普通高等教育"十一五"规划教材

有限元法及 ANSYS程序应用基础

张　力　主编
孟春玲　张　扬　编著

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材

有限元法及ANSYS程序应用基础

张　力　主编

孟春玲　张　扬　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书内容分为两大部分:有限元法基础和 ANSYS 程序应用基础。有限元法基础的内容有绪论、有限元法的直接刚度法(直梁和平面刚架)、弹性力学基础知识、平面问题的有限元法(三角形单元和矩形单元)、等参数单元;ANSYS 程序应用基础的内容有 ANSYS 程序应用。本书内容由浅入深,主次分明,通俗易懂,便于自学。

本书可作为高等院校工科专业本科生和研究生教材,也可供有关专业工程技术人员参考和使用。

图书在版编目(CIP)数据

有限元法及 ANSYS 程序应用基础/张力主编. —北京:科学出版社,2008
普通高等教育"十一五"规划教材
ISBN 978-7-03-022735-5

Ⅰ. 有… Ⅱ. 张… Ⅲ. 有限元分析-应用程序,ANSYS Ⅳ. O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 120800 号

责任编辑:孙明星 / 责任校对:朱光光
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 10 月第 一 版 开本:B5(720 × 1000)
2008 年 10 月第一次印刷 印张:10 1/4 插页 3
印数:1—3 500 字数:201 000

定价:25.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈双青〉)

前　　言

目前，在高等学校中，有限元法已成为机械工程、土木建筑和车辆工程等专业的必修课或选修课，也是广大工程技术人员从事产品开发、设计和生产服务的重要工具。经过多年的努力，有限元法和相关应用软件在理论和工程应用方面取得了显著成绩，解决了许多工程问题，为经济建设作出了贡献。

为适应高校教改的趋势，根据全面更新的有限元课程教学内容和课程体系，适应高校加强基础、淡化专业、分流培养的教学方针，我们有针对性地编写适用于30～40学时的《有限元法及ANSYS程序应用基础》教材，本教材为高校少学时有限元法课程的教学提供新的选择。

在本书编写时，我们对内容进行了精心挑选，注重课程内容的完整性和严密性，力求做到主次分明、详略恰当、难易适中、侧重基础，同时也结合新的工程应用实例，注重培养学生弹性力学的基础知识和用有限元法的基本思想及理论解决工程实际问题的能力。ANSYS程序应用基础的部分阐述了ANSYS程序和计算例题，计算机实践教学部分旨在培养学生理论联系实际和解决实际问题的能力。各章后附有习题，希望能对读者深入学习、研究有限元法和应用ANSYS程序有所帮助。

本书可作为高等院校工科专业本科生和研究生教材，也可供工程技术和研究人员参考。

由于时间仓促，书中难免存在不当之处，请读者不吝赐教。

编　者

2008年7月于北京

目　录

第1章 绪 论

1.1 有限元法的定义

有限元法是近似求解一般连续场问题的数值方法。它先应用于机械、建筑结构的位移场和应力场分析，后很快广泛应用于求解电磁学中的电磁场、传热学中的温度场、流体力学中的流体场等连续场问题。

例如，弹性体受力后内部各个点的应力分布规律，物体受热后内部各个点温度的变化规律等，都可以用数学物理方程来描述，有限元法可以求这些数学物理方程的近似数值解。弹性力学中的平衡方程及应力边界条件就是描述应力分布规律的数学物理方程，用有限元法可以求得我们所需要的物理量，如应力、位移、温度等。由于这些数学物理方程往往以偏微分方程出现，能用解析方法求出精确解的只是少数方程性质比较简单且几何形状相当规则的问题。对于大多数工程技术问题，由于复杂边界条件、复杂物体形状、非线性等，求其精确的函数解一般都很困难，即使近似的函数解也不易求得。

对于这类问题，通常有两种解决方法：一种是简化假设，将方程和几何边界简化为能够处理的问题，获得问题在简化条件下的解析解，但过多的简化可能导致结果的不精确甚至错误；另一种是借助计算机技术的发展，采用数值计算方法求解复杂工程问题，获得问题的近似解。

