高等学校经典教材配套辅导丛书

实变函数与泛函分析学习指导

Shibian Hanshu Yu Fanhan Fenxi Xuexi Zhidao

姚 奎 梁永顺 编著

中国科学技术大学出版社

高等学校经典教材配套辅导丛书

实变函数与泛函分析学习指导

姚 奎 梁永顺 编著

中国科学技术大学出版社

内容简介

《实变函数与泛函分析》是大学数学系与理工科各专业的高年级本科生和低年级研究生所必须掌握的一门现代数学基础课，但对于大部分初学者来说，学习这门课会感觉略有难度. 为此，我们编写了本书，希望能对同学们掌握这门课程有所帮助. 同时，对于从事这门课教学工作的老师们，本书也可作为参考.

全书共分 10 章，与教材相对应，每章包括主要定义、主要定理、例题解析、习题精解等 4 部分.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析学习指导 / 姚奎, 梁永顺编著 .— 合肥：中国科学技术大学出版社, 2008. 9

ISBN 978-7-312-01194-8

I. 实 ··· II.①姚 ···②梁 ··· III.①实变函数—高等学校—教学参考资料 ②泛函分析—高等学校—教学参考资料 IV.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 120955 号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

网址：http://press.ustc.edu.cn

合肥市美格印务有限公司印刷

全国新华书店经销

开本: 880 × 1 230 1/32 印张: 9.25 字数: 272 千

2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷

定价: 15.00 元

序

由高等教育出版社出版的《实变函数与泛函分析概要》在全国得到了广泛的使用，并已经进行了第三版修订。有很多读者对于课本上的习题感觉还有些难度，希望有一本辅导与习题解答的书作为参考。姚奎副教授、梁利顺博士合编的辅导书，对课本内容进行了梳理；增加了部分例题，对课本后面的习题进行了解答。相信这本书会对于大家的学习和教学工作有所帮助。书中若有不妥或错漏之处，还请广大读者批评指正。

郑维行

2008年6月

前　言

《实变函数与泛函分析》是大学数学系与理工科各专业的高年级本科生和低年级研究生所必须掌握的一门现代数学基础课，但是对于大部分初学者来说，学习这门课会感觉略有难度. 为此，我们编写了本书，希望能对同学们掌握这门课程有所帮助. 对于从事这门课教学工作的老师们，本书也可作为参考.

本书得以出版，要感谢南京大学数学系郑维行先生提出宝贵意见并作了序言，感谢南京大学张伏同学不辞辛苦的打印工作. 本书参考了国内外许多同行的书，如郑维行、王声望、宋国柱、程其襄、张恭庆、Rudin 等先生的书，在此一并致谢.

由于时间仓促和水平所限，书中肯定还有很多缺点和错误，恳请大家批评指正，提出宝贵意见.

编　者

2008 年 7 月

目　　录

第1章　集与点集

一、主要定义

有限集、空集和无限集　若集的元只有有限个，则称之为有限集. 不含任何元的集称为空集，用记号 $\varnothing$ 表示. 一个非空集，如果不是有限集，就称为无限集.

子集和真子集　设 A, B 是两个集，若 A 的每个元都属于 B，称 A 是 B 的子集，记成 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 若 $A \subset B$ 且存在一个元 $x \in B$ 而 $x \notin A$，则称 A 是 B 的真子集.

相等　设 A, B 是两个集，若 $A \subset B$ 与 $B \supset A$ 同时成立，则称集合 A 与 B 相等，记成 $A = B$.

集合的并、交和差　设 A, B 是两个集合，由 A 中的元以及 B 中的元全体所成的集称为 A, B 的并，记成 $A \cup B$；就是说

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{或} x \in B\}.$$

由同时属于 A 与 B 两者的那些元所成的集合称为 A 与 B 的交，记成 $A \cap B$；即

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{且} x \in B\}.$$

由属于 A 而不属于 B 的那些元所成的集合称为 A 与 B 的差，记成 $A - B$.

基本集和补集　如果所考虑的一切集都是 X 的子集，这时便称 X 为基本集. 对于任一基本集 X，差集 $X - A$ 称为 A 关于 X 的补集或简称为 A 的补集，记成 $\mathscr{C}_X A$ 或 $\mathscr{C}_A$.

