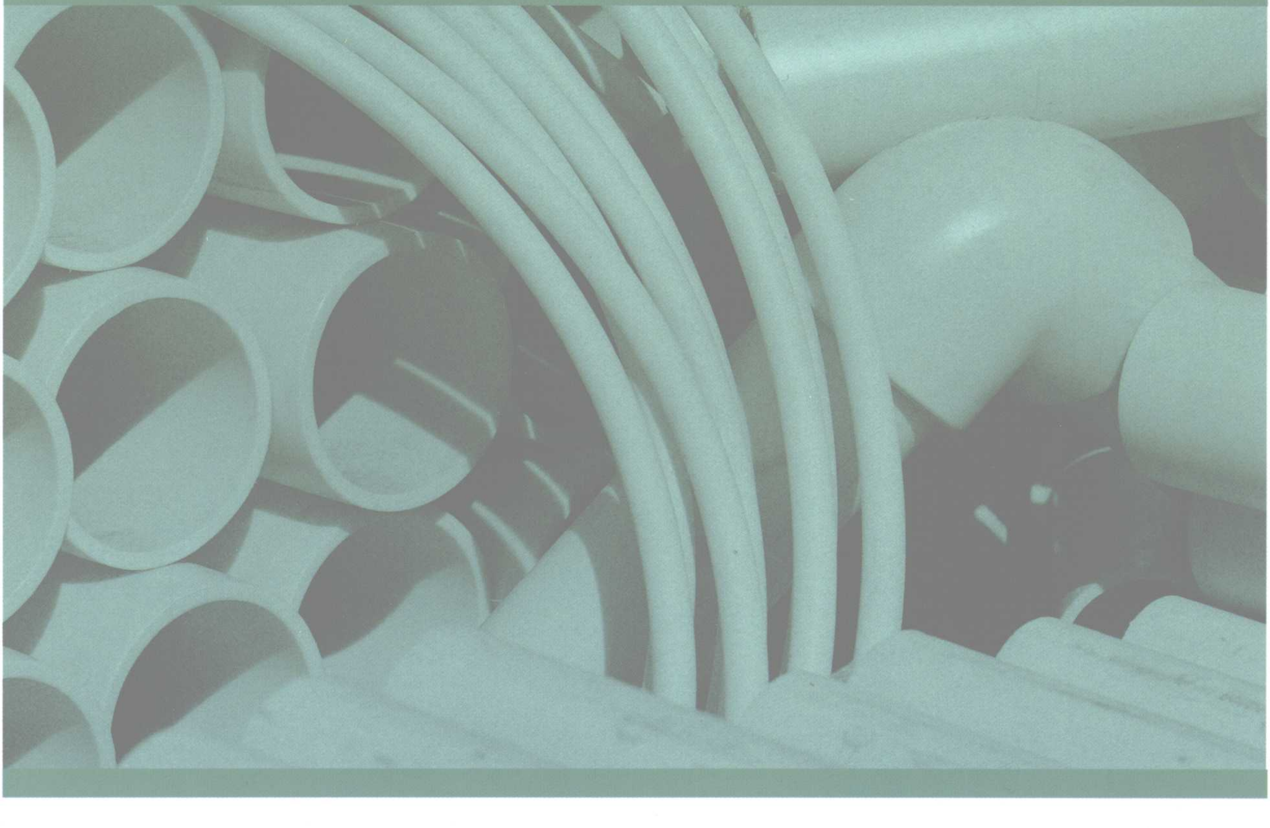
全国高职高专教育“十一五”规划教材

工科应用数学

黄开兴 主编　　徐名扬 龚建荣 王书营 副主编



高等教育出版社
Higher Education Press

全国高职高专教育“十一五”规划教材

工科应用数学

黄开兴　主编
徐名扬　龚建荣　王书营　副主编

高等教育出版社

内容提要

本书是中国高等职业技术教育研究会基础课改革工作委员会组织编写的高职高专“应用数学”系列教材之一，为高职高专工科类专业学生学习后继专业课程提供最基本的数学基础知识。本书贯彻“定位高职，融通学科体系；面向应用，引导量化分析”的编写原则，密切结合专业需求，强化技能培养，突出职教改革方向；针对高职学生特点，语言表述通俗简洁，深入浅出，可读性强，使数学理论不再艰涩深奥。通过大量的案例与模型，将实际应用与数学知识互动交融，让学生在分析问题的环境中学习数学，在解决实际问题的感悟中认识数学。

