

新型结构设计与 3D3S 软件应用系列丛书

建筑索结构 设计计算与实例精选

张其林 编著



中国建筑工业出版社

新型结构与3D3S软件应用系列丛书

建筑索结构 设计计算与实例精选

张其林 编著

中国建筑工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

建筑索结构设计计算与实例精选/张其林编著. —北京:
中国建筑工业出版社, 2008
(新型结构设计与3D3S软件应用系列丛书)
ISBN 978-7-112-10397-3

I. 建… II. 张… III. ①悬索结构—结构设计: 计算机
辅助设计—应用软件②悬索结构—结构计算: 计算机辅助计
算—应用软件 IV. TU351-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 151793 号

本书在总结建筑索结构体系研究和设计工作的基础上, 全面系统介绍了建筑索结构的设计
计算理论和方法, 并运用典型工程实例讲述了 3D3S 软件在建筑索结构设计计算中应用。全书共
分 11 章, 分别是: 索结构的构成和力学性能, 索的计算模型, 计算分析中的基本定义, 结构体
系分类, 几何给定“索杆体系”的找形分析, 几何待定“索杆体系”的找形分析, “索梁体系”
的找形分析, 设计参数和验算指标, 风荷载和地震作用, 强度和稳定设计, 工程应用实例。

全书内容丰富, 指导性强, 可供工程结构设计人员、科研人员及高等院校师生学习参考。

* * *

责任编辑: 范业庶
责任设计: 董建平
责任校对: 安 东 王 爽

新型结构设计与 3D3S 软件应用系列丛书
建筑索结构设计计算与实例精选
张其林 编著

*

中国建筑工业出版社出版、发行 (北京西郊百万庄)
各地新华书店、建筑书店经销
北京永峥排版公司制版
世界知识印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 8¼ 字数: 210 千字
2009 年 1 月第一版 2009 年 1 月第一次印刷
印数: 1—3000 册 定价: 35.00 元

ISBN 978-7-112-10397-3

(17321)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题, 可寄本社退换

(邮政编码: 100037)

前 言

近十几年来,建筑索结构在我国得到了十分快速的应用和发展,包括张弦梁、索桁架、悬索屋架、斜拉结构、弦支穹顶、索网等各种结构体系在我国很多城市均已建成。在这一领域的发展过程中,工程实践远远领先于设计计算理论的研究,也极大地推动了我国设计计算理论的发展。近几年来,围绕建筑索结构已发表了许多研究论文和若干部专著,所有这些都充分展示了我国在这一领域的研究成果。然而,令人遗憾的是,迄今为止,我们已经建成的建筑索结构的体系均非我们原创,我们所使用的设计计算工具大都为境外通用有限单元软件,甚至我们所发表的大部分研究论文均是在介绍这些通用软件的应用方法和计算结果。所以,我国虽然已经成为建筑索结构的建造大国,但还远未成为强国。

作者于2002年编著出版了《索与膜结构》,其中关于建筑索结构的部分主要借鉴了国外资料以及作者的一些初步研究成果。近几年来,作者参与了前述各类典型建筑索结构体系的研究和设计工作,在实践中发展和完善了建筑索结构的设计计算理论,这些成果除了反映在已经实施的上海市工程建设规范《建筑结构用索应用技术规程》之外,也已内置于作者领导研制的钢与空间结构设计计算软件3D3S中。在理论研究和工程实践中,作者感觉到:通用有限单元软件具有强大的一般结构问题的计算与分析功能,但往往不能模拟建筑索结构的实际成形过程和工作机理,因而应用并不容易、有时会导致不合理的结果。所以,本书在介绍建筑索结构的设计计算理论和方法时,还针对实例讨论了通用有限单元软件应用的适用性和合理性,与3D3S专业软件的计算结果进行了比较分析。除了设计计算理论外,本书还着重澄清了设计验算中的相关重要概念。本书最后一章详细介绍了四个实际建筑索结构工程的设计过程和步骤,作者负责或参与完成了这些工程的结构设计和计算工作。

感谢3D3S软件编制组全体同事对本书的贡献,特别感谢王洪军博士、杨晖柱博士等为本书工程实例部分的工作所作的贡献,以及罗晓群博士、卢家森博士、宋杰博士、杨宗林工程师、王亚琴硕士、倪佳女硕士、杜娟硕士为本书所做的具体工作。