映射、定义域和值域　设 A, B 是两个非空集合. 若依一定的法则 f，对每个 $x \in A$，在 B 中有一个确定的元 y 与之对应，则称 f 是定义在 A 上而取值于 B 的映射，记成 $f : A \to B$，并将 x 与 y 的关系写成 $y = f(x)$. 这时称 A 为 f 的定义域，

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

为 f 的值域.

满射、逆映射和一一映射 设给定映射

$$f:A\to B,$$

如果有 $B=f(A)$, 就是说, f 的像充满整个 B, 则说 f 是满射或映上的; 如果对每个 $y\in B$, 仅有惟一的 $x\in A$ 使 $f(x)=y$, 则说 f 有逆映射 f^{-1}, 它是定义在 $f(A)$ 上而取值于 A 上的满射. 当映射

$$f:A\to f(A)$$

有逆映射时, 称 f 是一一映射.

特征函数 集 E 的特征函数记成 $\chi_E(x)$, 它的定义是

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\notin E.\end{cases}$$

对等 设 A,B 是两个集合, 如果有一一映射 f 存在, 使 $f(A)=B$, 则称 A 与 B 成一一对应或者互相对等, 记成 $A\sim B$.

注 对等有如下 3 条基本的性质:

(1) 自反性 $A\sim A$;

(2) 对称性 若 $A\sim B$ 则 $B\sim A$;

(3) 传递性 若 $A\sim B, B\sim C$, 则 $A\sim C$.

邻域、内点和开集 设 E 为一维欧几里得空间 $\mathbf{R}$ 的任一子集,

$$a\in\mathbf{R}.$$

含有 a 的任一开区间称为 a 的邻域. 对于 E 中一点 a, 如果存在 a 的某个邻域 (α,β) 整个含于 E 内, 这时

$$a\in(\alpha,\beta)\subset E,$$

则称 a 为 E 的内点. 因而 E 的内点必属于 E. 若 E 的每一点都是 E 的内点, 则称 E 为开集.

聚点 设 E 为 $\mathbf{R}$ 中的一个点集, $a\in\mathbf{R}$, 若 a 的任一邻域均含有 E 中异于 a 的一点, 则称 a 是 E 的聚点.

导集、孤立点、闭包、完全集、闭集和自密集 由点集 E 的一切聚点所成的集称为 E 的导集, 记为 E', 称 $E-E'$ 中的点为 E 的孤立点. E 的闭包是指集 $E\cup E'$, 并记成 $\overline{E}$. 若 $E'=E$, 称 E 为完全集. 若 $\mathscr{C}E=\mathbf{R}-E$ 为开集, 则称 E 为闭集. 若 $E\subset E'$, 则称 E 为自密集.

康托尔三分集 将基本区间 $[0,1]$ 用分点 $\dfrac{1}{3}$ 与 $\dfrac{2}{3}$ 三等分, 并除去

中间的开区间 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. 把余下两个闭区间各三等分, 并除去中间的开区间 $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. 然后再将余下的 4 个闭区间同法处理, 如此得到康托尔三分集 P_0.

稠密集和稀疏集 设 E 是实直线 $\mathbf{R}$ 的子集, 若它的导集等于 $\mathbf{R}$, 称 E 为 $\mathbf{R}$ 中稠密集. 当 $\overline{E}$ 的补集在 $\mathbf{R}$ 中稠密时, 称 E 为稀疏集.

距离 对于 $\mathbf{R}^n$ 中任意两点

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \cdots, y_n),$$

定义它们之间的距离为

$$\rho(x, y) = \{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

注 距离有如下三条基本的性质:

(1) 非负性 $\rho(x, y) \geqslant 0; \rho(x, y) = 0$ 与 $x = y$ 等价;

(2) 对称性 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(3) 三点不等式 对于任何 $x, y, z \in \mathbf{R}^n$, 有

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

势 将所有的集分类, 凡彼此对等的集归于一类, 不对等的集归于不同的类, 每一类均赋予一个标志, 称为该类中每个集的势 (或基数), 集 A 的势记为 $\overline{\overline{A}}$.