全书共分七章：函数、极限与连续；导数及其应用；不定积分及其微分方程初步；定积分及其应用；多元函数微积分；无穷级数；概率统计应用知识。

本书可作为高职高专工科类专业学生学习数学课程的教材或参考书，也可供成人教育相关专业和自学考试的读者学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

工科应用数学/黄开兴主编. —北京：高等教育出版社，2008.8

ISBN 978-7-04-024335-2

Ⅰ.工… Ⅱ.黄… Ⅲ.应用数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 113602 号

策划编辑 邓雁城 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 张志奇 **责任绘图** 宗小梅
版式设计 陆瑞红 **责任校对** 杨雪莲 **责任印制** 尤 静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京铭成印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	2008年8月第1版
印 张	16.75	印 次	2008年8月第1次印刷
字 数	410 000	定 价	22.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 24335-00

郑重声明

网络题库使用说明：

1. 进入“中国组卷网”(http://www. zujuan. com. cn)，输入本书封底提供的防伪码“明码”部分(需输入 50 本)，获取积分，即可免费从网上下载题库至本地机。使用时间为一个学年。

2. 高等数学网络题库拥有约 8 000 道题目，内容涵盖微积分、线性代数、概率统计、线性规划、离散数学等高职高专数学类课程，包括选择、填空、判断、计算、分析、应用、证明等多种题目类型。题库系统设置了模板快速组卷、自定义组卷、个人大纲、个人题库、特色上传等功能。

电子邮箱：caokun@ hep. com. cn

咨询电话：(010)58582365

致本书读者

（代序）

在国家大力发展高等职业教育的时候，欣喜地看到一套三册的《经济应用数学》、《工科应用数学》、《计算机应用数学》出版。这是一套很有特色的教材，也是作者们长期教学经验积累的结果，可以预料一定会对数学学习有很多帮助。在这里，作为一个和数学打交道超过半个世纪的老人，想和本书的读者说几句话。

各位读者正是风华正茂、青春无敌的年纪。不久的将来你们会投入到国家建设中去，成为经济生产一线的骨干和核心。那么，眼前的这本“数学”书会带给你们什么呢？你们为什么要学习“高等数学”呢？

为人在世，读书是终生相伴的。读书的目的有二，一是当作工具使用，产生实际效益。二是当作精神享受，提高个人文化修养。比如读唐诗，背古文，既有助于写作，更多的则是后者，即为了欣赏，为了提高个人的精神修养。

数学其实也是一样。数学是一种语言，用符号、数字按规则写成的一串科学公式，是我们彼此交流的基础工具。你可以不创造数学，却必须听懂别人说的数学语言。现在诸如微分、积分、线性、矩阵等等名词，高中生也懂得一二。如果进入金融界，人家说“边际”如何，没有微积分的基础就听不懂。你进入工程界，领导要求“最优化”，可是没有学一点线性规划，就会不知所云。你如果进入信息技术领域，连图像的上升、下降也无法判断，那是要耽误事的。总之，工作上难免碰到一些数学问题，如果连“数学话”都不会说，作为大学生，如何在社会上立足？因此，学习数学是为了掌握一门工具性的语言。

