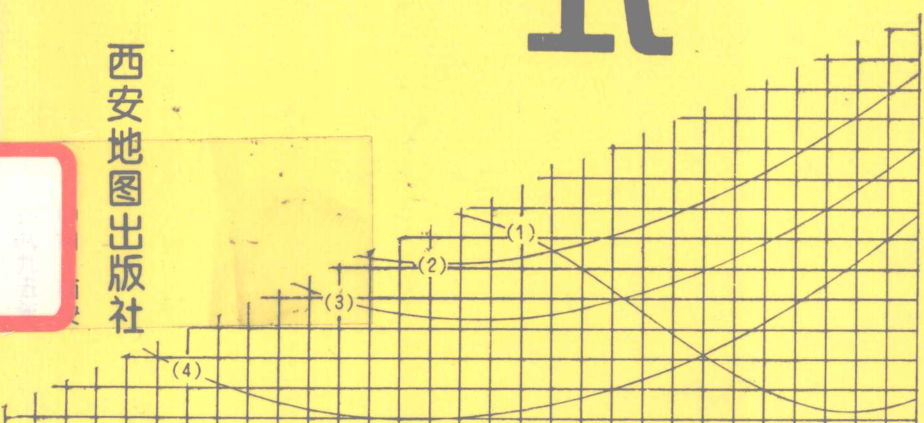
怎样建立经验公式

李佩成 译编



西安地图出版社

怎样建立经验公式

李佩成　译编

西安地图出版社

(陕)新登字 013 号
责任编辑:王兴华
封面设计:傅鸿照

怎样建立经验公式
李佩成　译编
西安地图出版社出版发行
(西安友谊东路 124 号　邮政编码 710054)
新华书店经销　陕西省农业科学院印刷厂印刷
850×1168 毫米　开本 1/32　4.25 印张　106.6 千字
1996 年 2 月第 1 版　1996 年 2 月第 1 次印刷
印数 1－1000
ISBN7-80545-475-2/G·30
定价:10.00 元(平)　15.00(精)

写在前面的话

《怎样建立经验公式》原名《经验公式》，是我在 1976 年暑期译编的。并自己动手把她油印出来，作为周围师生整理科研资料的参考。因其简明扼要，易于掌握，又具广泛的实用性，曾被一些单位翻印；也曾有人建议出版。我却另有想法，觉得在这个日新月异，知识急剧更新的世界上，一个取材古典的译编小册子，不值得消磨铅字，……。

岁月如流，十多年过去了，用过的朋友觉得十分方便，介绍给青年朋友，而青年朋友们认为再油印难保质量，遂建议出版，其理由是：尽管人世间出现了氢弹，但古人早就用过的匕首至今仍不失为一种基本武器，而且用它干起活来，有时反觉得干净利落！经验公式对于科学研究，似具有这种基本武器的性质，……。

我佩服青年朋友的见解，欣然同意将她付印，也希望她以清晰的面目，为更多的朋友服务！

在出书过程中初杨瑞高级实验师多次校对书稿，张惠琴工程师清绘了全部图件，魏晓妹副教授、高敏副研究员、昝林森副教授都为此书的出版付出许多辛劳，我在此表示衷心的感谢！

李佩成

1994 年仲秋于古城西安

目　　录

绪　　言

在科学技术实践中，常常需要研究某些变量之间的关系，并用数学公式的形式把这种关系的规律性表示出来。

如果这种公式是用一定的数学方法通过整理试验资料或观测数据而得，则称其为“经验公式”。它们有时可能反映着某些物理、化学或生物学现象的定律，但在多数情况下它们未必能充分反映客观事物的规律性。尽管如此，仍可用来相当准确的根据已知变量确定未知变量，简单明了反映试验观测成果而由已知推断未知。

因此，掌握建立经验公式的方法是从事科技工作所必需的，尤其是在我国社会主义建设事业飞速发展，群众性科研活动大规模蓬勃兴起的大好形势下，学一点有关经验公式的知识，对于我们的工作将会有一定的益处——这便是整理这本材料的目的。

经验公式从广义上讲可以分为三大类：

第一类称为半经验公式。它首先是理论推导的结果，但却包含着需经处理试验观测资料才能加以确定的未知参数。属于此类的如许多相应的微分方程的建立和求解，或者任何其余的能够求得带有未知常参数的解析公式，水力学中有名的谢才公式

$$V = C\sqrt{Ri}$$

便是一个例子，它表示管道或河渠中水的流速 V 与坡降 i 以及标志管道或河渠几何因子的水力半径 R 三者之间的关系。这个公式可以从理论上推导，但在其中包括着表征管道粗细及管壁光滑程度的常数 C，该 C 需针对具体的管道通过试验加以确定，表 1 所列便是通过试验所得的结果。