序 对于给定的集 X, 若在它的元之间能引进关系 "$\leqslant$"(这里作为序的记号, 可读成 "小于或等于"), 满足序公理:

(1) $a \leqslant a$;

(2) 若 $a \leqslant b, b \leqslant c$, 则 $a \leqslant c$;

(3) 若 $a \leqslant b, b \leqslant a$, 则 $a = b$,

其中 $a, b, c \in X$, 那么称 X 为带有序 $\leqslant$ 的半序集. 如果对于半序集 X 的任意两个元 a, b, 还满足条件:

(4) 关系式 $a \leqslant b$ 与 $b \leqslant a$ 二者必居其一,

那么, 称 X 为带有序 $\leqslant$ 的全序集.

上界和上确界 设 X 为半序集, X_0 为 X 的子集. 如果 $b \in X$ 满足条件: 对一切 $x \in X_0$ 有 $x \leqslant b$, 则称 b 为 X_0 的上界. 如果 b 为 X_0 的上界, 且对 X_0 的任一上界 b', 均有 $b \leqslant b'$, 则称 b 为 X_0 的上确界.

容许集 设 X 为非空半序集, 它的每个非空全序子集均有上确界. 取定元 $a \in X$ 与映射 $f: X \to X$, 如果下列 3 个条件满足:

(1) $a \in A$;

(2) $f(A) \subset A$;

(3) A 的每个全序子集的上确界属于 A,

称 X 的子集 A 为容许集.

极大元 设 X 为半序集, $x \in X$. 如果对任一 $y \in X$, 满足 $x \leqslant y$, 即有 $y = x$, 则称 x 为 X 的极大元. 同理可定义极小元.

二、主要定理

定理 1 对于集合 E 与任意一集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$, 恒有分配律成立:

$$E \cap \left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I}(E \cap A_\alpha).$$

定理 2 (德摩根法则) 对于基本集 X 中的并集、交集的补集运算, 有

(1)$\mathscr{C}\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right) = \bigcap(\mathscr{C}A_\alpha)$;

(2)$\mathscr{C}\left(\bigcap_{\alpha} \alpha A_\alpha\right) = \bigcup(\mathscr{C}A_\alpha)$.

定理 3 任何无限集含有一个可列子集.

定理 4 可列个可列集的并集是可列的.

定理 5 点集 $[0,1] = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 是不可列的.

定理 6 任意个开集的并是开集; 有限个开集的交是开集.

定理 7 E 为闭集的充要条件是 $E' \subset E$.

定理 8 任何集 E 的导集是闭集.

定理 9 (1) 设 $A \subset B$, 则 $A' \subset B'$;

(2) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

定理 10 任意个闭集的交为闭集; 有限个闭集的并为闭集.

定理 11 设 E 为闭集, 则 E 的闭包与 E 相等; 并且若 E 无孤立点, 则 E 是完全集.

定理 12 有界非空开集 G 可表示为至多可列个互不相交的构成

区间的并:

$$G = \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k).$$

定理 13 $\mathbf{R}^2$ 中的非空开集 G 可表示为可列个互不相交的半闭正方形的并.

定理 14 设集 A 的势为 μ, 用 2^μ 表示 A 的一切子集所成的类的势, 则有 $2^\mu > \mu$.

定理 15(伯恩斯坦定理) 设 λ, μ 为两个势. 若 $\lambda \leqslant \mu, \mu \leqslant \lambda$ 同时成立, 则有 $\lambda = \mu$.

定理 16 设 X 为非空半序集, 且 X 的每个非空全序子集均有上确界, 再设映射 $f : X \to X$ 满足 $f(x) \geqslant x(x \in X)$, 那么, 必有一个元 $x \in X$, 使 $f(c) = c$.

定理 17 每个半序子集都含有极大全序子集.

定理 18(佐恩引理) 设 X 为非空半序集, 若 X 的每一非空全序子集有上确界, 则 X 有极大元.

定理 19(策莫罗选择公理) 设 $\mathscr{A}$ 为一非空集的类, 则存在映射 $f : \mathscr{A} \to \bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}} A$, 满足: 对每个 $A \in \mathscr{A}$, 有 $f(A) \in A$.

三、例题解析

例 1 证明:

(1) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-1, -\frac{1}{n}\right) = (-1, 0)$; (2) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$.