本书可供建筑设计、研究和工程单位的工程技术人员参考,可作为大专院校教师和学生的教学科研参考用书,也可作为3D3S用户学习和掌握建筑索结构设计计算的参考用书。

张其林

2008年11月

目 录

第一章	索的构成和力学性能	1
第一节	钢拉杆	1
第二节	钢索	2
第二章	索的计算模型	8
第一节	基本假定	8
第二节	只拉不压的两节点索单元	8
第三节	悬链线索单元	10
第三章	索结构计算中的基本定义	13
第一节	主动索和被动索	13
第二节	状态定义和分析类别	14
第三节	几何定义	15
第四节	位移定义	16
第五节	刚度特征	16
第六节	“索杆体系”和“索梁体系”	17
第四章	结构体系分类	21
第一节	概述	21
第二节	竖直平面体系	21
第三节	单层索网体系	23
第四节	空间体系	24
第五章	几何给定“索杆体系”的找形分析	27
第一节	概述	27
第二节	矩阵分析方法	27
第三节	最小预张力方差原则	30
第四节	计算实例	30
第六章	几何待定“索杆体系”的找形分析	37
第一节	概述	37
第二节	力密度法	37
第三节	计算实例	39
第七章	“索梁体系”的找形分析	45
第一节	概述	45
第二节	撤杆加力法——初始状态几何等于图纸几何	45
第三节	非线性直接分析法——零状态几何等于图纸几何	46

第四节	计算实例	47
第八章	设计参数和验算指标	56
第一节	概述	56
第二节	索的预张力分项系数	56
第三节	索的抗拉强度分项系数	56
第四节	索的容许相对变形和最小预张力	56
第五节	正常使用极限状态和承载能力极限状态	57
第九章	风荷载和地震作用	61
第一节	概述	61
第二节	风荷载	61
第三节	地震作用	65
第十章	强度和稳定	69
第一节	概述	69
第二节	强度设计	69
第三节	稳定设计	74
第十一章	工程实例	81
第一节	吉林省速滑馆	81
第二节	东海大桥桥头堡工程设计计算	98
第三节	安徽大学体育馆弦支穹顶钢屋盖	104
第四节	中国航海博物馆	114
参考文献	123

第一章 索的构成和力学性能

建筑索结构中的“索”可泛指只能受拉的钢拉杆和钢索。

第一节 钢 拉 杆

钢拉杆由杆身、锚头、调节套筒组成，如图 1-1 所示。其中，调节套筒的数量可根据拉杆长度和调节距离确定。

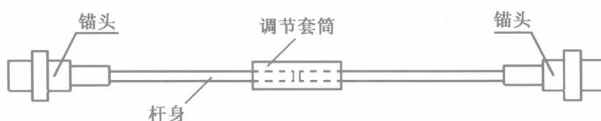


图 1-1 钢拉杆的组成

一、杆身

钢拉杆的杆身材料可为合金钢和不锈钢两个品种。不锈钢一般用于建筑幕墙结构中，其直径一般为 $\phi 12 \sim \phi 60$ 。合金钢钢拉杆的直径一般为 $\phi 20 \sim \phi 210$ ，其强度级别有 235 级、345 级、460 级、550 级和 650 级，对应的力学性能指标见表 1-1 所示^[1]。

钢拉杆的力学性能指标

表 1-1

强度等级	抗拉强度 (MPa)	下屈服强度 (MPa)	伸长率 (%)	断面收缩率 (%)	纵向冲击功 (J)				
					+20℃	0℃	-20℃	-40℃	-50℃
235	375	235	21	—	27	27	27	—	—
345	470	345	21	—	34	34	34	27	—
460	610	460	19	50	—	50	45	34	27
550	750	550	17	50	—	50	45	34	27
650	850	650	15	45	—	50	45	34	27

二、锚头

钢拉杆的锚头有叉耳式 (U 型)、单耳式 (O 型)、螺杆式 (I 型) 等，如图 1-2 所示。

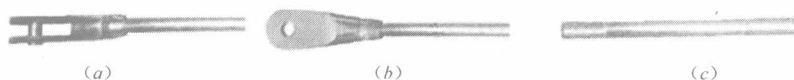


图 1-2 钢拉杆锚头

(a) U 型锚头；(b) O 型锚头；(c) I 型锚头

三、型号规格

钢拉杆的型号一般可表示为：LG-abD×L。其中，LG表示拉杆；a、b表示拉杆两端的锚头形式；D表示直径；L表示长度。例如，一直径150mm、长度6000mm、两端锚头均为U型的钢拉杆标记为：LG-UU150×6000。

四、设计参数

拉杆的防腐和防火处理可参考一般钢结构构件。拉杆的强度设计标准值按表1-1中下屈服强度取用，材料分项系数参考对应强度等级的钢材取用。

第二节 钢 索

钢索由索体、护层和锚具组成，如图1-3所示^{[2][3]}。

一、索体

索体分为钢丝束索体和钢丝绳索体两种。

钢丝束索体（spiral strand）由单股高强度钢丝或钢绞线按平行或半平行方式扭

绞而成。高强度钢丝的直径一般为5mm和7mm，其质量和性能应满足现行国家标准《桥梁缆索用热镀锌钢丝》GB/T 17101^[4]中的有关规定。钢绞线的质量和性能应满足现行国家标准《预应力混凝土用钢绞线》GB/T 5224^[5]或《镀锌钢绞线》YB/T 5004^[6]的规定。