然后，数学还是一种文化修养。台湾作家龙应台关于文化是这样说的：“什么是文化？它是随便一个人迎面走来，他的举手投足，他的一颦一笑，他的整体气质。他走过一棵树，树枝低垂，他是随手把枝折断丢弃，还是弯身而过？一只满身是癣的流浪狗走近他，他是怜悯地避开，还是一脚踢过去？电梯门打开，他是谦抑地让人，还是霸道地把别人挤开？……”（人民网 2005 年 10 月 19 日）

文化其实体现在一个人如何对待他人、对待自己，如何对待自己所处的自然环境的行动中。于是，我们可以类似地用比较通俗的语言来谈数学文化。当你看到一个数学定理的时候，你会浮现出古人的身影，产生敬畏之心吗？在你思考问题的时候，你是否关注它的数量方面？是常量还是变量？在打开一本书，里面有一行行的符号，你是立刻就丢掉不看了，还是并不畏惧它们？在一连串的变换之后问题得解，你会由衷地感叹数学之美吗？在律师叙述理由的时候，你会觉察理由是否充分、是否必要吗？在碰到一桩随机事件，例如购买彩票，你会习惯性地看看中奖的概率有多少吗？你能够欣赏“指数爆炸”、“直线上升”、“事业坐标”、“人生轨迹”这样的语言吗？

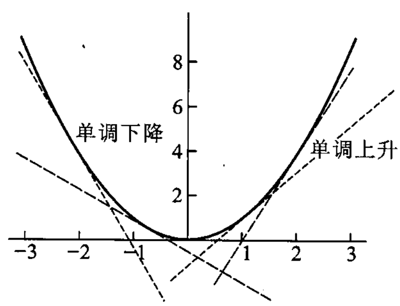
一次和一位经济师闲谈，我说到今天蔬菜比台风前涨了 1 元钱，他马上回应“弹性不大，

再涨也得买”。这个弹性，也和微积分有关。学经济的人，不知道弹性，就没法和人家交流了。

现在，我们可以明白，数学考试成绩固然重要，但真正对一个人的终生发生作用，贯穿于日常行动的，往往是数学文化。如果数学课堂能够具有广博的文化知识滋养，充满高雅的文化氛围，弥漫着优秀的文化传统，数学教学可以说达到最高境界了。

一个国家的未来决定于硬实力和软实力。软实力中，普通百姓的文化素质，特别是受过高等教育人群的文化素养，是一个决定性的因素。环顾世界，追索历史，凡是世界强国，必定是数学强国。当今的数学格局是，美国一马当先，西欧紧随其后，俄罗斯独树一帜，日本正在迎头赶上，中国则是一个未知数。但毋庸置疑的是，与中国国力的逐步提升相伴随的是全民数学素质的提升。

学习数学，不要老是盯着题目和考分，应该多从思想方法上考察，一旦能够有所意会，那真是其乐无穷。就拿大家非常熟悉的二次函数 $y=x^2$ 来说，中学里对它演练过无数的题目，可是你可曾观察过图像各点处切线斜率的变化？



从左往右看，切线斜率在 $x<0$ 部分是负的，由负无穷大渐渐接近于0，$x=0$ 处切线斜率为0，然后斜率成为正数，越来越大。用切线斜率看曲线，就是微积分方法。它用切线斜率告诉你函数的上升、下降、端点、极大或极小等等，美不胜收。况且，你是否也能用这一观点看看股票走势图呢？

瞬时速度，也是微积分涉及的名词。其实，我们每个人头脑中都有“瞬时速度”的概念。试问，快车追赶慢车，在超过慢车的那一刹那，快车速度是不是比慢车的速度快？你一定回答：是！可是我们还没有定义什么是瞬时速度，你怎么就知道了快车在“一刹那”的速度了？这表明，我们的头脑是能动的，有数学潜在力的。如能充分运用这种“直觉”，高等数学完全可以理解得很深刻！

数学表示的一个缺点是过度形式化。定义、定理、证明、推论等等，简洁精确，显示出“冰冷的美丽”。据作者们告诉我，本套书的编写，适当采用了“案例”教学方法，用具体的例子说话，那就容易掌握了。