目前，在工程技术领域，数值分析方法主要有有限元法、边界元法和有限差分法等，其中有限元法已成为当今工程问题中应用最广泛的数值计算方法。与电子计算机结合的有限元法，用分段函数代替整体函数，以适应各种复杂的边界条件，从而使许多过去不能求得的数学物理方程均能得到满意的近似数值解。有限元法解决了工程实践中用解析法难以或者无法解决的复杂工程问题，并得到了满意的结果。

1.2 有限元法的发展与现状

有限元法的基本思想早在20世纪40年代初期就有人提出，但当时没有引起人们的注意和重视。到了50年代，由于工程上的需要，特别是高速电子计算机的出现与应用，有限元法才在结构分析矩阵方法的基础上迅速发展起来，并得到越来

越广泛的应用。“有限元法”这一名称由美国的克拉夫(R. W. Clough)于 1960 年首先提出。

有限元法自从 20 世纪 60 年代开始应用至今，它的应用范围已从杆、梁类结构扩展到弹性力学平面问题、空间问题、板壳问题；由静力平衡问题扩展到动力问题、波动问题和稳定问题。分析的对象从弹性材料扩展到黏弹性、塑性、黏塑性及复合材料等；从固体力学扩展到流体力学、传热学及连续介质力学各领域。

有限元法经过 50 多年的发展，理论已经相当完善，应用也越来越广泛。科技人员将有限元理论、数值计算技术和计算机辅助设计技术等相结合，有了非常大的发展，开发出一批通用的有限元软件。目前，国际上较大型的面向工程的有限元通用软件已达几百种，其中最著名的有 ANSYS、SAP、ADINA、ALGOR、NASTRAN、ABAQUS、COSMOS 和 MARC 等。这些软件功能强大，使用方便，结果可靠，解决了涉及机械、土木、冶金、气象、宇航等行业的工程问题，其计算结果已经成为各类工业产品设计和性能分析的重要依据。

有限元法所具有的特点表现在以下四个方面。

(1) 物理概念清晰。可以在不同的理论层面建立有限元法的理解，既可以通过非常直观的物理解释来理解，也可以建立严格的数学理论分析。

(2) 复杂结构的适应性。在固体力学及其他连续体力学中，只有一些特殊类型的位移场和应力场才能求得微分方程式的解。对于多数复杂的实际结构得不到解，而有限元法对于完成这些复杂结构的分析是一种十分有效的方法。有限元法利用离散化将无限自由度的连续体力学问题变为有限单元节点参数的计算，虽然它的解是近似的，但适当选择单元的形状与大小，可使近似解达到满意的程度。

(3) 各种物理问题的适用性。有限元法不仅能处理线弹性力学、非均质材料、各向异性材料、非线性应力-应变关系、大变形、动力学和屈曲问题等，还能解决热传导、流体力学、电磁场等问题以及不同物理现象的耦合问题，应用范围极为广泛。

(4) 适合计算机实现的高效性。有限元法引入边界条件的办法简单，边界条件不需要引进单个有限元的方程，而是求得整个集合体的代数方程后再引进，所以对内部和边界上的单元都能采用相同的场变量函数，而且当边界条件改变时，场变量函数不需要改变，极大地简化了编制通用化程序。另外，有限元法通常采用矩阵表达式，便于编程计算。计算机不仅可以快速求解问题，而且使求解问题的方法规范化、软件商业化，为有限元的发展、应用奠定了坚实的基础。

有限元法是综合现代数学、力学理论、计算方法、计算机技术等学科的最新知识发展起来的一种新兴技术。有限元法在工程分析中的作用已从分析、校核扩展到优化设计并和计算机辅助设计技术相结合。可以预见，随着现代力学、计算数学和计算机技术等学科的发展，有限元法作为一个具有巩固理论基础和广泛应用领