图1-4为由高强度钢丝和钢绞线组成的钢丝束索体。

钢丝绳索体（wire rope）用高强度钢丝直径小于5mm，其质量和性能应满足现行国家标准《钢丝绳》GB8918^[7]中的有关规定。钢丝绳索体是由钢丝束形状的截面围绕绳芯扭绞而成，绳芯可采用纤维芯或钢芯。建筑结构中的钢丝绳索体，除膜结构中部分对拉索柔软性有要求的绳索可采用纤维钢丝绳外，其他应采用钢芯钢丝绳。设备、机械和船坞工程中经常采用由钢丝绳扭绞而成的多股钢丝绳，这类钢丝绳的绳体弹性模量较小，建筑工程中不宜采用。

图1-5为纤维芯钢丝绳和钢芯钢丝绳。

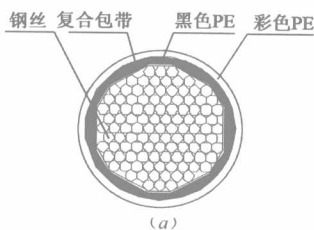


图1-4 钢丝束断面示意图

(a) 半平行钢丝束 ($d \times 109$)；

(b) 钢绞线钢丝束 ($d \times 7$)

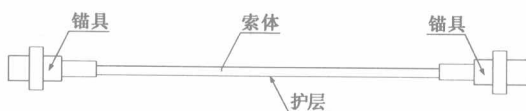


图1-3 索的组成

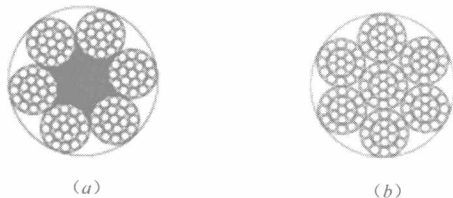


图1-5 钢丝绳断面示意图

(a) 纤维芯钢丝绳 (6×19)；

(b) 钢芯钢丝绳 (6×19)

二、护层

设置护层是为了满足索体的防腐要求。

索体的防腐有简单防护和多层防护两种。简单防护是指对高强钢丝和钢绞线镀锌、锌铝、防腐漆、环氧喷涂,或对光索体包裹防护套;多层防护是指对高强钢丝和钢绞线经防腐处理后再对索体包裹防护套或润滑材料加防护套。

室内非腐蚀环境中的索体可采用简单防护处理,其他情况的索体应采用多层防护处理,具体要求宜根据不同工程不同素材在设计中注明。防护材料在直接承受大气环境因素的作用下,应具有较好的抗老化性能。拉索护层不得接触任何对护层有损的化学介质。有护套的索体与锚具应有可靠的密封防水措施。索保护层破损后修补材料应与原保护层材料一致,且修补后的保护层结构性能均一。

索体护层材料宜选用高密度聚乙烯,其技术性能应满足现行行业标准《建筑缆索用高密度聚乙烯塑料》GJ/T 3078^[8]中有关规定。索体护层材料选用其他材料时,应进行专门试验研究。

三、锚具

按构造方式,锚具可分为冷铸锚、热铸锚、压接锚、夹片锚和墩头锚等。冷铸锚(Cast socket with epoxy and steel ball)的锚杯内采用冷铸带钢丸有机结合剂以固定索体。热铸锚(Alloy-filled cast socket)的锚杯内采用低熔点合金以填充固定索体。压接锚(Pressed ferrule)采用低合金、合金或其他高强钢材做成索套,在高压下与索体挤压成形固定。夹片锚(Clamping-yoke socket)采用由锚环或锚板和夹片组成的锚头固定索体的钢丝。墩头锚(Stamped-end socket)使索体中的钢丝穿过对应的锚板孔眼后进行墩头予以固定。

建筑结构中的索锚具一般采用压接锚、热铸锚或冷铸锚,如图1-6所示。

锚具有固定式和可调式两种。按连接方式锚具可分为销轴式连接(叉耳式和单耳式)和螺纹式连接(螺栓调整和套筒调整)。各类锚具如图1-7和图1-8所示。

压接锚锚具宜应用于直径不大于44mm的索体,索体直径超过规定数值时应进行试验验证。冷铸锚锚杯的坯件宜选用锻件,热铸锚锚杯的坯件可选用锻件或铸件。锻件材料应为优质碳素结构钢或合金结构钢,其技术性能应满足现行国家标准《优质碳素结构钢》GB/T 699^[9]、《合金结构钢》GB/T 3077^[10]中有关规定。铸件的技术性能应满足现行国家标准《一般工程用铸造碳钢件》GB/T 11352^[11]中有关规定。

销轴、螺杆的坯件应选用锻件,其材料宜选用优质碳素结构钢或合金结构钢,技术性能应满足现行国家标准《优质碳素结构钢》GB/T 699、《合金结构钢》GB/T 3077中有关

