丛书主编◎樊希国 谢永红

自主学习·导与学

——"高中学生自主学习与主动发展"系列校本学生学习辅助用书

高中数学【必修5】

ZIZHUXUEXIDAOYUXUE

湖南科学技术出版社

目录

CONTENTS

第一章　解三角形

第二章　数　列

第三章　不等式

第一章　解三角形

单元学习计划与裁要

学习内容	任务安排	完成情况	存在问题

第 1 课时　正弦定理和余弦定理(一)

课前自学清单

教材扫描

1. 构成三角形的元素有①________.
2. 正弦定理：在一个三角形中，各②____和它所对角的③____的④____相等，即⑤________(其中 R 是△ABC 的外接圆的半径).

扫描指南

1. ①三个内角 A,B,C 和它们的对边 a,b,c；
2. ②边；③正弦；④比；⑤$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

自主探究

3. 在△ABC 中，$a=5,b=3,c=120°$，则 $\sin A:\sin B$ 的值是（　　）

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{7}$　　D. $\frac{5}{7}$

4. 在△ABC 中，已知 $a=8,B=60°,C=75°$，则 $b=$（　　）

A. $4\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{6}$　　D. $\frac{32}{3}$

5. 在△ABC，根据下列条件解三角形，则其中有两个解的是（　　）

A. $b=10,A=45°,C=75°$
B. $A=60°,b=48°,C=60°$
C. $a=7,b=5,A=80°$
D. $a=14,b=16,A=45°$

6. 在△ABC 中，已知 $a=5\sqrt{2},c=10,A=30°$，则 $B=$（　　）

A. 105°　　B. 60°　　C. 15°　　D. 105°或 15°

课堂合作清单

情境引入

台风过后，一棵树被吹倒与地面成 30°角，压到一电线杆上，电线杆被压成与地面成 60°角．已知电线杆的触地点与树干触地点相距 6 m，你能判断出树的高度吗?

【解答】 如图 1－1，$AB=6$，易求得 $\angle CAB=120°$，所以 $\angle ACB=30°$.

作 $AD\perp CB$ 于 D，则可求得 $AD=3$，

所以 $BD=AD\cdot\cot 30°=3\sqrt{3}$，所以 $BC=6\sqrt{3}\approx10.4$ m.

如用正弦定理可更快求解．

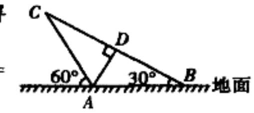


图 1－1

典例解析

题型一　正弦定理的简单应用

【例 1】 在△ABC 中，已知 $c=\sqrt{3},A=45°,B=60°$，求 b.

思维分析　要求 b 的值，由正弦定理知，已知边 c，需由 $A+B+C=180°$，求出 C，从而问题解决．

【解】 因为 $A+B+C=180°$，

所以 $C=75°$，$\sin C=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

由正弦定理，得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

所以 $b=\frac{c\cdot\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{3}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

【点拨】 注意在$\triangle ABC$中，$A+B+C=180^\circ$的运用.

【例 2】 已知$\triangle ABC$中，$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$B=45^\circ$，解这个三角形.

思维分析 已知a，b和B，先求出角A，注意A的取值情况，分析三角形解的个数.

【解】 由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得

$\sin A=\frac{a\cdot\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}\times\sin 45^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$a>b$，所以$\angle A>\angle B$，所以$A=60^\circ$或$A=120^\circ$.

当$A=60^\circ$时，$C=180^\circ-45^\circ-60^\circ=75^\circ$，

$c=\frac{b\cdot\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$；

当$A=120^\circ$时，$C=180^\circ-45^\circ-120^\circ=15^\circ$，

$c=\frac{b\cdot\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

综上可得$A=60^\circ$，$C=75^\circ$，$c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$或$A=120^\circ$，$C=15^\circ$，$c=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

【点拨】 在已知两边及一边的对角解三角形时，可运用正弦定理，关键是正确判断解的个数.

题型二 正弦定理的综合应用

【例 3】 在$\triangle ABC$中，若$a\cdot\cos A=b\cdot\cos B$，试判断$\triangle ABC$的形状.