第二类经验公式即是通常所说的经验公式。这种公式广泛应用于缺乏足够的有关物理值之间的函数关系。对此，研究者先设法选择那些近似的函数关系，使其比其余的函数关系更符合实际观

测的资料，也就是最能反映所考查的关系。与此同时，需要根据试验观测资料确定包含在所选函数关系中的常系数。

表 1　　　　　　　　**谢才系数 C 值表**

管径（毫米）／水管状况	100	250	500	750	1000	1250
新的管子	41.1	54.4	65.8	68.4	72.4	74.6

试验资料按习惯通常列表予以记录，例如表 2 所示便是通过试验所得的关于铅锌合金中的铅含量（$X\%$）与熔化温度（θ℃）之间的关系值。

表 2

$X\%$	40	50	60	70	80	90
θ（℃）	186	205	226	250	276	304

这些数值之间的关系，也可以画在坐标纸上，如图 1 那样用曲线表示。

如果在变数之间存在的关系并不复杂，则这些点子将会构成光滑曲线。正确的做出光滑曲线对于建立良好的经验公式是重要的。当然，经过试验点的附近，可以作出许多光滑曲线。究竟应当使用哪一条线？用什么办法求出所选曲线的方程式——经验公式，便是我们将要研究的主要内容。

概括地说，可按下述步骤：首先用试验点做出曲线，再参考对照书后所附的曲线图谱，或者利用其它类似的专门文献，选择方程式类型。有时候方程式的型式已被课题的本质所确定，例如，经常会遇到能够满足所求数值关系的已知的微分方程式。于是只需根据试验资料确定积分常数。

方程选出之后进而确定其常数，为此可以使用不同的方法：挑

选点法、平均值法、最小二乘法等，其中最小二乘法能够用来求得比较精确的数值，但是，这个方法常有繁重的计算工作量，因此，只要使用其它方法得到的公式精度够用时，就不必使用它。

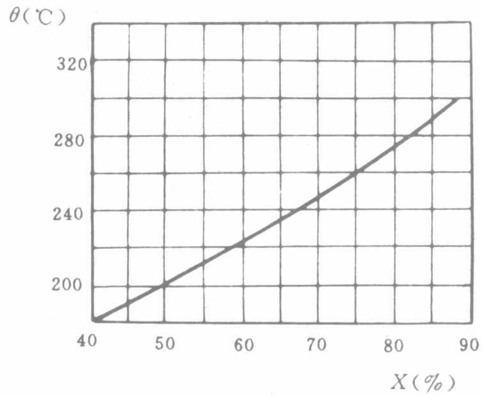


图 1

最简单的函数关系是线性关系：

$$y=a+bx$$

这个公式可用于点子分布近于直线的场合，在其余情况下，当需要选择其它型式的方程时，几乎经常可以把问题转化为寻找线性函数。为此，可将我们所说的公式变换成

$$\varphi(x,y)=a+bf(x,y)$$

的形式，并引进新的变数：

$$x'=f(x,y)$$

$$y'=\varphi(x,y)$$

这种线性转化很有用处，今后将作具体的介绍。

第三类经验公式研究的是非函数关系。也就是说，试验观测资料所表征的现象之间仍然可能存在物理的相互关系，但却具有相当不确定的性质。例如河流年径流量与流域内的年降水量有关，而且可以用物理的理由来解释，总的趋势是降水量越大径流量也越大，然而这种关系不可能是函数关系，因为除了降水量之外，降水

过程特征，植被或土地耕作状况，前一年的墒情等，都能影响径流量。于是，相同的或者相近的降水量，可能造成差别很大的径流量。

对于这类非函数关系的观测资料的整理，需作所谓统计相关分析并求出“回归方程式”，这种方程按理应属广义经验公式的范畴，但是，它在习惯上已被看作统计学研究的另一个部分，因此，在这本材料中我们只作简要的介绍。

按照前述研究任务，本材料共分六章和一套图谱，由第一章到第四章分别介绍了包含一个、两个、三个直至三个以上待定常数的25 种通常所说的经验公式，并举例说明建立的方法。图谱的作用是为了和具体作出的曲线相对照，从而启示人们选择相应的公式和具体的建立方法。这无疑是很有用处的。