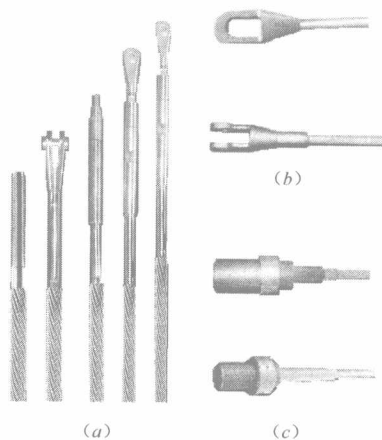


图1-6 索锚具
(a) 压制索锚具; (b) 热铸索锚具;
(c) 冷铸索锚具

规定。

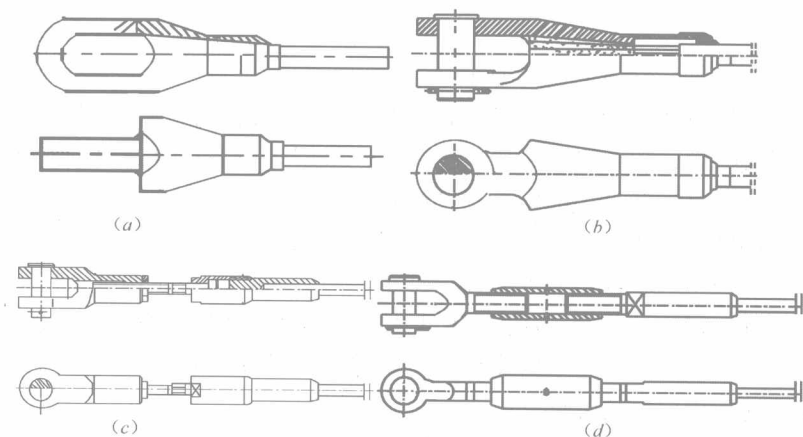


图 1-7 销轴式锚具示意图

- (a) 单耳固定式锚具；(b) 叉耳固定式锚具
(c) 叉耳螺栓调整式；(d) 叉耳套筒调整式

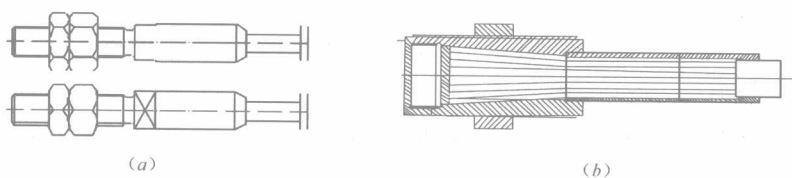


图 1-8 螺纹式锚具示意图

- (a) 单螺杆调整式；(b) 锚杯螺纹式

冷铸锚的铸体材料主要为环氧树脂和钢丸，铸体试件强度常温下不应小于 147MPa。热铸锚的铸体材料为锌铜合金，锌、铜原材料应符合国家标准《阴极铜》GB/T 467^[12]、《锌锭》GB 470^[13]的要求。

压接锚和墩头锚的锚具组件宜采用低合金结构钢或合金结构钢，其技术性能应满足现行国家标准《低合金高强度结构钢》GB1591^[14]或《合金结构钢》GB/T 3077 中有关规定。

锚具材料应满足现行国家标准《预应力筋用锚具、夹具和连接器》GB/T 14370^[15]，并按现行行业标准《预应力筋用锚具、夹具和连接器应用技术规程》JGJ 85^[16]中的有关规定执行。

锚具的强度应符合钢索破断后而锚具和连接件均不能破断的准则，必要时应通过试验来确定。

四、规格型号

钢丝束索体的型号一般表示为： $(\phi)d \times N$ ，其中 d 为高强度钢丝或钢绞线的直径， N 为索体中高强度钢丝或钢绞线的数量。建筑和桥梁结构中钢丝束的规格范围一般在 $(\phi)5 \times 7 \sim$

(ϕ)5×649;(ϕ)7×7~(ϕ)7×649。

钢丝绳索体的规格一般表示为： $N \times M$ ，其中 N 为绳中钢丝束的股数（不计绳芯）， M 为每股钢丝束中高强钢丝的数量。建筑和桥梁结构中钢丝绳的规格以 $6 \times M$ 居多。

五、力学性能^{[17][18]}

1. 应力—应变曲线和弹性模量

对于面积为 A 、长度为 L 的松弛的新索，在拉力 N 作用下伸长 ΔL ，如果定义应力 $\sigma = N/A$ ，应变 $\varepsilon = \Delta L/L$ ，则应力—应变关系如图 1-9 所示。

图 1-9 的应力—应变关系中的三个特征段是 $A-B$ 、 $B-C$ 、 $C-D$ 。在第一特征段 $A-B$ ，随着应力从 σ_0 到 σ_B 的不大的增加中，应变从 $\varepsilon_A = 0$ 迅速增加到 ε_B ，其中大部分是永久应变。在第二阶段 $B-C$ 内，应力应变变化相对均匀，这一阶段的 σ/ε 可近似认为是常数，永久应变 ε_p 变化不大。第三阶段 $C-D$ 是以永久应变的迅速增加为特征的，应力缓慢增加至索的破坏强度（与 D 点对应）。索的弹性模量被定义为 $B-C$ 曲线切线模量的平均值。