思维分析 题设条件中既含有边又含有角，因此常见方法是将边都化成角或将角都化成边，本题可用正弦定理将边化成角的形式，然后再判断三角形的形状.

【解】 由$a=2R\cdot\sin A$，$b=2R\cdot\sin B$，$c=2R\cdot\sin C$，

代入$a\cdot\cos A=b\cdot\cos B$中得

$2R\sin A\cdot\cos A=2R\sin B\cdot\cos B$，

所以$\sin 2A=\sin 2B$.

因为A，B为三角形内角，

所以$2A=2B$或$2A=\pi-2B$. 所以$A=B$或$A+B=\frac{\pi}{2}$.

所以$\triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形.

【点拨】 正弦定理常与三角函数知识联系在一起，利用正弦定理可以边角互化，在判断三角形的形状时，采用边化角运算简单.

探究心得

1. 正弦定理可以解决：①已知三角形两角与任一边，求其它两边和一角；②已知两角和其中一角的对边，求另一角的对边，进而求出其他的角和边.

2. 正弦定理经常和三角形面积公式$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$及三角形外接圆半径$R$公式$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$结合使用.

3. 已知三角形两边及其中一边的对角，解三角形时，要注意解的个数的判断.

课后测控清单

共同基础

1. 在$\triangle ABC$中，$a=8$，$B=60^\circ$，$C=75^\circ$，则b的值为 ( )

A. $4\sqrt{2}$　B. $4\sqrt{3}$　C. $4\sqrt{6}$　D. $\frac{32}{3}$

2. 在$\triangle ABC$中，若$a=2b\cdot\sin A$，则B等于 ( )

A. 30°或60°　B. 45°或60°
C. 60°或120°　D. 30°或150°

3. 在$\triangle ABC$中，$a=5$，$b=3$，$C=120^\circ$，则$\sin A:\sin B$的值是 ( )

A. $\frac{5}{3}$　B. $\frac{3}{5}$　C. $\frac{3}{7}$　D. $\frac{5}{7}$

4. 在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{3}$，$A=45^\circ$，$C=75^\circ$，则$BC=$ ( )

A. $3-\sqrt{3}$　B. $\sqrt{2}$　C. 2　D. $3+\sqrt{3}$

能力训练

5. 不解三角形，确定下列判断中正确的是 ( )

A. $a=4$，$b=5$，$A=30^\circ$有一解
B. $a=5$，$b=4$，$A=60^\circ$有两解
C. $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$B=120^\circ$有一解
D. $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{6}$，$A=60^\circ$无解

6. 在$\triangle ABC$中，若$\frac{a}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{b}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{C}{2}}$，则$\triangle ABC$的形状是 ( )

A. 等腰三角形　B. 等边三角形
C. 直角三角形　D. 等腰直角三角形

7. 在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，若$a=1$，$c=\sqrt{3}$，$C=\frac{\pi}{3}$，则$A=$________.

8. 在$\triangle ABC$中，$a=6$，$B=30^\circ$，$C=120^\circ$，则$\triangle ABC$的面积是________.

9. 在$\triangle ABC$中，$\tan A=\frac{1}{3}$，$C=150^\circ$，$BC=1$，则$AB=$________.

10. 在$\triangle ABC$中，$A>B$，下列不等式：①$\sin A>\sin B$；②$\cos A<\cos B$；③$\sin 2A>\sin 2B$；④$\cos 2A<\cos 2B$. 正确的有 ( )

A. 1个　B. 2个　C. 3个　D. 4个

创新拓展

11. 在$\triangle ABC$中，若$\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{2c-b}{b}$，$\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，求$A$，$B$，$C$.

第 2 课时　正弦定理和余弦定理(二)

课前自学清单

教材扫描

1. 余弦定理

(1)语言叙述

三角形任意一边的平方等于①____________减去②____________的积的③________.

(2)公式表达

$a^2=$④____________;

$b^2=$⑤____________;

$c^2=$⑥____________.

(3)推论

$\cos A=$⑦____________;

$\cos B=$⑧____________;

$\cos C=$⑨____________.