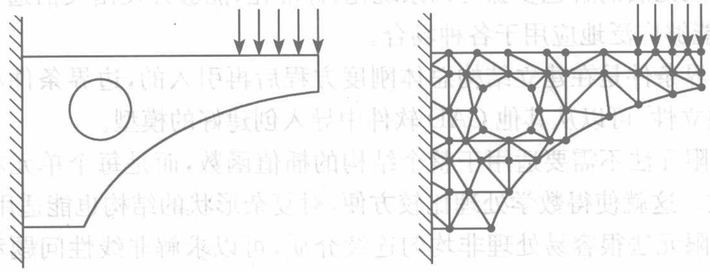
域的数值分析工具，必将得到进一步的发展和完善，在国民经济建设和科学技术中发挥更大的作用。

1.3 有限元法的一般描述

1.3.1 有限元法的基本思想

有限元法的基本思想可归纳如下：首先，将表示结构的连续体离散为若干个子域(单元)，单元之间通过其边界上的节点连接成组合体。其次，用每个单元内所假设的近似函数分片地表示全求解域内待求的未知场变量。每个单元内的近似函数用未知场变量函数在单元各个节点上的数值和与其对应的插值函数表示。由于在连接相邻单元的节点上，场变量函数应具有相同的数值，因而将它们用作数值求解的基本未知量，将求解原函数的无穷多自由度问题转换为求解场变量函数节点值的有限自由度问题。最后，通过和原问题数学模型(基本方程、边界条件)等效的变分原理或加权余量法，建立求解基本未知量(场变量函数的节点值)的代数方程组或常微分方程组，应用数值方法求解，从而得到问题的解答。

例如，图 1.1(a)的结构可以用三角形单元来离散，如图 1.1(b)所示。



(a) (b)

图 1.1 将连续体划分为有限单元

1.3.2 有限元法的基本步骤

从选择未知量的角度来看，有限元法可分为三类，即位移法、力法和混合法。以节点位移为基本未知量的求解方法称为位移法；以节点力为基本未知量的求解方法称为力法；一部分以节点位移，另一部分以节点力作为基本未知量的求解方法称为混合法。本书采用应用范围最广的位移法。用位移法求解问题的步骤如下：

(1) 结构的离散化。将连续的求解域离散化，得到有限个单元，单元彼此之间

仅靠节点连接。

(2) 单元分析。①选择位移模式，位移函数是单元上点的位移对点的坐标的函数，一般用单元内部点的坐标的多项式来表示，它只是近似地表示了单元内真实位移分布。位移函数的阶次越高，计算精度越高。②应用弹性力学中的几何方程和物理方程建立力和位移的方程式，计算单元刚度矩阵。③计算等效节点力，把作用在单元边界上的表面力、体积力或集中力等效地移到节点上去，也就是用等效的节点力来代替所有作用在单元上的力。

(3) 单元集成。把建立的单元刚度方程集成起来，形成结构整体刚度方程，称为有限元位移法基本方程。

(4) 引入约束条件，求解线性方程组，得出节点位移。

(5) 由节点位移计算单元的应力与应变。

1.3.3 有限元法的优缺点

1. 有限元法的优点

(1) 因为单元能按各种不同的连接方式组合在一起，且单元本身又可以有不同的形状，所以，有限元法可以模拟各种几何形状复杂的结构，得出其近似解。

(2) 有限元法的解题步骤可以系统化、标准化，能够开发出灵活通用的计算机程序，使其能够广泛地应用于各种场合。

(3) 边界条件是在建立结构总体刚度方程后再引入的，边界条件和结构模型具有相对独立性，可以从其他 CAD 软件中导入创建好的模型。

(4) 有限元法不需要适用于整个结构的插值函数，而是每个单元本身有各自的插值函数。这就使得数学处理比较方便，对复杂形状的结构也能适用。

(5) 有限元法很容易处理非均匀连续介质，可以求解非线性问题和进行耦合场分析。

(6) 有限元法可以与优化设计方法相结合，以便发挥各自的优点。

2. 有限元法的缺点

(1) 有限单元计算，尤其是复杂问题的分析计算，所耗费的计算时间、内存和磁盘空间等计算资源是相当惊人的。

(2) 对无限求解域问题没有较好的处理方法。

(3) 尽管现有的有限元软件多数使用了网络自适应技术，但在具体应用时，采用什么类型的单元、多大的网络密度等都要完全依赖使用者的经验。在实际应用中，经常采用网格密度加大一倍的办法，然后比较两次分析的结果来考察分析的精度，这势必进一步增大了计算资源的耗费量。