将松弛新索均匀张拉至选定的拉力 $N = N_1$ 后，再均匀卸载至 $N = 0$ ，这时索的残余永久变形是 ε_{p1} 。在以后 $2 \sim n$ 次加卸载后，每次残余永久变形为 ε_{p2} ， \dots ， ε_{pn} 。随着加卸载次数的增加， $\sigma-\varepsilon$ 曲线将趋于直线，如图 1-10 所示。

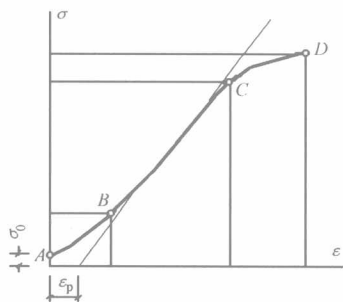


图 1-9 松弛新索的应力—应变关系

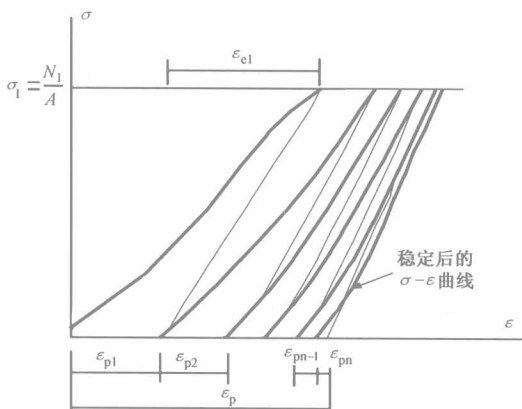


图 1-10 索的反复加卸载

索的残余永久应变 $\varepsilon_p = \sum_{i=1, n} \varepsilon_{pi}$ 。

如果一根索在反复加卸载若干次后已消除了大部分残余应变，再次加载并卸载后只有较小的残余应变，例如 $\varepsilon_p < 0.1 \text{ mm/m}$ ，这样的索可称为张紧索。张紧索在一定的加载范围内可视为线弹性的，其弹性模量一般比松弛新索高 20% ~ 30%。实验表明，一般松弛新索经 10 次循环加卸载后就可消除大部分残余应变。

如果一根索在反复加卸载若干次后只能消除部分残余应变，这样的索称为部分张紧索。

高强钢丝和钢绞线的弹性模量在 $1.9 \times 10^5 \text{ MPa}$ 的数量级上，在拉伸范围内一般可保持

常数。索体的弹性模量一般小于钢丝和钢绞线自身的弹性模量，降低幅度取决于索体的绞合方式。对于建筑结构中使用的张紧索，要求钢丝束索体的弹性模量不应小于 $1.9 \times 10^5 \text{MPa}$ ；钢丝绳索体的弹性模量：单股不应小于 $1.4 \times 10^5 \text{MPa}$ ，多股不应小于 $1.1 \times 10^5 \text{MPa}$ 。

2. 强度

如果定义索体中钢丝或钢绞线的比例极限、破坏极限分别为 σ_e 和 σ_u ，相应定义 $N_e = \sum_{i=1,n} \sigma_e a_i$ 和 $N_u = \sum_{i=1,n} \sigma_u a_i$ ，这里， a_i 为第 i 根线材的面积， n 为索中线材总数，那么，索体的实际抗拉极限荷载 N_l 满足 $N_e < N_l < N_u$ 。 N_l 较 N_u 的降低幅度取决于索体的绞合方式。

钢丝束公称破断力 [荷载] (Nominal breaking force [load]) 为高强钢丝的标准抗拉强度乘以钢丝束的公称截面面积，钢丝束拉索静载破断荷载不应小于索体公称破断荷载的 95%。钢丝绳公称破断力 [荷载] 有整绳破断力和钢丝绳内钢丝破断力总和两种测定方法，钢丝绳拉索的最小破断荷载不应低于相应规范规定的最小破断力。

拉索抗拉强度按下式设计或验算：

$$\frac{N_{\max}}{A} \leq f \quad (1-1)$$

式中 N_{\max} ——拉索的最大内力设计值；

A ——拉索截面面积；

f ——拉索强度设计值， $f = \frac{f_k}{\gamma_R}$ ；

f_k ——拉索的破断应力，为破断力 P 除以截面面积 A ；

γ_R ——拉索的抗力分项系数，取 $\gamma_R = 2.0$ 。

3. 蠕变

当索被用于工程结构后，未消除的残余应变将会因材料蠕变效应慢慢得到消除，但这将使索产生松弛。如果线材是以正常规范的方法绞合并具有合适的绞合长度，而索是施加过预应力的张紧索，并且索段的张拉和受力是直线无弯折的，设计中可以忽略索正常工作寿命内的蠕变效应。当索段连续但弯折布置时，可按预应力筋考虑其松弛效应。