第五章专门而扼要的介绍了最小二乘法。

第六章介绍的是相关分析法，除必要的理论部分之外，用实际算例说明其应用方法。

在内容的编写次序上按章分节，图表采取统一编号，公式的编号有两种，一般的按章编，但从第二到第四章在用节号（§）标出要介绍的经验公式的同时，在它的后边又用带括号的中文数码——（一）、（二）……标号，这样做的目的是为了突出最终的公式，而把它和推演过程中出现的公式加以区别，另一个重要的目的是为了便于和图谱的图号对应编排。

这个译编材料原是为大学生和实际工作者参考使用的。从实用出发，对有关理论少用笔墨，因此，这是一个手册性的参考资料。

由于该资料是译编的，其内容大都有来源依据。但因自己不是专门从事数学工作的，对于经验公式研究不深，加之又是利用业余时间，断断续续完成的，可能错误不少，敬请读者批评指正。

李佩成

1976 年 10 月 16 日夜　于张家岗

第一章

直线

§1. $y=bx$ （一）

表 3 所列是由优质碳钢制成的直径 0.183 厘米，长度为 60 厘米的钢丝，在因拉力而发生伸长时，观测到的伸长值 E（以厘米计），与荷载 W（以公斤计）的对应值：

表 3

	W	E	EW	W^2	E_1	E_2	E_3	$\triangle_1$	$\triangle_2$	$\triangle_3$
	0	0	0	0	—	—	—			
	25	0.0260	0.650	625	0.0260	0.0262	0.0261	0	−2	−2
	50	0.0503	2.515	2500	0.0520	0.0522	0.0523	−17	−19	−20
	75	0.0774	5.805	5625	0.0780	0.0783	0.0785	−6	−9	−11
	100	0.1040	10.400	10.000	0.1040	0.1044	0.1047	0	−4	−7
	112	0.1168	13.082	12.544	0.1165	0.1169	0.1173	3	−1	−5
	125	0.1318	16.475	15.625	0.1300	0.1305	0.1309	18	13	9
	130	0.1378	17.914	16.900	0.1352	0.1357	0.1361	26	21	17
$\sum$	617	0.6441	66.841	63.819	—	—	$\sum\lvert\triangle\rvert=$	70	68	71
							$\sum\triangle^2=$	1334	1070	969

如果我们想把伸长值表示为荷载的函数，则可将荷载的数值标在水平坐标上，而用垂直坐标表示伸长值，如图 2 所示。在选择比例尺时应当考虑能标入所有的变数，且使其曲线对两个轴的斜

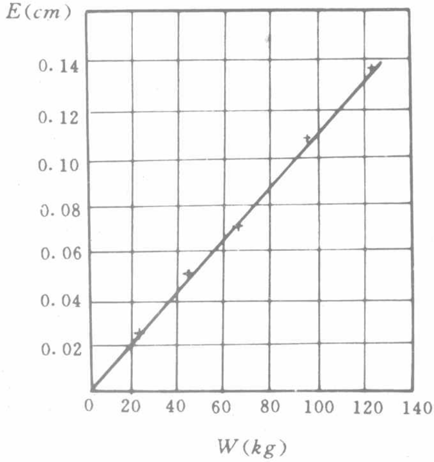


图 2

率大致相同。一般地说，在两个坐标轴上所选取同一个比例尺并不方便——无论是过小还是过大，都不要作为比例尺的单位，因为在第一种情况下将不能发挥资料的精确度，而在第二种情况下点子在图面上显得十分散乱，从而偏离"光滑"曲线。对进一步考查的所有问题来说，作出好的曲线是极其重要的。点子最好用垂直和水平相交的细线条"十"标在图上，使交叉点代表点子的真正位置。

标出点子之后便进而作出光滑曲线，作曲线的原则是使曲线尽可能多的穿过或靠近图上的点子，且使正负各部分的偏差(把曲线的位置视作"零")尽可能小。在图 2 上，试验点分布几乎呈直线，这根线最好用透明的三角板的锐沿来描绘，三角板锐沿放置的位置，应避免点子向一个方向偏离。在画出直线以后，则可推断变数之间存在的关系，对于我们所讨论的例子则可表示为：