2. 余弦定理及其推论的应用

应用余弦定理及其推论可解决两类解三角形的问题,一类是已知⑩__________解三角形,另一类是已知⑪________解三角形.

扫描指南

1. ①其余两边的平方和;②这两边与它们夹角的余弦;③两倍;④$b^2+c^2-2bc\cos A$;

⑤$c^2+a^2-2ac\cos B$;⑥$a^2+b^2-2ab\cos c$;

⑦$\frac{b^2+c^2-b^2}{2ac}$;⑧$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$;

2. ⑨$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$;⑩两边及夹角;⑪三边.

自主探究

3. 在$\triangle ABC$中,已知$b=1,c=3,A=60°$,则$a=$______.

4. 三角形三边之比为3∶5∶7,则其最大角是　(　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

5. 在$\triangle ABC$中,已知$a^2>b^2+c^2+bc$,则角A为(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

6. $\triangle ABC$中,$a∶b∶c=1∶\sqrt{3}∶2$,则$A∶B∶C=$
(　　)

A. 1∶2∶3　　B. 2∶3∶1

C. 1∶3∶2　　D. 3∶1∶2

课堂合作清单

情境引入

甲、乙、丙三位同学的家之间的边线呈三角形,乙、丙两家之间有湖水相隔,现测得甲乙、甲丙之间的连线分别是2 km,4 km,两线间的夹角为60°,你能确定乙、丙两家之间的直线距离是多少吗?

【解答】 由余弦定理易求得乙、丙两家的直线距离为$2\sqrt{3}$ km.

典例解析

【例 1】 在$\triangle ABC$中,已知$a=7,b=3,c=5$,求最大角和$\sin C$.

思维分析　因为$a>c>b$,所以a的对角A为最大角,由余弦定理求出后再用正弦定理求$\sin C$.

【解】 因为$a>c>b$,

所以$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2}$.

又因为$0°<A<180°$,所以$\angle A=120°$.

所以$\sin A=\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,得

$\sin C=\frac{c\cdot\sin A}{a}=\frac{5\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

所以最大角A为120°,$\sin C=\frac{5}{14}\sqrt{3}$.

【点拨】 也可求出c的对角C的余弦值,用三角函数知识求$\sin C$.

题型二　余弦定理的综合应用

【例 2】 在$\triangle ABC$中,若$\sin A∶\sin B∶\sin C=2∶3∶4$,判断$\triangle ABC$的形状.

思维分析　由$\sin A∶\sin B∶\sin C=a∶b∶c$,知$a∶b∶c=2∶3∶4$,然后设出三边的长度,则可以借助余弦定理求角,判断三角形的形状.

【解】 因为$a∶b∶c=\sin A∶\sin B∶\sin C=2∶3∶4$,

故可设$a=2k,b=3k,c=4k(k>0)$,

根据$4k>3k>2k$,所以C是三角形中的最大角,

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4k^2+9k^2-16k^2}{2\times2k\times3k}=-\frac{1}{4}$,

又$0°<C<180°$,所以$\angle C$为钝角.

故$\triangle ABC$为钝角三角形.

【点拨】 根据已知条件设出三边的长是解题的关键,同时要求出最大角的余弦值.

【例 3】 在四边形$ABCD$中,$BC=a,DC=2a$,四个角

A,B,C,D 的度数的比为 $3:7:4:10$，求 AB 的长.

思维分析 如图 1-2，要求 AB 的长，需把 AB 放到三角形中处理，为此连结 BD，由题设可求出角 A、B、C、D 的值，在△BCD 中，由余弦定理可求出 BD，进而解△ABD，求 AB.

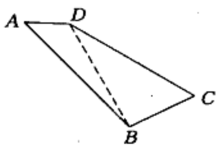


图 1-2

【解】 设四个角 A,B,C,D 的度数分别为 $3x,7x,4x,10x(x>0)$，

则由四边形的内角和定理，有

$3x+7x+4x+10x=360°$，解得 $x=15°$.

所以 $A=45°$，$\angle ABC=105°$，$C=60°$，$\angle ADC=150°$.