我曾经跟一位青年朋友写过一首小诗，作为这篇谈话的结束。

数学像一只伶俐的小狗，
你如果亲近它，它会和你忠实相随，
应付艰难险阻，陪伴你走过咸淡人生；
如果你嫌弃它，它也会不高兴，

冷不防咬你一口。

我们需要数学作为精神家园的朋友，

直到永远。

祝各位的数学学习成功。

张奠宙

写于华东师范大学数学系

2008 年 5 月

前言

本书是中国高等职业技术教育研究会基础课改革工作委员会组织编写的高职高专“应用数学”系列教材之一，是全国高职高专教育“十一五”规划教材，是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写的。本书汲取了全国高职高专院校高等数学教学的成果，体现当前高职高专教学改革的方针，切实贯彻“理论适度够用，强化技能培养，服务专业教学需求，突出职教改革方向”的指导思想，使课程结构和教学内容更加符合高职高专工科类专业学生的知识需求和接受能力、教材在编写过程中考虑不同专业或专业方向的要求，提供了教学内容的选择空间。

由于数学的抽象性以及长期以来数学教学与专业应用的脱节，高职学生在学习数学时不能真正感受到数学对他们所学专业的作用，对数学普遍缺乏兴趣，甚至感到畏惧，他们学习数学往往是被动的；与此同时快速发展的市场经济和高职类型应用人才的需求对应用数学教材提出了多元化、超前化、专业化、精简化、高效化的改革要求，在中国高等职业技术教育研究会基础课改革工作委员会和高等教育出版社的指导下，我们确定了“定位高职，融通学科体系；面向应用，引导量化分析”的教材编写原则。

在教材编写过程中，贯彻了以学生为本的思想。针对学生基础状况及未来发展需要，注重教材的基础性，着重讲清基本概念、基本思想、基本方法，使学生能够掌握基本概念、形成基本数学思想、会用基本方法，从而能解决基本数学问题，进而能进行知识的迁移，把数学方法和数学思想应用于其他领域，达到解决实际问题的目的。针对多数学校高等数学课时较少的现状，在保证知识的先进性、科学性的同时，本教材力求做到知识点全面、突出理论联系实际、体现强化技能训练等特点。

本教材的编撰旨在为高职学生修习“工科应用数学”课程提供一个基础平台，同学们站在这个平台上，切勿局于一隅，简单地、被动地去继承数学知识，而要从概念中解读本质内涵，从理论中感悟脉络关联，从案例中掌握应用技能，力求开阔视野，使自己在认知层面上实现从常量到变量、静态到动态、有限到无限、单因素到多因素、确定到随机、感知到应用的提升，为未来踏上知识更新、实践创新和可持续发展的更高平台夯实基础。

本教材具有篇幅小、学时少、容易教与学的特点，充分体现了“以应用为目的，以必需、够用为度”的要求。计划教学时数约为44至76课时，教学中可以根据具体专业的要求选择教学内容。为了方便读者阅读，书后附有初等数学中的常用公式、基本初等函数表、简易积分表、概率用表及习题参考答案与提示。

目录

第 1 章

函数、极限与连续

函数是微积分学的主要研究对象，也是学习工程数学的重要基础概念，本章将在中学数学知识的基础上，进一步介绍函数的概念及函数的主要性质，并介绍反函数、复合函数、初等函数以及常用的工程函数.

§1-1 函数的概念

一、函数的定义

1. 函数的定义

在研究某一事物的变化过程时，往往同时遇到两个或多个变量，这些变量不是彼此孤立的，而是相互联系、互相依赖，遵循着一定的变化规律.

例如，圆的面积 S 与它的半径 r 间的关系由公式 $S=\pi r^2$ 确定，S 随 r 变化而变化.

在初速度为 0 的自由落体运动中，下落的距离 s 与下落的时间 t 是两个变量，s 随 t 变化而变化，且满足关系 $s=\frac{1}{2}gt^2$.