4. 疲劳

所有类型的索都有其疲劳寿命，超过疲劳寿命后索内线材将会开始疲劳断裂。疲劳寿命取决于索内的应力幅值和工作条件。对于绕轴卷动的弯曲索，如吊车提升索等，疲劳是由拉伸应力和弯曲应力组合作用引起的。而工程结构中的索，主要承受拉应力，只有脉动风效应会使索中产生变幅度应力。迄今为止，对绕轴卷动弯曲索的疲劳研究较多，并有相应的疲劳曲线。但对工程结构用索的疲劳研究极少，只有德国做过这方面的试验研究。研究表明：为了确保索具有不少于 200 万次循环的疲劳寿命，索的工作应力应不超过 $200 \sim 250 \text{N/mm}^2$ 。为了满足这一要求，应在设计中注意避免索承受附加的变化弯曲应力。从这一角度出发，应该优先选用可自由转动的索端头，而不是具有一定转动刚度的端头。

当拉索需要进行疲劳试验时，加载次数为 2.0×10^6 次循环脉冲加载，钢丝束拉索加载应力上限为 $(0.4 \sim 0.45) \sigma_b$ ，对一级耐疲劳拉索，应力幅 200MPa；对二级耐疲劳拉索，应力幅 250MPa；钢丝绳拉索加载应力上限为 $0.65 \sigma_b$ ，应力幅 80MPa，钢丝破断数不应大

于索体中钢丝总数的5%，拉索护层不应有明显损伤，锚具无明显损坏，锚杯与螺母旋合正常。经疲劳试验后静载破断荷载不应小于索体公称破断荷载的95%，破断延伸率不应小于2%。

5. 弯曲

索弯曲过度会导致内圈线材应力松弛而外圈线材挤向内圈。索的最小弯曲直径与索的构造方式有关，但一般认为在运输中应取 $30D$ ，不能小于 $18D$ ；安装工作后应取大于 $30D$ 的值。这里， D 是索的直径。当索在弯曲状态受力时，应将弯曲产生的附加应力与索均匀拉应力叠加得到总的索应力。弯曲产生的附加应力可由下式计算：

$$\sigma = \frac{EdA}{D'} \quad (1-2)$$

式中， d 为外圈线材的直径； A 为索的面积； D' 为卷轴的直径。

索与卷轴之间的压力用下式计算：

$$P = \frac{2T}{Dd} \quad (1-3)$$

式中， T 为索拉力。

对于无防护套的索，式(1-3)所示挤压力一般小于钢与钢材料间的挤压承载能力。但对于配置防护套的索，一般防护套材料的容许挤压应力在 $1.0\text{N}/\text{mm}^2$ 范围内，这时必须验算防护套是否能承受式(1-3)所示的压力。

第二章 索的计算模型

第一节 基本假定

计算时对索的基本假定如下:

- (1) 索只能承受拉力, 不能承受压力和弯矩;
- (2) 索是线弹性材料。

对于较细较短的索, 索的自重对索自身及索结构的工作性能影响不大, 可采用两节点的只拉不压的线单元模拟索的工作, 将索的自重等效作用到两端节点处; 对于较粗或较长的索, 索的自重可能对索自身或结构的工作性能影响较大, 宜采用能够考虑索跨中自重的力学模型, 可以采用多个只拉不压的两节点索单元或采用悬链线单元。

第二节 只拉不压的两节点索单元

一、坐标定义和位移函数

空间铰接索单元的总坐标 $X_1 X_2 X_3$ 和局部坐标 ξ 定义如图 2-1 所示:

单元中任一点沿 X_i 位移可表示为:

$$u_i = \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) u_i^1 + \frac{\xi}{L} u_i^2 \quad (2-1)$$

式中, L 为单元长度; ξ 为局部坐标轴; u_i^k 为 k 节点沿 X_i 方向的位移。

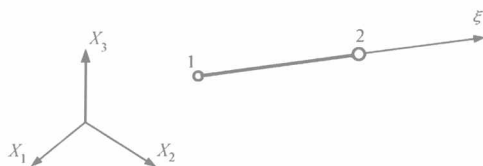


图 2-1 空间铰接索单元的坐标定义

二、基于 TL 坐标描述法的杆单元

基于 TL 坐标描述法推导得到的单元平衡方程为^[19]:

$$\left[[k_0] + [k_u] + [k_\sigma] \right]^{(n)} \{\Delta u\} = \{f\}^{(n+1)} - \{f_R\}^{(n)} \quad (2-2)$$