连接 BD，在△BCD 中，由余弦定理得

$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos C$$
$$=a^2+4a^2-2a\cdot 2a\cdot\frac{1}{2}=3a^2,$$

所以 $BD=\sqrt{3}a$，此时 $BC^2+BD^2=CD^2$，

所以△CBD 为直角三角形，从而有 $\angle CBD=90°$.

在△ABD 中，$A=45°$，$\angle ADB=120°$，

由正弦定理知 $\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin A}$，

$$AB=\frac{BD\cdot\sin\angle ADB}{\sin A}=\frac{3}{2}\sqrt{2}a,$$

所以 AB 的长度为 $\frac{3}{2}\sqrt{2}a$.

【点拨】 求四边形中的边长，需构造三角形，通过解三角形解决.

探究心得

1. 利用余弦定理解三角形时，注意结合图形选取恰当公式.

2. 利用余弦定理求三角形内角时，一般先求小角，后求大角.

3. 注意正弦定理、余弦定理、余弦定理的公式变形以及三角公式的结合使用.

课后测控清单

共同基础

1. 在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，则△$ABC$ 的形状为 （ ）

A. 锐角三角形 B. 直角三角形

C. 钝角三角形 D. 锐角或直角三角形

2. a,b,c 是△ABC 的三边，$B=60°$，那么 $a^2-ac+c^2-b^2$ 的值是 （ ）

A. 大于 0 B. 小于 0

C. 等于 0 D. 不确定

3. 三角形三边之比为 $3:5:7$，则其最大角是 （ ）

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{2}{3}\pi$ C. $\frac{3}{4}\pi$ D. $\frac{5}{6}\pi$

4. 在不等边三角形 ABC 中，a 是最大的边，若 $a^2<b^2+c^2$，则 $\angle A$ 的取值范围是 （ ）

A. $(90°,180°)$ B. $(45°,90°)$

C. $(60°,90°)$ D. $(0°,90°)$

能力训练

5. △ABC 的三边满足 $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，则 $\angle C$ 等于 （ ）

A. 15° B. 30° C. 45° D. 60°

6. 在△ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $a=1,b=\sqrt{7},c=\sqrt{3}$，则 $B=$______.

7. 在△ABC 中，$\angle B=60°$，最大边与最小边比为 $(\sqrt{3}+1):2$，则最大角为 （ ）

A. 45° B. 60° C. 75° D. 90°

8. 在△ABC 中，$A=60°$，$b=1$，面积为 $\sqrt{3}$，则 $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$ 的值为 （ ）

A. $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ B. $\frac{2}{3}\sqrt{39}$ C. $\frac{26}{3}\sqrt{3}$ D. $\frac{1}{2}\sqrt{39}$

9. 在△ABC 中，若其面积 $S=\frac{a^2+b^2-c^2}{4\sqrt{3}}$，则角 $C=$________.

10. 在△ABC 中，已知 a 比 b 长 2，b 比 c 长 2，且最大角的正弦是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，则△ABC 的面积是________.

11. 如图 1-3，在△ABC 中，$AB=8$ cm，$BC=7$ cm，$AC=5$ cm，内心为 I，试求 AI 的长度.

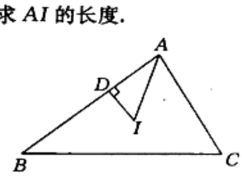


图 1-3

12. 已知三角形的三边长是连续的正整数，它的最大内角是钝角，求以它的最大内角为一个角，夹这个角的两边之和为 4 的平行四边形的最大面积.

第 3 课时 正弦定理和余弦定理(三)

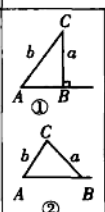
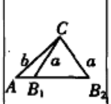
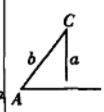
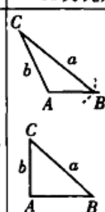
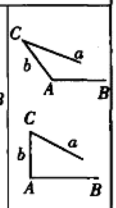
课前自学清单

教材扫描

1. 利用正弦定理解斜三角形的类型有哪些？它们解的情况如何？

(1)已知两角和任一边，利用正弦定理，只有一解.