证 (1) 一方面, 令 $A_n = \left(-1, -\dfrac{1}{n}\right)$. 则对任意 $n \in \mathbf{N}$, 有

$$A_n = \left(-1, -\frac{1}{n}\right) \subset (-1, 0),$$

故 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-1, -\frac{1}{n}\right) \subset (-1, 0)$. 另一方面, 对 $x \in (-1, 0)$, 存在 $n_0 \in \mathbf{N}$,

使 $x \in \left(-1, -\dfrac{1}{n_0}\right) = A_{n_0}$, 于是

$$\bigcup_{n_0=1}^{\infty} A_{n_0} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-1, -\frac{1}{n}\right) \supset (-1, 0).$$

综上有 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-1, -\frac{1}{n}\right) = (-1, 0)$.

(2) 一方面, 令 $A_n = \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$. 设 $x \notin \{0\}$, 即 $x \neq 0$. 若 $x < 0$, 则有 $n_0 \in \mathbf{N}$, 使 $x < -\dfrac{1}{n_0}$, 故 $x \notin \left(-\dfrac{1}{n_0}, \dfrac{1}{n_0}\right)$, 即 $x \notin \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. 另一方面, 对任意 $n \in \mathbf{N}$, 恒有 $-\dfrac{1}{n} < 0 < \dfrac{1}{n}$, 故 $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \supset \{0\}$.

综上有 $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$.

例 2 证明: $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$; $A\Delta B = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C)$.

证
$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \\ &= [A\backslash(A \cap B)] \cup [B\backslash(B \cap A)] \\ &= (A \cup B)\backslash(A \cap B). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \\ &= (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C). \end{aligned}$$

例 3 作满足下列条件的映射:

(1) 从 $[0, 1]$ 上全体连续函数到实轴的一个映射;

(2) 从单位圆周到 $[0, 1]$ 的单射;

(3) 从 $(0, 1)$ 到 $(0, \infty)$ 的双射.

解 (1) 令 $x_0 \in [0, 1]$, f 是 $[0, 1]$ 上的连续函数. 作映射

$$\phi : f \to f(x_0),$$

则 ϕ 是 $[0, 1]$ 上全体连续函数到实轴的一个映射.

(2) 对任一非零复数 z, 取其幅角主值 $\arg z, 0 \leqslant \arg z < 2\pi$. 此时 $f : z \to \dfrac{1}{2\pi}\arg z$ 就是从单位圆周到区间 $[0, 1]$ 的一个单射.

(3) 只需取 $f : x \to \tan\dfrac{\pi x}{2}$ 即可.

例 4 (1) 证明有理数是可列集;

(2) 试作 $\mathbf{R}$ 中全体正有理数的一个排列 $\{r_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} r_n^{\frac{1}{n}} = 1.$$

解 (1) 首先来证明正有理数是可列集. 因为每个正有理数都可以写成既约分数的形式:$r = \dfrac{p}{q}(q > 0)$, 所以令

$$A_m = \left\{\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \cdots, \frac{n}{m}, \cdots\right\}, \quad m = 1, 2, \cdots.$$

显然, 对每个固定的 m, A_m 是可列集. 而所有的正有理数都是由这样的 A_m 组成的, 故而正有理数是一个可列集. 从而负有理数也是一个可列集, 再加上 0 元素组成了有理数全体, 并且有理数全体是可列的.

(2) 只需作如下的排列即可:

$$1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots.$$

从如上所作的排列 $\{r_n\}$ 即得

$$\lim_{n\to\infty} r_n^{\frac{1}{n}} = 1.$$

例 5 用极限和收敛的思想来刻划闭集. 即点集 A 是闭集的充分必要条件 (以下简称充要条件) 是点集 A 中的任何一个收敛点列必收敛到 A 中的一点.

证 充分性: 设 A 中任何一个点列必收敛到 A 中一点, 则对于 A 的任一收敛点 $x_0 \in A'$, 必在集合 A 中存在点列 $\{x_n\}, x_n \neq x_0, n = 1, 2, \cdots$, 使得 $x_n \to x_0$. 因为 $x_0 \in A$, 所以 $A' \subset A$. 于是 A 必是闭集.

必要性: 设 A 是一个闭集,x_n 是 A 中一个收敛点列,$x_n \to x_0$. 如果有某个 n, 使 $x_n = x_0$, 则 $x_0 \in A$; 如果对一切 $n, x_n \neq x_0$, 但 $x_n \to x_0$, 则 x_0 是 A 的聚点, 于是 $x_0 \in A' \subset A$, 因而总有 $x_0 \in A$.

故而充分性、必要性皆成立.