$$y=bx \tag{1.1}$$

该式显然没有常数项，就物理意义而言，这是由于荷载为零时，相应的伸长亦为零的原因。现在的问题归结为怎样确定常数 b，为此我们可采用各种不同的方法。分述如下：

1、挑选点法

将透明的尺子或三角板的一条边贴近标着观测点的图面，并通过 $X=0, Y=0$ 的点，然后把尺子绕该点旋转，直至找出最好的

位置，也就是说最多数目的点子落在尺缘引出的直线上，或者最匀称的分布在直线的上下两侧。达到这种境界之后，便将直线画出，并在该直线上指定某一任意点——但要求距原点($X=0, Y=0$)远些——并记出相应的坐标值 X 和 Y。在我们所举的例子中选取的是 $W=125$ 和 $E=0.13$ 这个点。将找出的值代入方程式，则将确定

$$b=\frac{0.13}{125}=0.001040=1.040\times10^{-3}$$

显然可见，最关键的是选择“最优”的线，线选的不同则常数值会有变化，这不仅因人而异，就是同一个人也会出现各次所求不同的情况。所以，这个方法虽然是最简单的，但也是最粗略的，方法的基本优点在于它的直观明显性，从而可以迅速地估计所求公式的精确程度。然而它的精确度尤其取决于工作人员的经验，所以对于生手不要轻易使用这个方法，除非对精度要求不高。

2、**平均值法**

这个方法的依据是要求按所得公式算出的数值 E，对于实测资料的偏差代数和为零。这些偏差(正的和负的)可用几何的方法从图上量出各点相距直线的距离而得。

我们设想下列方程式能得到满足，即

$$\sum(E-E_b)=0$$

式中

E——实测的伸长值，可以理解为函数值或因变量值。

E_b——按所得公式计算的 E 值；如果 W 代表所加的荷载值(自变量值)，则：

$E_b=bW$，代入上式后得：

$$\sum(E-E_b)=\sum(E-bW)=\sum E-b\sum W=0。$$

由此并参见表 3，得

$$b=\frac{\sum E}{\sum W}=\frac{0.6441}{617}=0.001044=1.044\times10^{-3}。$$

该值 b 称其为“平均值”。故称这个方法为“平均值法”，使用该法可以不事先利用观测资料作图。

3、**最小二乘法**

这个方法的实质是要求按照分式计算的数值与实际观测数值的偏差的平方和为最小，亦即

$$\sum(E-E_b)^2=\sum(E-bW)^2$$

为最小。为此，按 b 所取的偏导数应变为零，即

$$\frac{\partial}{\partial b}\sum(E-bW)^2=0 \quad 或 \sum W(E-bW)=0,$$

由此知 $\sum EW-b\sum W^2=0$，于是

$$b=\frac{\sum EW}{\sum W^2} \tag{1·2}$$

用我们所举例子的资料（参看表 3），按公式（1·2）计算可得

$$b=\frac{66.841}{63819}=0.001047=1.047\times10^{-3}$$

方法的评比

现将上述诸法所得公式进行比较，为此对应表中的 W 值，按不同公式计算伸长值 E：

按第一种方法所得的公式：

$$E=E_1=1.040\times10^{-3}W,$$

按第二法： $E=E_2=1.044\times10^{-3}W,$

按第三法： $E=E_3=1.047\times10^{-3}W。$

计算的结果列入表 3 中标明 E_1、E_2 和 E_3 的各栏，为了更明显一些，还找出了计算值和测量值之间的偏差：

$$\triangle_1 = E - E_1,\quad \triangle_2 = E - E_2,\quad \triangle_3 = E - E_3。$$

把这些偏差的绝对值之和用观测次数 7 除之，则得平均误差，彼此十分接近。在算出偏差的平方和之后，可以相信，虽然最小二乘法给出的平均绝对误差较高，但其误差的平方和却是最小的，这就是它的主要优点，在下面我们还将利用机会比较各种不同的方法。

§ 2.　$y = a + bx$　　（二）

为了研究铜的电阻和温度的关系，曾取直径为 0.93 公斤，长 77.60 公分的铜棒进行试验，测量了在各种温度下的电阻值，如表 4 所列，其中 x 是以摄氏记的温度数，r 是以微欧计的铜棒的电阻值。