(2)已知两边和其中一边的对角，利用正弦定理，可能有两解，一解或无解，在$\triangle ABC$中，已知a、b和A时，解的情况如下：

	A 为锐角			A 为钝角或直角	
图形					
关系式	①$a=b\sin A$ ②$a\geqslant b$	$b\sin A<a<b$	$a<b\sin A$	$a>b$	$a\leqslant b$
解的个数	①	②	③	④	⑤

2. 正弦定理的一些变形：

(1)$a=2R\cdot$ ⑥________；

(2)$a:b:c=$⑦____________；

(3)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\cdot$⑧________.

扫描指南

1. ①一解；②两解；③无解；④一解；⑤无解；
2. ⑥$\sin A$；⑦$\sin A:\sin B:\sin C$；⑧$\sin C$.

自主探究

3. $\triangle ABC$中，已知$a=8$，$B=60$，$C=75°$，则b等于 ( )

A. $4\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{6}$ D. $\frac{32}{3}$

4. 在$\triangle ABC$中，已知$b=\sqrt{2}$，$c=1$，$B=45°$，则a等于 ( )

A. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{2}+1$ D. $3-\sqrt{2}$

5. 若$\triangle ABC$中，$a\cos A=b\cos B$，则$\triangle ABC$一定是 ( )

A. 等边三角形 B. 等腰三角形

C. 直角三角形 D. 等腰三角形或直角三角形

6. 在$\triangle ABC$中，$A=30°$，$a=8$，$b=8\sqrt{3}$，则$\triangle ABC$的面积$S=$ ( )

A. $32\sqrt{3}$或$16\sqrt{3}$ B. $32\sqrt{3}$或16

C. $32\sqrt{3}$ D. 16

7. 在$\triangle ABC$中，$A=60°$，$B=45°$，$a+b=12$，则$a=$____，$b=$______.

课堂合作清单

情境引入

某地出土一块损坏文物，形状如图 1-4，现测得如下数据：$BC=2.57$ cm，$CE=3.57$ cm，$BD=4.38$ cm，$B=45°$，$C=120°$，为了复原，请计算文物另两边长.

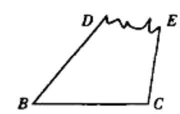


图 1-4

【解答】 如图 1-5，将BD、CE分别延长相交于一点A，在$\triangle ABC$中，$BC=2.57$ cm，$B=45°$，$C=120°$，

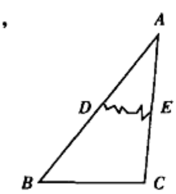


图 1-5

所以$A=180°-(B+C)=15°$，

由正弦定理得$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，

所以$AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}=\frac{2.57\sin 45°}{\sin 15°}$
$=7.02$ cm.

同样可得$AB\approx 8.60$ cm.

典例解析

题型一 三角形中的基本运算

【例 1】 在$\triangle ABC$中，已知$a=2$，$b=2\sqrt{2}$，$C=15°$，求角A、B和c的值.

思维分析 由条件知C为边a、b的夹角，故应用余弦定理来求c的值.

【解】 $\cos 15°=\cos(45°-30°)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

由余弦定理知

$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C=4+8-2\sqrt{2}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
$=8-4\sqrt{3}$，

所以$c=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

所以$\sin A=\frac{a\cdot\sin C}{c}=\frac{2\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

又因为 $b>a$，$\sin A=\frac{1}{2}$，所以 $A=30°$.

所以 $B=180°-A-C=135°$.

【点拨】 本题求出 c 后，用正弦定理求角 A，需要讨论确定 A 的值，而求出 c 后，再用余弦定理求角 A，可以避免讨论.

题型二　判断三角形的形状

【例 2】 在 $\triangle ABC$ 中，若 $b^2\sin^2 C+c^2\sin^2 B=2bc\cos B\cdot\cos C$，试判断三角形的形状.

思维分析　解决本题，既可用正弦定理把边化成角，也可用余弦定理把角化成边的形式.

【解法 1】（边化角）因为 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，

所以 $b=2R\sin B$，$c=2R\cdot\sin C$.

故原式可化为

$8R^2\sin^2 B\cdot\sin^2 C=8R^2\sin B\cdot\sin C\cdot\cos B\cdot\cos C$.