例 6 对于每个自然数 n, A_n 表示分母为 n 的有理数全体, 证明:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \mathbf{Q}, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \mathbf{Z}.$$

式中 $\mathbf{Q}$ 表示有理数全体, $\mathbf{Z}$ 表示整数全体.

证 对于一切自然数 n, 显然有 $\mathbf{Q} \supset A_n \supset A_1 = \mathbf{Z}$, 所以

$$\mathbf{Q} \supset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \supset \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \mathbf{Z}.$$

因为对于任一有理数 $\frac{q}{p}$, 其中 p,q 均为整数,$p>0$, 且

$$\frac{q}{p}=\frac{qn}{pn}\in A_{pn}, n=1,2,\cdots.$$

所以 $\frac{q}{p}$ 属于无穷多个 A_n, 即属于 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$, 从而 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\mathbf{Q}$.

又对 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 中的任一元素均可写成既约分数 $\frac{q}{p}$ 的形式, 其中 $\frac{p}{q}$ 是整数,$p>0$ 且 p,q 互质. 因为 $\frac{q}{p}\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$, 所以必有 $N\in\mathbf{N}$, 使得 $n>N$ 时,$\frac{q}{p}\in A$. 若取质数 $n_0\geqslant N$, 因为 $\frac{q}{p}\in A_n$, 一定有整数 m, 使 $\frac{q}{p}=\frac{m}{n_0}$, 从而 $n_0q=mp$. 于是 n_0 必能被 p 整除, 由于 n_0 为质数, 所以 $p=1$, 即 $\frac{q}{p}=q\in\mathbf{Z}$. 故证明得到 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\mathbf{Z}$.

例 7 设 $E=\{\cos n\}$, 则 $\overline{E}=[-1,1]$.

证 令 $A=\{n+2m\pi:n,m\in\mathbf{Z}\}$, 易知对任给 $t\in\mathbf{R}$ 以及 $\delta>0$, 存在 $a\in A$, 使得 $|t-a|<\delta$. 从而知 $\overline{A}=\mathbf{R}$. 现在设 $x\in[-1,1]$, 以及 $\varepsilon>0$, 则存在 $t\in\mathbf{R}$, 使得 $\cos t=x$, 且存在 $n,m\in\mathbf{Z}$, 使得 $t<n+2m\pi<t+\varepsilon$. 由此得

$$|x-\cos n|=|\cos t-\cos(n+2m\pi)|\leqslant n+2m\pi-t<\varepsilon.$$

即当 $E=\{\cos n\}$ 时, E 的闭包为闭区间 $[-1,1]$.

例 8 证明:

(1) $\mathbf{R}$ 中任意开区间是开集;

(2) $\mathbf{R}^n$ 中点 x 的任意邻域 $N(x,\delta)$ 是开集.

证 (1) 设 (a,b) 是 $\mathbf{R}$ 中任一开区间, 任取 $x\in(a,b)$, 则 $a<x<b$. 取 $\varepsilon_x=\min\{x-a,b-x\}$, 则有

$$N(x,\varepsilon_x)=(x-\varepsilon_x,x+\varepsilon_x)\subset(a,b).$$

所以 x 是 (a,b) 内点, 由 x 任意性知命题成立.

(2) 只需证明对任意 $y\in N(x,\delta)$, 存在 $N(y,\varepsilon)$, 使得 $N(y,\varepsilon)\subset N(x,\delta)$.

设 $y\in\mathbf{R}^n, N(x,\delta)=\{z:\rho(x,z)<\delta\}$. 若 $y\in N(x,\delta)$, 则 $\rho(x,y)<\delta$, 于是 $\varepsilon=\delta-\rho(x,y)>0$. 设有 $t\in N(y,\varepsilon)$, 则 $\rho(y,t)<\varepsilon=\delta-\rho(x,y)$. 于是 $\rho(x,t)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,t)<\delta$. 即 $t\in N(x,\delta)$, 故 $N(y,\varepsilon)\subset N(x,\delta)$, 从而 y 是 $N(x,\delta)$ 的内点. 由 y 的任意性知,$N(x,\delta)$ 是开集.

