2)$$

这是付氏积分的复数形式。

2．付里叶变换的定义

在(2.2)式中令

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \qquad (2.3)$$

则
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (2.4)$$

注：(2.3)和(2.4)中的广义积分是柯西(*Cauchy*)意义下的主值，

即
$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)dt=\lim_{n\to+\infty}\int_{-n}^{n} X(t)dt \quad （存在）$$

由(2.3)可看出，已知函数$f(t)$，通过指定的积分运算，变换为另一个ω的函数，这个函数记为$G(\omega)$，这种变换叫做$f(t)$的付里叶变换(简称付氏变换)，记为$\mathscr{F}[f(t)]=G(\omega)$

函数$G(\omega)$称为函数$f(t)$的像函数，(2.3)称为$f(t)$的付里叶变换式，而(2.4)称为$G(\omega)$的付氏逆变换式，记为

$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[G(\omega)]$，$f(t)$叫做$G(\omega)$的像原函数。

(2.3)右端的积分运算，叫做取$f(t)$的付氏变换，同样，(2.4)右端的积分运算，叫做取$G(\omega)$的付氏逆变换。(2.3)和(2.4)互为因果，有其一必有另一，可以说像函数和像原函数构成了一个付氏变换对。

由付里叶积分定理，若$f(t)$是连续函数，且在$(-\infty,+\infty)$内绝对可积，则有$\mathscr{F}^{-1}[\mathscr{F}[f(t)]]=f(t)$，也有

$$\mathscr{F}[\mathscr{F}^{-1}[G(\omega)]]=G(\omega)$$

由于付氏变换是定义在付氏积分定理基础上的，因此，付氏积分定理的条件，也就是函数$f(t)$的付氏变换存在的一种充分条件。

例1 求函数$f(t)=\begin{cases} E, & |t|<L; \\ 0, & |t|\geq L, \end{cases}$ 的付氏变换，且画出$L=3$时$|G(\omega)|$的图形。

解 由(2.3)知

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=\int_{-L}^{L} E\,e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=2E\int_0^L \cos\omega\tau d\tau=\begin{cases} \dfrac{2E\sin\omega L}{\omega}, & \omega\neq 0 \\ 2EL, & \omega=0 \end{cases}$$

取$L=3$，对应的$f(t)$及$|G(\omega)|$的图形如图(1.1)和(1.2)所示：

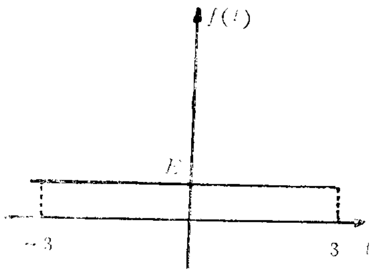

图 1·1

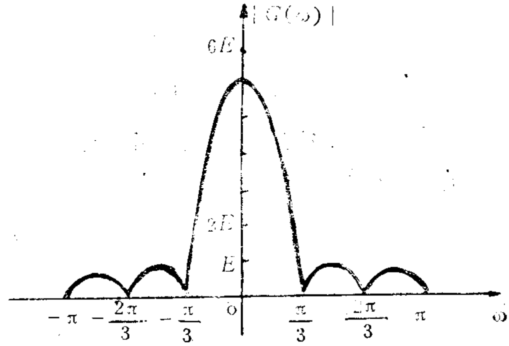

图 1·2

在图(1.2)中$\omega\geqq0$部分描述了振幅与频率的关系，由图形可清楚地看出非周期函数包含了哪些频率分量及各分量所占的比重，这种图形在工程技术中有着广泛的应用，特将这种图形称为振幅频谱图。图(1.3)描述了振幅与频率的关系，在频谱分析中，付里叶变换$G(\omega)$又称为$f(t)$的频谱函数，而频谱函数的模$|G(\omega)|$称为$f(t)$的振幅频谱(也简称频谱)，频率ω由0连续变到$+\infty$。由于$|G(\omega)|$是ω的偶函数，故有$|G(\omega)|=|G(-\omega)|$。事实上

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt-i\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt$$

于是$|G(\omega)|=\sqrt{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt\right)^2+\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt\right)^2}$