又因为 $\sin B\cdot\sin C\neq 0$，

所以 $\sin B\cdot\sin C=\cos B\cdot\cos C$，

即 $\cos(B+C)=0$，

所以 $B+C=90°$，$A=180°-(B+C)=90°$，

故 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

【解法 2】（角化边）由 $b^2\sin^2 C+c^2\sin^2 B=2bc\cos B\cdot\cos C$，得 $b^2(1-\cos^2 C)+c^2(1-\cos^2 B)=2bc\cos B\cos C$，

由余弦定理可得

$$b^2+c^2-b^2\cdot\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2-c^2\cdot\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2$$

$$=2bc\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

即 $b^2+c^2=\frac{[(a^2+b^2-c^2)+(a^2+c^2-b^2)]^2}{4a^2}$，

所以 $b^2+c^2=a^2$，故 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

【点拨】 本题解法1比较简单，解法2比较复杂，因此，运用正弦定理，还是运用余弦定理，应先看原题给出的条件.

题型三　三角与向量

【例 3】 在 $\triangle ABC$ 中，$\boldsymbol{m}=\left(\cos\frac{C}{2},\sin\frac{C}{2}\right)$，$\boldsymbol{n}=\left(\cos\frac{C}{2},-\sin\frac{C}{2}\right)$，且 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

(1)求 C；

(2)已知 $c=\frac{7}{2}$，三角形面积 $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，求 $a+b$.

思维分析　求 C 时直接展开向量数量积；求 $a+b$ 时，用正弦定理得出面积 $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$，然后结合余弦定理可求出 $a+b$ 的值.

【解】 (1) $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\left(\cos\frac{C}{2},\sin\frac{C}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{C}{2},-\sin\frac{C}{2}\right)$

$$=\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}=\cos C,$$

所以 $\cos C=\cos\frac{\pi}{3}$.

又因为 $0<C<\pi$，故 $C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由 $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，得 $ab=6$.

由 $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$ 得

$$a^2+b^2=c^2+2ab\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{7}{2}\right)^2+2\times 6\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{49}{4}+6.$$

所以 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=\frac{49}{4}+6+2\times 6$

$$=\frac{49}{4}+18=\frac{121}{4},$$

故 $a+b=\frac{11}{2}$.

【点拨】 整体运算灵活，避免了解方程组带来的繁琐.

题型四　三角形面积与圆

【例 4】 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，且满足 $2R(\sin^2 A-\sin^2 C)=(\sqrt{2}a-b)\sin B$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

思维分析　首先建立 $\triangle ABC$ 面积的函数关系，运用正、余弦定理的推论，分析求出最值.

【解】 由 $2R(\sin^2 A-\sin^2 C)=(\sqrt{2}a-b)\cdot\sin B$，

两边同乘 $2R$ 得

$4R^2\cdot\sin^2 A-4R^2\cdot\sin^2 C=(\sqrt{2}a-b)\cdot 2R\cdot\sin B$，

所以 $a^2-c^2=(\sqrt{2}a-b)\cdot b$，

再由余弦定理的推论得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 C 是 $\triangle ABC$ 的内角，从而有 $C=45°$.

所以 $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2R\cdot\sin A\cdot 2R\cdot\sin B\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\sqrt{2}R^2\sin A\cdot\sin B$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}R^2[\cos(A+B)-\cos(A-B)]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}R^2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos(A-B)\right].$$

故当 $A=B$ 时，面积 S 有最大值为 $\frac{1+\sqrt{2}}{2}R^2$.

注：$\sin A\cdot\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]$.

【点拨】 关于函数最值问题，首先应选出变量，建立函数关系.

探究心得

1. 解决与三角形有关的问题，常常需要正、余弦定理的交替作用.

2. 注意结合三角形外接圆半径、三角形面积公式以及三角公式的应用.

3. 结合图形，弄清边角关系，是正确选用公式和快速求解的关键.