这就是说，同一过程中变量之间往往存在着某种内在的联系，它们在遵循某一规律时相互联系、相互约束着.

【定义】 设有 x 和 y 两个变量，D 是一个给定的数集，若对于 D 中每一个数 x，按照一定的对应法则 f 总有唯一确定的数值 y 与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$.

数集 D 称为函数的**定义域**，数集 $M=\{y \mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.

若对于自变量 x 的某个确定的值 x_0，由对应法则 f 能够得到一个确定的值 y_0，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处**有定义**，y_0 是 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**，记为 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$.

平面点集 $G=\{(x,y) \mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**.

【例 1】 设 $f(x)=2x^2-3$，求 $f(-1)$，$f(x_0)$，$f\left(\frac{1}{a}\right)$.

解 $f(-1)=2(-1)^2-3=-1$，$f(x_0)=2x_0^2-3$，$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{2}{a^2}-3$.

由函数的定义可知，当函数的定义域和函数的对应法则确定以后，这个函数就完全确定了. 因此，常把函数的定义域和函数的对应法则作为确定函数的**两个要素**. 两个函数只有当定义域和对应法则完全相同时，这两个函数才认为是完全相同的.

2. 函数的表示方法

常用的函数表示方法有表格法、图示法、解析法(又称公式法).

(1) 将自变量的值与对应的函数值列成表格来表示函数的方法叫做**表格法**.

例如，常用的平方表，对数表，三角函数表等都是用表格法表示函数的.

(2) 用图形来表示自变量值与对应函数值的关系的方法叫做**图示法**.

(3) 用数学式子表示自变量和因变量的对应关系的方法叫做**解析法**，也叫**公式法**.

例如，$y=\sqrt{3-x^2}$，$y=\ln(x+2)$，$y=e^x\sin x$ 等都是解析式函数.

以下几种是今后常见的解析函数：

(Ⅰ) 分段函数

在定义域的不同的范围内用不同的解析式分段表示的函数叫**分段函数**.

分段函数求函数值时，应把自变量的值代入相应范围的表达式中去计算.

【例2】 已知分段函数$f(x)=\begin{cases}\sqrt{5}, & x<-1,\\ x^2, & -1\leqslant x<2,\\ 8-2x, & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$(如图1-1)，求$f(0)$，$f[f(-3)]$.

解 $f(0)=x^2\big|_{x=0}=0$；$f[f(-3)]=f(\sqrt{5})=8-2\sqrt{5}$.

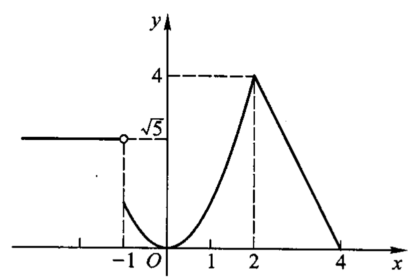


图1-1

几个常见的分段函数：

1) **绝对值函数**

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0,\end{cases}\quad D=(-\infty,+\infty),$$

$M=[0,+\infty)$ (如图1-2).

2) **符号函数**

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}\quad D=(-\infty,+\infty),\ M=\{-1,0,1\}\text{(如图1-3)}.$$

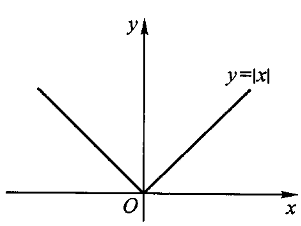


图1-2

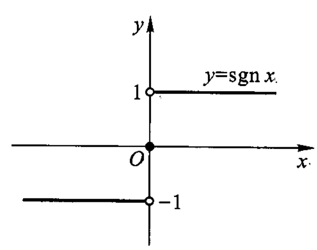


图1-3

3）**取整函数**

$y=[x]$，$[x]$表示不超过 x 的最大整数. $D=(-\infty,+\infty)$，$M=\mathbf{Z}$（其中 $\mathbf{Z}$ 表示整数集）.