此式表示$f(t)$的付里叶变换$G(\omega)$的模是非周期函数依简谐振动的展开式的振幅。显然有$|G(\omega)|=|G(-\omega)|$

例 2　求指数衰减函数

$$f(t)=\begin{cases} e^{-\beta t}, & t\geqq 0; \\ 0, & t<0, \end{cases}$$

(其中$\beta>0$)的付氏变换和它的付氏积分表达式，且画出它的频谱图。

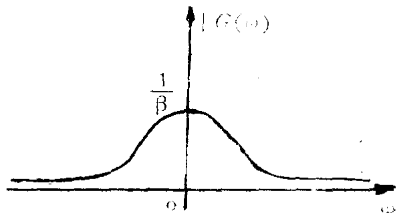

图　1.3

解　付氏变换为

$$G(\omega)=\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}e^{-i\omega t}dt=\int_0^{+\infty} e^{-(\beta+i\omega)t}dt$$

$$=\frac{1}{\beta+i\omega}=\frac{\beta-i\omega}{\beta^2+\omega^2}$$

将 $G(\omega)$ 代入 (2.4) 得 $f(t)$ 的付氏积分表达式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-i\omega}{\beta^2+\omega^2}(\cos\omega t+i\sin\omega t)d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\beta^2+\omega^2}(\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t)d\omega \qquad (t\neq 0)$$

当$t=0$时，左端应为$\frac{1}{2}[f(+0)+f(-0)]=\frac{1}{2}$

由此顺便得到一个含参量广义积分的结果：

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\begin{cases}\pi e^{-\beta t}, & t>0\\ \frac{\pi}{2}, & t=0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

3．单位脉冲函数及其付氏变换

在物理中，除了研究连续分布的量外，还研究集中于一点或一瞬时的量，如冲力、脉冲电压、点电荷、质点的质量等。为了研究这种具有脉冲性质的物理现象，兹介绍单位脉冲函数如下：

设在原来电流为零的电路中，某一瞬时（设为 $t=0$）进入一单位电量的脉冲，此电路中的电荷函数 $q(t)$为

$$q(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0;\\ 1, & t=0.\end{cases}$$

我们来确定电路上的电流 $i(t)$，由于电流强度是电荷函数对时间的变化率，即

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t+\Delta t)-q(t)}{\Delta t},$$

所以，当 $t\neq 0$时，$i(t)=0$；当 $t=0$时

$$i(0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(0+\Delta t)-q(0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(-\frac{1}{\Delta t}\right)=\infty.$$

此表示在通常意义下的函数类中找不到一个函数能够用来表示上述电路的电流强度。为了表示这种电路上的电流强度，特引入狄拉克(Dirac) 函数，简记为 δ—函数。对于许多集中于一点或瞬时的量（如点电荷、点热源），集中于一点的质量以及脉冲等可用 δ—函数表示。

对于任何一个连续的函数$f(t)$，如果满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{\varepsilon}(t)f(t)dt, \tag{2.5}$$

$$\text{其中 } \delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0\leqslant t\leqslant\varepsilon;\\ 0, & t>\varepsilon,\end{cases}$$

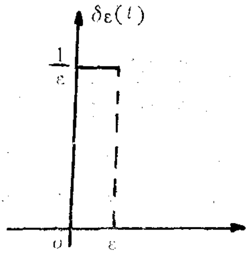

图 1.4

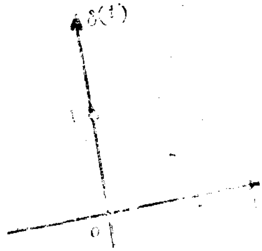

图 1.5

则称 $\delta_\varepsilon(t)$ 的极限*为 δ—函数，记为 $\delta(t)$，即

$$\delta_\varepsilon(t)\overset{\text{弱}}{\underset{\varepsilon\to0}{\Longrightarrow}}\delta(t)，\text{或简记为 }\lim_{\varepsilon\to0}\delta_\varepsilon(t)=\delta(t).$$

$\delta_\varepsilon(t)$ 的图形如图 1.4 所示，对任何 $\varepsilon>0$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(t)dt=\int_0^\varepsilon\frac{1}{\varepsilon}dt=1$$

所以
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

工程上，常将δ—函数称为单位脉冲函数。有些书上，将δ—函数用一个长度等于 1 的有向线段来表示，这个线段的长度表示δ—函数的积分，叫做δ—函数的强度。

由(2.5)给出δ—函数的定义，还可推出δ—函数定义的另一种形式：

* 严格说来应该是弱极限，对此定义，如有兴趣可参阅夏道行等编著《实变函数论与泛函分析》下册。