式中, $[k_0]$ 为线性刚度矩阵; $[k_u]$ 为位移非线性刚度矩阵; $[k_\sigma]$ 为应力非线性刚度矩阵; $\{\Delta u\}$ 为单元节点位移向量; $\{f\}^{(n+1)}$ 为所求 $\Omega^{(n+1)}$ 状态的外部效应所产生的节点力向量; $\{f_R\}^{(n)}$ 为 $\Omega^{(n)}$ 状态时内力效应产生的节点力向量。

$$[k_0] + [k_u] = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} (l+l_u)^2 & (l+l_u)(m+m_u) & (l+l_u)(n+n_u) & -(l+l_u)^2 & -(l+l_u)(m+m_u) & -(l+l_u)(n+n_u) \\ (l+l_u)(m+m_u) & (m+m_u)^2 & (m+m_u)(n+n_u) & -(l+l_u)(m+m_u) & -(m+m_u)^2 & -(m+m_u)(n+n_u) \\ (l+l_u)(n+n_u) & (m+m_u)(n+n_u) & (n+n_u)^2 & -(l+l_u)(n+n_u) & -(m+m_u)(n+n_u) & -(n+n_u)^2 \\ -(l+l_u)^2 & -(l+l_u)(m+m_u) & -(l+l_u)(n+n_u) & (l+l_u)^2 & (l+l_u)(m+m_u) & (l+l_u)(n+n_u) \\ -(l+l_u)(m+m_u) & -(m+m_u)^2 & -(m+m_u)(n+n_u) & (l+l_u)(m+m_u) & (m+m_u)^2 & (m+m_u)(n+n_u) \\ -(l+l_u)(n+n_u) & -(m+m_u)(n+n_u) & -(n+n_u)^2 & (l+l_u)(n+n_u) & (m+m_u)(n+n_u) & (n+n_u)^2 \end{pmatrix} \quad (2-3)$$

$$[k_\sigma] = \frac{\sigma A}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-4)$$

$$\{f_R\}^{(n)} = \sigma A [-l, -m, -n, l, m, n]^T \quad (2-5)$$

$$\{f\}^{(n+1)} = [f_1^1, f_2^1, f_3^1, f_1^2, f_2^2, f_3^2]^T \quad (2-6)$$

$$\{\Delta u\} = [\Delta u_1^1, \Delta u_2^1, \Delta u_3^1, \Delta u_1^2, \Delta u_2^2, \Delta u_3^2]^T \quad (2-7)$$

式中, l 、 m 、 n 为杆轴的方向余弦; 记 $\Omega^{(n)}$ 状态位移为 $\{u\} = [u_1^1, u_2^1, u_3^1, u_1^2, u_2^2, u_3^2]^T$,

$$\begin{cases} l_u = (u_1^2 - u_1^1)/L \\ m_u = (u_2^2 - u_2^1)/L \\ n_u = (u_3^2 - u_3^1)/L \end{cases}$$

组装式 (2-2) 可得到结构体系的平衡方程。自 $\Omega^{(0)}$ 至 $\Omega^{(n+1)}$ 状态对结构体系平衡方程进行迭代求解时, 单元位移和应力可按式计算:

$$\{u\}^{(n+1)} = \{u\}^{(n)} + \{\Delta u\} \quad (2-8)$$

$$\sigma^{(n+1)} = \sigma^{(n)} + \Delta \sigma \quad (2-9)$$

$$\Delta \sigma = E \Delta \varepsilon = E \{T\}^T \left[[B_0] + [B_u] \right] \{\Delta u\} \quad (2-10)$$

$$\{T\} = [l^2, m^2, n^2, lm, ln, mn]^T \quad (2-11)$$

式中, $[B_0]$ 和 $[B_u]$ 分别为单元的线性和非线性几何矩阵。

式 (2-1) 至式 (2-11) 中涉及的几何 (L , l , m , n) 和截面特性 (A) 均按 $\Omega^{(0)}$ 状态计算。

三、基于 UL 坐标描述法的杆单元

基于 UL 坐标列式推导得到的单元平衡方程为^[20]:

$$\left[[k_x] + [k_\sigma] \right]^{(n)} \{\Delta u\} = \{f\}^{(n+1)} - \{f_R\}^{(n)} \quad (2-12)$$

式中, $[k_x]$ 为线性刚度矩阵; $[k_\sigma]$ 为应力非线性刚度矩阵; $\{\Delta u\}$ 为单元节点位移向量; $\{f\}^{(n+1)}$ 为所求 $\Omega^{(n+1)}$ 状态的外部效应所产生的节点力矢量; $\{f_R\}^{(n)}$ 为 $\Omega^{(n)}$ 状态时内力效应产生的节点力矢量。

$$[k_x] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -ln \\ lm & m^2 & mn & -lm & -m^2 & -mn \\ ln & mn & n^2 & -ln & -mn & -n^2 \\ -l^2 & -lm & -ln & l^2 & lm & ln \\ -lm & -m^2 & -mn & lm & m^2 & mn \\ -ln & -mn & -n^2 & ln & mn & n^2 \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

$$[k_\sigma] = \frac{\sigma^c A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

$$\{f_R\}^{(n)} = \sigma^c A [-l, -m, -n, l, m, n]^T \quad (2-15)$$

组装式(2-12)可得到结构体系的平衡方程。求解结构体系平衡方程得到位移增量后,应修正结构体系的几何坐标,并计算单元应力,如下所示:

$$\{x\}^{(n+1)} = \{x\}^{(n)} + \{\Delta u\} \quad (2-16)$$

$$\sigma^{(n+1)} = \sigma^{C(n)} + \Delta\sigma \quad (2-17)$$

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon = E\{T\}^T [B_x] \{\Delta u\} \quad (2-18)$$