例如，$[2.38]=2$，$[-6.12]=-7$，$[1]=1$.

（Ⅱ）**隐函数**

若变量 x，y 之间的函数关系是由一个含 x，y 的方程 $F(x,y)=0$ 给出的，则称 y 是 x 的**隐函数**，相应地，把直接由自变量的式子表示的函数 $y=f(x)$ 称为**显函数**.

注 隐函数并不一定可转化为显函数.

例如，$x^2+y^2=9$，$x+y^2-e^{xy}=1$，$y=\sin(x+y)$等.

（Ⅲ）**参数方程确定的函数**

在给定的平面直角坐标系中，如果曲线上任意一点的坐标 x，y 都是某个变量 t 的函数 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t)\end{cases}$ 且对于 t 的每一个允许值，由方程组 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t)\end{cases}$ 所确定的点(x,y)都在这条曲线上，那么方程组 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ 称为这条曲线的参数方程，联系 x，y 之间关系的变量 t 称为参数。例如，

圆的参数方程 $\begin{cases}x=a+r\cos t,\\y=b+r\sin t,\end{cases}$ 其中(a,b)为圆心坐标，r 为圆半径，t 为参数；

椭圆的参数方程 $\begin{cases}x=a\cos t,\\y=b\sin t,\end{cases}$ 其中 a 为长半轴长，b 为短半轴长，t 为参数；

双曲线的参数方程 $\begin{cases}x=a\sec t,\\y=b\tan t,\end{cases}$ 其中 a 为实半轴长，b 为虚半轴长，t 为参数.

3. 反函数

【定义】 设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中的每一个 $y(y\in M)$，都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 $x(x\in D)$ 与之对应，这样就确定了一个以 y 为自变量的函数，称这个函数为 $y=f(x)$ 的**反函数**. 记为 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 M，值域为 D.

习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量. 因此 $y=f(x)$ 的反函数可表示为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

【例 3】 求 $y=e^{x+1}$ 的反函数.

解 由 $y=e^{x+1}$ 得 $\ln y=x+1$，所以 $x=\ln y-1$，互换字母 x，y 得所求反函数

$$y=\ln x-1.$$

二、函数的几种特性

1. 函数的单调性

如果对于区间(a,b)内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在(a,b)内**单调增加**；当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在(a,b)内**单调减少**. 区间(a,b)称为**单调区间**.

单调增函数的图形是从左至右上升的，单调减函数的图形是从左至右下降的.

【例 4】 证明 $f(x)=\ln x+x$ 在$(0,+\infty)$上单调增加.

证 设 x_1，x_2 是$(0,+\infty)$上任意两点，且 $0<x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=(\ln x_1+x_1)-(\ln x_2+x_2)=\ln\frac{x_1}{x_2}+(x_1-x_2).$$

由 $0<x_1<x_2$ 得 $0<\frac{x_1}{x_2}<1$，$\ln\frac{x_1}{x_2}<0$，$x_1-x_2<0$，
所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，
因此 $f(x)=\ln x+x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

2. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于任何 $x\in D$ 有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**偶函数**；若有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

例如，$y=x^2$，$y=\cos x$，$y=|x|$ 是偶函数；

$y=x^3$，$y=\sin x$，$y=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 是奇函数；

$y=x^2+x-1$，$y=\ln x$，$y=\sqrt{x}+\cos x$ 是非奇非偶函数.

3. 函数的有界性

若对属于某一区间 I 的任何 x 的值总有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，其中 M 是一个与 x 无关的正常数，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内**有界**；否则称为**无界**.

若函数 $f(x)$ 在其定义域内有界，则称 $f(x)$ 为**有界函数**；否则称为**无界函数**.

有界函数的图形必位于两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

例如，函数 $y=\sin x$ 是有界函数，因为在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内恒有 $|\sin x|\leqslant 1$.

注 确定一个函数是有界的或无界的，必须指出其相应的范围.