1.4　有限元法在机械工程中的应用

由于有限元法使用方便、计算精度高，其计算结果已成为机械零部件产品设计和性能分析的可靠依据，极大地缩短了产品设计周期，减少了研制费用，降低了产品成本。因此，有限元法在机械工程领域得到了广泛的应用。

(1) 静力学分析。分析机械结构承受静载荷作用下的应力、应变和变形情况。

(2) 模态分析。分析结构的固有频率和振型。

(3) 动力学分析。包括谐响应分析和瞬态动力学分析，用于分析结构在随时间呈正弦规律或任意规律变化的载荷作用下的响应。

(4) 热应力分析。分析结构因温度分布不均而产生的热应力。

(5) 其他分析。例如，接触分析、压杆稳定性分析、结构-流体耦合分析等。

习　　题

1.1　有限元法的基本思想和基本步骤是什么？

1.2　有限元法有哪些优点和缺点？

1.3　有限元法在机械工程中有哪些具体的应用？

第 2 章　有限元法的直接刚度法

本章以直梁、平面刚架为例，采用直接刚度法介绍有限元法的基本原理。

2.1　直梁的有限元分析

有限元法的特点是连续体的离散化，按照一定的原则，把连续体分为若干个单元，单元和单元之间用节点相连。

结构在受力变形过程中节点位置的改变，称为节点位移。节点位移分为线位移和角位移，不同类型的单元有不同的节点位移。

作用在节点上的外载荷，称为节点载荷。节点载荷包括直接作用在节点上的外载荷和等效移置到节点上的载荷。

单元和节点之间的作用力，称为单元节点力。

下面以直梁为例来说明有限元法的直接刚度法。

如图 2.1(a)所示直梁，已知 E、I、Z、M，$AB=BC=CD=l$，$I_{AC}=2I$，$I_{CD}=I$。

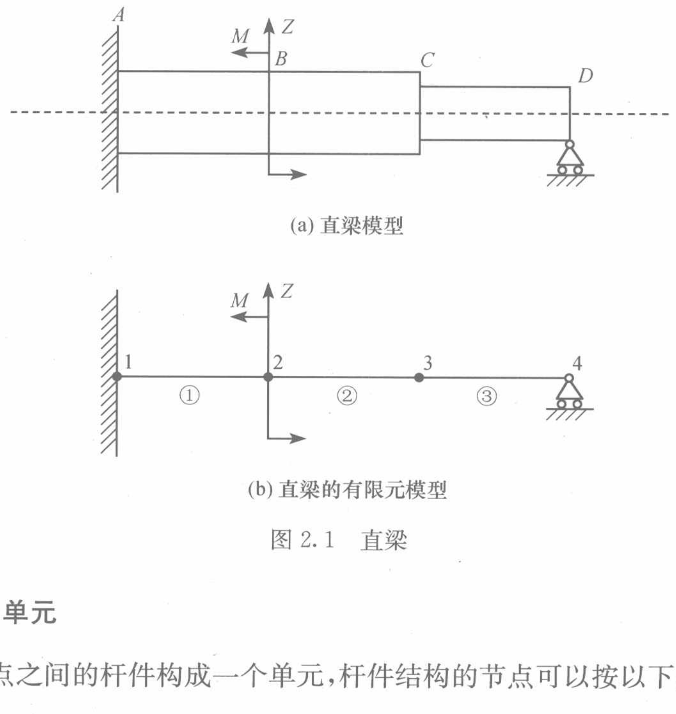


图 2.1　直梁

2.1.1　划分单元

两个节点之间的杆件构成一个单元，杆件结构的节点可以按以下原则选取：

(1) 杆件的交点一定要取为节点。

(2) 阶梯形杆截面变化处一定要取为节点。

(3) 支撑点和自由端要取为节点。

(4) 集中载荷作用处要取为节点。

(5) 欲求位移的点要取为节点。

(6) 单元长度不要相差太多。

按照杆件结构划分单元的原则,对如图 2.1(a)所示结构划分的单元如图 2.1(b)所示。

2.1.2　以节点位移表示单元节点力

任取一单元进行分析。根据材料力学的知识,梁单元上每个节点的节点位移分量有 2 个:挠度 f 和转角 θ。一般规定,f 向上为正,θ 逆时针方向为正。写成列阵形式见式(2-1),表示 i 节点的节点位移。

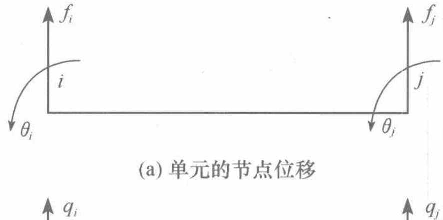