式(2-17)中,柯西应力 σ^c 与第二 Piola-Kirchhoff 应力 σ 之间的转换关系为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma^c &= \alpha\sigma \\ \alpha &= (1 + 2a_1l + 2a_2m + 2a_3n) / (1 + a_1l + a_2m + a_3n) \\ a_i &= (\Delta u_i^2 - \Delta u_i^1) / L \end{aligned} \right\} \quad (2-19)$$

对于小位移问题,式(2-19)中 $\alpha \approx 1$ 。但对大位移问题,近似取 $\alpha = 1$ 会导致一定的误差。

式(2-12)~式(2-19)中涉及的几何(L, l, m, n)和截面特性(A)均按 $\Omega^{(n)}$ 状态计算。

第三节 悬链索单元

一、坐标和符号定义

定义 L_0 和 L 分别为悬链线的原长和变形后长度, w 为悬链线单位长度重量, F_1, F_2, F_3, F_4 分别为悬链线两端节点 i, j 在局部坐标方向的节点力; T_i, T_j 分别为 i, j 节点的拉力,如图2-2所示。

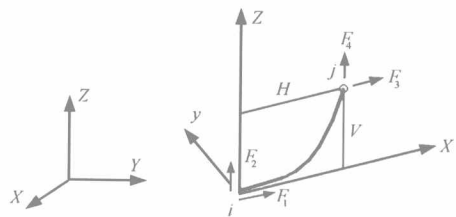


图 2-2 悬链线单元及其符号

二、基本方程

悬链线端节点的力存在如下关系^[21]：

$$\begin{cases} T_i = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \\ T_j = \sqrt{F_3^2 + F_4^2} \end{cases} \quad (2-20)$$

$$\begin{cases} F_3 = -F_1 \\ F_4 = -F_2 + wL_u \end{cases} \quad (2-21)$$

悬链线方程可表示为^[21]：

$$L^2 = V^2 + H^2 \frac{\sinh^2 \lambda}{\lambda^2} \quad (2-22)$$

$$\lambda = \frac{wH}{2|F_1|} \quad (2-23)$$

$$F_2 = \frac{w}{2} \left[-V \frac{\cosh \lambda}{\sinh \lambda} + L \right] \quad (2-24)$$

$$\left. \begin{aligned} H &= -F_1 \left[\frac{L_u}{EA} + \frac{1}{w} \ln \frac{F_4 + T_j}{T_i - F_2} \right] \\ V &= \frac{1}{2EAw} (T_j^2 - T_i^2) + \frac{T_j - T_i}{w} \end{aligned} \right\} \quad (2-25)$$

$$L = L_u + \frac{1}{2EAw} \left[F_4 T_j + F_2 T_i + F_1^2 \ln \frac{F_4 + T_j}{T_i - F_2} \right] \quad (2-26)$$

三、索段节点力的求解方法

初始状态给定索段原长（或初始内力）情况下，或在外荷载作用下索段变形到新的几何位置时，要求根据已知的原长 L_u 、单位长度重力 w 和几何 V 、 H 求解索段内力。这时，可按以下步骤求解：

- (1) 假定 F_1 ；
- (2) 按式 (2-23) 求 λ ，按式 (2-22) 求 L ，按式 (2-24) 求 F_2 ，按式 (2-20) 第一式求 T_i ；
- (3) 根据式 (2-21) 求 F_3 、 F_4 ，根据式 (2-20) 第二式解 T_j ；
- (4) 根据式 (2-26) 求与假定的 F_1 对应的索段原长 L_w ；
- (5) 检查 L_w 是否满足给定索段原长 L_u 的要求，不满足重新假定 F_1 转步骤 (2)，直至得到 L_w 与 L_u 足够接近时的索段内力 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 及 T_i 和 T_j 。

四、悬链索单元的刚度矩阵

注意到式 (2-25) 中的悬链线几何位置取决于 F_1 和 F_2 两个独立变量，可将式 (2-25) 写成如下增量形式：

$$\begin{Bmatrix} dH \\ dV \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial F_1} & \frac{\partial H}{\partial F_2} \\ \frac{\partial V}{\partial F_1} & \frac{\partial V}{\partial F_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \end{Bmatrix} \quad (2-27)$$