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义，若存在一正数 T，对于任何 $x\in D$ 且 $x+T\in D$ 都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是**周期函数**，T 称为**周期**.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数. $y=x-[x]$ 是周期为 1 的函数.

注 若 T 为 $f(x)$ 的周期，由定义知 $2T$，$3T$，$4T$，…也都是 $f(x)$ 的周期，故周期函数有无穷多个周期，通常说的周期是指最小正周期(基本周期)，然而最小正周期未必都存在.

周期函数的图像在每一个周期 $(a+kT,a+(k+1)T)$ (a 为任意数,k 为任意整数)上都有相同的形状.

三、初等函数

1. 基本初等函数

常数函数 $y=c$ (c 为常数)；幂函数 $y=x^\mu$ (μ 为实数)；指数函数 $y=a^x$ ($a>0,a\neq1$)；对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0,a\neq1$)；三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 统称为**基本初等函数**(见附录二).

注 为了叙述方便，把多项式函数 $y=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}$ 记为基本初等函数.

2. 复合函数

函数 $y=\sin^2 x$ 不是基本初等函数，但可由基本初等函数 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 组合而成. 实际上较复杂的函数都是由几个基本初等函数或简单函数组合而成的，称这种组合为复合.

【定义】 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，若 $u=\varphi(x)$ 的值域或其部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域中，则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数，称为 x 的**复合函数**，记为 $y=f[\varphi(x)]$. 其中 x 是自变量，u 称为**中间变量**.

【例 5】 设 $f(x)=e^x$，$\varphi(x)=\arccos x$，求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$\varphi[f(x)]$.

解 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi(x)}=e^{\arccos x}$；$\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)=\arccos\dfrac{1}{x}$；$\varphi[f(x)]=\arccos f(x)=\arccos e^x$.

为了研究的方便，往往把一个比较复杂的函数分解成若干个基本初等函数. 要把复合函数分解好，必须把基本初等函数的形式记住.

【例 6】 指出下列复合函数的复合过程：

1）$y=\sqrt{\cot x}$； 2）$y=\sin^3(1+x^2)$； 3）$y=\arccos\sqrt{\ln(x^2-1)}$.

解 1）$y=\sqrt{\cot x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$（幂函数），$u=\cot x$（三角函数）复合而成.

2）$y=\sin^3(1+x^2)$ 是由 $y=u^3$，$u=\sin v$，$v=1+x^2$ 复合而成.

3）$y=\arccos\sqrt{\ln(x^2-1)}$ 是由 $y=\arccos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=\ln w$，$w=x^2-1$ 复合而成.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合所构成的并能用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

例如，函数 $y=\sin^2(3x+1)$，$y=\sqrt{x^3}$，$y=\dfrac{\ln x+2\tan x}{10^x-1}$ 都是初等函数.

今后在微积分运算中，常把一个初等函数分解为基本初等函数或基本初等函数的四则运算形式进行研究，应当学会怎样分析初等函数的结构.

【例 7】 设 $y=\sqrt{x^3+\tan^2 x}$，试分析它的结构.

解 原函数可分解为 $y=\sqrt{z}$，$z=u+v$，$u=x^3$，$v=w^2$，$w=\tan x$.

4. 初等函数的定义域

函数的定义域是确定函数的要素之一，在研究函数时，只有在函数定义域内进行研究才是有意义的.

在实际问题中，函数的定义域是根据所研究的问题的实际意义来确定的. 对于用数学式子表示的函数，若不考虑问题的实际意义，则函数的定义域就是指能使这个式子有意义的所有实数的集合.

【例 8】 求下列函数的定义域：

1）$y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$； 2）$y=\arccos\dfrac{x+1}{3}-\ln(3+x)$.

解 1）要使函数有意义，应满足 $4-x^2\geqslant 0$，且 $x-1\neq 0$，

即 $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ x\neq 1,\end{cases}$ 所求定义域为 $[-2,1)\cup(1,2]$；