$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} f_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} = [f_i \quad \theta_i]^{\mathrm{T}} \tag{2-1}$$

图 2.2(a)所示梁单元有 i、j 2 个节点,共有 f_i、θ_i、f_j、θ_j 4 个节点位移分量,可用一个列阵表示,式(2-2)称为单元的节点位移列阵。

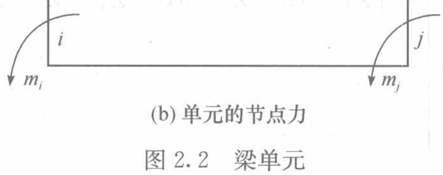
$$\{\delta\}^e = [f_i \quad \theta_i \quad f_j \quad \theta_j]^{\mathrm{T}} \tag{2-2}$$

根据材料力学的知识,梁在外力作用下,横截面上的内力有剪力 Q 和弯矩 M 2 个。所以,梁单元上每个节点的节点力有 2 个,用 q、m 来表示。规定:q 向上为正,m 逆时针方向为正。写成列阵形式见式(2-3),表示 i 节点的节点力。

$$\{p_i\} = \begin{Bmatrix} q_i \\ m_i \end{Bmatrix} \tag{2-3}$$



(a) 单元的节点位移



(b) 单元的节点力

图 2.2　梁单元

图 2.2(b)所示梁单元共有 4 个节点力分量：q_i、m_i、q_j、m_j，可用一个列阵表示，式(2-4)称为单元的节点力列阵。

$$\{p\}^e = [q_i \quad m_i \quad q_j \quad m_j]^{\mathrm{T}} \tag{2-4}$$

梁单元上每个节点的节点载荷有 2 个：横向力 Z 和力偶 M。一般规定，Z 向上为正，M 逆时针方向为正。写成列阵形式见式(2-5)，表示 i 节点的节点载荷。

$$\{Q_i\} = \begin{Bmatrix} Z_i \\ M_i \end{Bmatrix} = [Z_i \quad M_i]^{\mathrm{T}} \tag{2-5}$$

梁单元共有 4 个节点载荷分量：Z_i、M_i、Z_j、M_j，可用一个列阵表示，式(2-6)称为单元的节点载荷列阵。

$$\{Q\}^e = [Z_i \quad M_i \quad Z_j \quad M_j]^{\mathrm{T}} \tag{2-6}$$

节点力和节点载荷的区别：节点力是单元和节点之间的作用力，如果取整个结构为研究对象，节点力是内力；而节点载荷是结构在节点上所受到的外载荷或等效移置到节点上的外载荷。