表 4

NO	x	r	x^2	rx	r_1	r_2	r_3	$\triangle_1$	$\triangle_2$	$\triangle_3$
1	19.1	76.3	364.81	1457.33	76.19	76.26	76.26	+0.11	+0.11	+0.04
2	25.0	77.80	624.00	1945.00	77.91	77.92	75.96	−0.11	−0.12	−0.16
3	30.1	79.75	906.01	2400.8	79.39	79.41	79.43	+0.36	+0.34	+0.32
4	36.0	80.80	1296.00	2908.80	81.11	81.14	81.13	−0.31	−0.34	−0.33
5	40.0	82.35	1600.00	3294.00	82.27	82.31	82.28	+0.08	+0.04	+0.07
6	45.1	83.90	2034.01	3785.89	83.75	83.80	83.76	+0.15	+0.10	+0.14
7	50.0	85.10	2500.00	4255.00	85.18	85.24	85.16	−0.08	−0.14	−0.06
$\sum$	245.3	566.00	9325.83	20044.50	—	—	—	$\lvert 1.20\rvert$	$\lvert 1.19\rvert$	$\lvert 1.12\rvert$
							$\sum \lvert\triangle\rvert : 7 =$	0.171	0.170	0.160
							$\sum \triangle^2 =$	0.2852	0.2869	0.2646

从图 3 发现，根据资料标绘在图上的点子几乎分布呈不经原点的直线，因此可以按 $r = a + bx$ 这种关系式寻找经验公式。为了

确定常数 a 和 b,这里将再次使用上节中所述的三种方法

1、用挑选点法

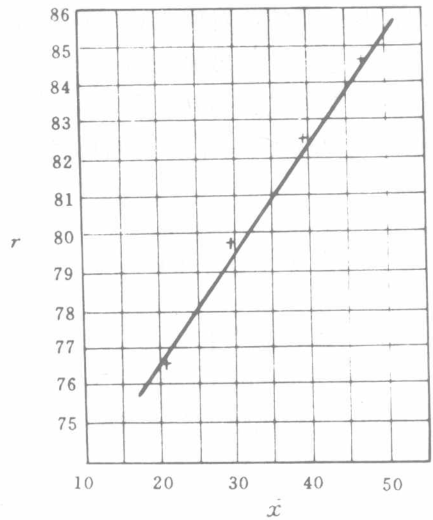


图 3

借助透明的尺子或三角板确定直线的最优位置,不过现在的情况与上节所述有所不同:在这里没有那个确定的原点;因此,建议在所作的直线上选择两个相距较远的点,例如 $x=20$,$r=76.45$,和 $x=48$,$r=84.6$。将这些值代入公式

$$r=a+bx \qquad (1\cdot 3)$$

可得两个方程式

$$76.45=a+20b$$

$$84.60=a+48b$$

求解这两个联立方程式,则得 $a=70.63$ 和 $b=0.291$,于是,得到所求的关系式

$$r=70.63+0.291x$$

2、用平均值法

由于在此必须确定两个常数,因而要把资料分为相等的或大致相等的两组,并且要使每个组的偏差之和等于零,亦即要求

$$\sum(r-a-bx)=0$$

或
$$\sum r=na+b\sum x \qquad (1\cdot 4)$$

式中 n 是分组中每组所包含的测量资料的个数,在本节所举例子中第一组 4 个($n=4$),第二组三个($n=3$),参看表 4,故对第

一组来说

$$\sum r=76.30+77.80+79.75+80.80=314.65$$

$$\sum x=19.1+25.0+30.1+36.0=110.2$$

故按公式 $\sum r=na+b\sum x$，用第一组资料得第一个方程式：

$$314.65=4a+110.2b$$

同理，用第二组资料得：

$$251.35=3a+135.1b$$

解联立方程得： $a=770.59,\ b=0.293$

于是经验公式为：

$$r=70.59+0.293c$$

3、**用最小二乘法**

在使用这个方法的时候，要求偏差的平方和之值为最小，所以应使对 a 和 b 就 $\sum[r-(a+bx)]^2$ 所取的偏导数为零。于是我们得到方程式

$$\frac{\partial}{\partial a}\sum(r-a-bx)^2=\sum 2(r-a-bx)(-1)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\sum(r-a-bx)^2=\sum 2(r-a-bx)(-x)=0$$

或即

$$\sum r=na+b\sum x$$

$$\sum rx=a\sum x+b\sum x^2 \qquad (1\cdot5)$$

式中 n 是观测次数，求解这些方程式，便可确定常数 a 和 b。

提出这一点是有益的，上列方程也可以用如下的方法得到，亦即将所有对应的 r 和 x 的数值代入方程式

$$r=a+bx$$

并将它们加起来之后便得到上面第一个方程式，将所得方程式以相应的 x 值乘之，再加起来，则得第二个方程式。对于我们所举的