例 9 在 $\mathbf{R}^2$ 中作点集

$$E_1=\{x=(\xi,\eta):-\infty<\xi<\infty,\eta=0\}$$

与

$$E_2 = \{y = (\xi, \eta) : \xi \cdot \eta = 1\},$$

则

$$d(E_1, E_2) = 0.$$

证 事实上, 当我们取 $x = (\xi, 0) \in E_1$ 且 $y = (\xi, \eta) \in E_2$ 时, 由

$$d(E_1, E_2) \leqslant d(x, y) = |\eta| = \frac{1}{|\xi|}$$

可知, 对任给 $\varepsilon > 0$, 只需 $|\xi|$ 充分大, 就有 $d(E_1, E_2) < \varepsilon$. 由此得

$$d(E_1, E_2) = 0.$$

显然, 若 $x \in E$, 则 $d(x, E) = 0$. 但反之, 若 $d(x, E) = 0$, 则 x 不一定属于 E. 不过在 $x \notin E$ 时, 必有 $x \in E'$.

例 10 (1) 设 B 是一个集, A 是 B 上的实函数全体, 当 $a, b \in A$, 而且对每个 $t \in T$ 有 $a(t) \leqslant b(t)$, 那么 A 按此顺序也成为半序集.

(2) 设 A 是所有实数对 (x, y) 全体, 规定两对

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

当 $x_1 \leqslant x_2$ 时为

$$(x_1, y_1) \prec (x_1, y_1),$$

并规定当 $x_1 = x_2$ 而 $y_1 \leqslant y_2$ 时为

$$(x_1, y_1) \prec (x_1, y_1).$$

这是 A 中的一个顺序关系, 称为字典顺序.

四、习题精解

1. 证明下列关系 ((1)~(4)):

(1) $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$.

(2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

(3) $A - (B - C) \subset (A - B) \cup C$.

(4) $(A - B) - (C - D) \subset (A - C) \cup (D - B)$.

(5) $(A - B) \cup C = A - (B - C)$ 成立的充要条件是什么?

(6)* $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$ 是否成立?(* 表示选自研究生试题,

后同.)

证 (1) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap\mathscr{C}B)\cap(C\cap\mathscr{C}D)$

$$=(A\cap C)\cap(\mathscr{C}B\cap\mathscr{C}D)$$
$$=(A\cap C)\cap\mathscr{C}(B\cup D)$$
$$=(A\cap C)-(B\cup D).$$

(2) $x\in(A\cap B)\cup C\Longleftrightarrow x\in A\cap B$或$x\in C$

$\Longleftrightarrow x\in A$且$x\in B$,或$x\in C$

$\Longleftrightarrow x\in A\cup C$且$x\in B\cup C$

$\Longleftrightarrow x\in(A\cup C)\cap(B\cup C).$

(3) $A-(B-C)=A\cap\mathscr{C}(B\cap\mathscr{C}C)$

$$=A\cap(\mathscr{C}B\cup C)=(A\cap\mathscr{C}B)\cup(A\cap C)$$
$$\subset(A\cap\mathscr{C}B)\cup C=(A-B)\cup C.$$

(4) $(A-B)-(C-D)=(A\cap\mathscr{C}B)\cap\mathscr{C}(C\cap\mathscr{C}D)$

$$=(A\cap\mathscr{C}B)\cap(\mathscr{C}C\cup D)$$
$$=(A\cap\mathscr{C}B\cap\mathscr{C}C)\cup(A\cap\mathscr{C}B\cap D)$$
$$\subset(A\cap\mathscr{C}C)\cup(\mathscr{C}B\cap D)$$
$$=(A-C)\cup(D-B).$$

(5) 由 (3) 知, 等式右边 $=(A-B)\cup(A\cap C)$, 左边 $=(A-B)\cup C$, 可见 $A\cap C=C$, 即 $C\subset A$ 是等式成立的充分条件.

下证 $C\subset A$ 也是等式成立的必要条件.

用反证法, 假设 $C\subset A$ 不成立, 则有 $x\in C$ 且 $x\notin A$, 从而 $x\notin A-B$, 且 $x\notin A\cap C$, 于是, $x\notin(A-B)\cup(A\cap C)$. 而 $x\in(A-B)\cup C$, 故等式不成立.

(6) 不成立. 令 $A=B=C=\{1\}$ 时,$A\cup(B-C)=\{1\}\neq\varnothing=(A\cup B)-C$.

2. 设给出集 E 与任意一组集 $A_a, a\in I$, 问关系式

$$E\cup\left(\bigcap_{a\in I}A_a\right)=\bigcap_{a\in I}(E\cup A_a).$$

是否恒成立?