梁单元的每个节点有 2 个节点位移分量(挠度 f 和转角 θ)，我们称每个节点有 2 个自由度。图 2.1 所示的梁结构共有 4 个节点，8 个位移分量，我们称整个梁结构有 8 个自由度。图 2.1 所示梁上全部节点的节点位移分量用一个列阵表示见式(2-7)，称为结构的节点位移列阵，全部节点的节点载荷分量用一个列阵表示见式(2-8)，称为结构的节点载荷列阵。

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \theta_1 \\ f_2 \\ \theta_2 \\ f_3 \\ \theta_3 \\ f_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = [f_1 \quad \theta_1 \quad f_2 \quad \theta_2 \quad f_3 \quad \theta_3 \quad f_4 \quad \theta_4]^{\mathrm{T}} \tag{2-7}$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ M_1 \\ Z_2 \\ M_2 \\ Z_3 \\ M_3 \\ Z_4 \\ M_4 \end{Bmatrix} = [Z_1 \quad M_1 \quad Z_2 \quad M_2 \quad Z_3 \quad M_3 \quad Z_4 \quad M_4]^{\mathrm{T}} \tag{2-8}$$

根据材料力学的知识可知，在弹性范围和小变形的前提下，节点力和节点位移之间是线性关系。所以，单元的节点力和节点位移的关系可以表示为

$$\begin{cases} q_i = a_{11}f_i + a_{12}\theta_i + a_{13}f_j + a_{14}\theta_j \\ m_i = a_{21}f_i + a_{22}\theta_i + a_{23}f_j + a_{24}\theta_j \\ q_j = a_{31}f_i + a_{32}\theta_i + a_{33}f_j + a_{34}\theta_j \\ m_j = a_{41}f_i + a_{42}\theta_i + a_{43}f_j + a_{44}\theta_j \end{cases} \tag{2-9}$$

写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} q_i \\ m_i \\ q_j \\ m_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_i \\ \theta_i \\ f_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \tag{2-10}$$

简写为

$$\{p\}^e = [K]^e\{\delta\}^e \tag{2-11}$$

式中：$\{p\}^e$——单元节点力列阵；

$\{\delta\}^e$——单元节点位移列阵；

$[K]^e$——单元刚度矩阵。

单元刚度矩阵是描述单元节点力和节点位移之间关系的矩阵。

单元刚度矩阵$[K]^e$ 中各元素的物理意义如下：

在 j 点固定，令 i 点有如图 2.3(a)所示的位移，即有 $f_i=1, \theta_i=0, f_j=0, \theta_j=0$。代入式(2-10)中，得

$$\begin{Bmatrix} q_i \\ m_i \\ q_j \\ m_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{Bmatrix} \tag{2-12}$$

由式(2-12)可知，单元刚度矩阵$[K]^e$ 中第一列元素的物理意义是为了使梁单元产生如图 2.3(a)所示的位移，作用在单元节点上的节点力；a_{11} 的物理意义是单元第 1 个节点位移分量等于 1，其他节点位移分量等于 0 时，对应的第 1 个节点力分量；a_{21} 的物理意义是单元第 1 个节点位移分量等于 1，其他节点位移分量等于 0 时，对应的第 2 个节点力分量；a_{31} 的物理意义是单元第 1 个节点位移分量等于 1，其他节点位移分量等于 0 时，对应的第 3 个节点力分量；a_{41} 的物理意义是单元第 1 个节点位移分量等于 1，其他节点位移分量等于 0 时，对应的第 4 个节点力分量。

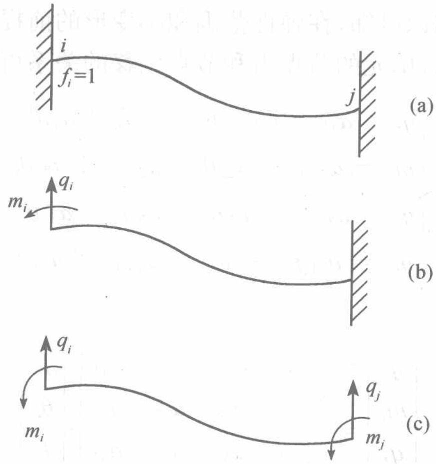


图 2.3　单元刚度矩阵第一列元素的意义

单元刚度矩阵$[K]^e$ 中元素 a_{ml} 的物理意义为单元第 l 个节点位移分量等于 1，其他节点位移分量等于 0 时，对应的第 m 个节点力分量。

求单元刚度矩阵$[K]^e$ 的第一列元素，由叠加原理，可得

$$\begin{cases} f_i = f'_i + f''_i = 1 \\ \theta_i = \theta'_i + \theta''_i = 0 \end{cases} \tag{2-13}$$

式中：f'_i、θ'_i——图 2.3(b)所示 q_i 单独作用所产生的位移；

f''_i、θ''_i——图 2.3(b)所示 m_i 单独作用所产生的位移。

$$f'_i = \frac{q_i l^3}{3EI}，\quad \theta'_i = \frac{q_i l^2}{2EI}，\quad f''_i = -\frac{m_i l^2}{2EI}，\quad \theta''_i = \frac{m_i l}{EI} \tag{2-14}$$

$$\begin{cases} \dfrac{q_i l^3}{3EI} - \dfrac{m_i l^2}{2EI} = 1 \\ \dfrac{q_i l^2}{2EI} + \dfrac{m_i l}{EI} = 0 \end{cases} \tag{2-15}$$

解方程(2-15)，得

$$\begin{cases} q_i = \dfrac{12EI}{l^3} = a_{11} \\ m_i = \dfrac{6EI}{l^2} = a_{21} \end{cases} \tag{2-16}$$

对梁单元分析受力，如图 2.3(c)所示，列平衡方程

$$\begin{cases} q_i + q_j = 0 \\ m_i + m_j - q_i l = 0 \end{cases} \tag{2-17}$$

解方程(2-17),得

$$\begin{cases} q_j = -q_i = -\dfrac{12EI}{l^3} = a_{31} \\ m_j = q_i l - m_i = \dfrac{6EI}{l^2} = a_{41} \end{cases} \tag{2-18}$$

单元刚度矩阵$[K]^e$ 中第二列元素的物理意义是:$f_i=0,\theta_i=1,f_j=0,\theta_j=0$时,作用在单元节点上的节点力,如图2.4所示。

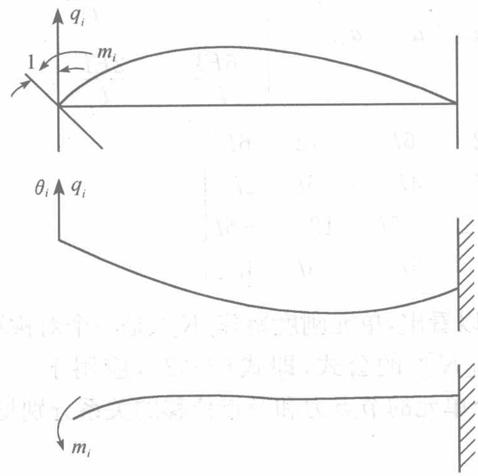


图2.4 单元刚度矩阵第二列元素的意义

求单元刚度矩阵$[K]^e$ 的第二列元素,由叠加原理,可得

$$\begin{cases} f_i = f'_i + f''_i = \dfrac{q_i l^3}{3EI} - \dfrac{m_i l^2}{2EI} = 0 \\ \theta_i = \theta'_i + \theta''_i = \dfrac{q_i l^2}{2EI} + \dfrac{m_i l}{EI} = 1 \end{cases} \tag{2-19}$$

解方程(2-19),得

$$\begin{cases} q_i = \dfrac{6EI}{l^2} = a_{12} \\ m_i = \dfrac{4EI}{l} = a_{22} \end{cases} \tag{2-20}$$

对梁单元分析受力,列平衡方程,解得

$$\begin{cases} q_j = -\dfrac{6EI}{l^2} = a_{32} \\ m_j = \dfrac{2EI}{l} = a_{42} \end{cases} \tag{2-21}$$