课后测控清单

共同基础

1. 在$\triangle ABC$中，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$B=30^\circ$，则A的值为（　）

A. 60°　B. 30°　C. 120°　D. 60°或120°

2. 在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，$B=30^\circ$，则$\triangle ABC$的面积为（　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sqrt{3}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$或$\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 已知a,b,c是$\triangle ABC$的三边，且$B=120^\circ$，则$a^2+ac+c^2-b^2$的值（　）

A. 大于0　B. 小于0

C. 等于0　D. 以上答案都不对

4. 在$\triangle ABC$中，已知$a=8$，$B=60^\circ$，$C=75^\circ$，则b等于（　）

A. $4\sqrt{2}$　B. $4\sqrt{3}$　C. $4\sqrt{6}$　D. $\frac{32}{3}$

能力训练

5. 在$\triangle ABC$中，$a=\sin 10^\circ$，$b=\sin 50^\circ$，$C=70^\circ$，那么$\triangle ABC$的面积为（　）

A. $\frac{1}{64}$　B. $\frac{1}{32}$　C. $\frac{1}{16}$　D. $\frac{1}{8}$

6. 在$\triangle ABC$中，下列三式$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}>0$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}>0$中能够成立的不等式（　）

A. 至多1个　B. 有且只有1个

C. 至多2个　D. 至少2个

7. 在$\triangle ABC$中，a,b,c分别是三个内角A,B,C的对边，若$a=2$，$C=\frac{\pi}{4}$，$\cos\frac{B}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，求$\triangle ABC$的面积$S$.

8. 在$\triangle ABC$中，$\sin^2A=\sin^2B+\sin B\cdot\sin C+\sin^2C$，则$A=$________.

9. 在$\triangle ABC$中，a,b,c分别为角A,B,C的对边，S为$\triangle ABC$的面积，且$4\sin B\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{B}{2}\right)+\cos 2B=1+\sqrt{3}$.

(1)求角B的度数；

(2)若$a=4$，$S=5\sqrt{3}$，求b的值.

创新拓展

10. 在$\triangle ABC$中，已知$\tan B=\sqrt{3}$，$\cos C=\frac{1}{3}$，$AC=3\sqrt{6}$，求$\triangle ABC$的面积.

11. 如图1-6，在$\triangle ABC$中，已知$BC=15$，$AB:AC=7:8$，$\sin B=\frac{4}{7}\sqrt{3}$，求$BC$边上的高$AD$的长.

图1-6

第4课时　应用举例(一)

课前自学清单

教材扫描

1. 障碍物两侧两地的距离的测量，首先在障碍物一侧选一条①________，然后②________，在三角形中运用③________求解．
2. 障碍物同侧两地(不可到达)的距离的测量，首先在对侧选一④______，然后抽象出⑤________，然后用正弦定理求出⑥__________，最后用余弦定理求出距离．

扫描指南

1. ①基线；②抽象型三角形；③正、余弦定理；
2. ④基线；⑤两个三角形；⑥与对侧两地所在同一三角形的两边．

自主探究

3. 如图1－7，在河岸 AC 测河的宽度 BC，需测下面四组数中的（　　）

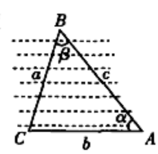


图1－7

A. c 与 α

B. c 与 b

C. c 与 β

D. b 与 α

4. 如图1－8，为了测量某一山洞的宽度 AB，给出了下列四组数据，则测量时应当用的数据是（　　）

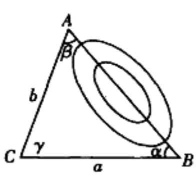


图1－8

A. α,a,b

B. α,β,a

C. a,b,γ

D. a,β,b

5. 已知两座灯塔 A 和 B 与海洋观察站 C 的距离都是 a km，灯塔 A 在观察站 C 的北偏东20°，灯塔 B 在观察站 C 的南偏东40°，则灯塔 A 与 B 的距离为（　　）

A. a km　　B. $\sqrt{3}a$ km

C. $\sqrt{2}a$ km　　D. $2a$ km

课堂合作清单

情境引入

要确定一河两岸目标的距离，但又不能过河，你有办法吗？

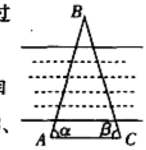


图1－9

【解答】 如图1－9，在河一岸边测得目标 A 与另一点 C 的距离 AC 的长，再测出 AB、AC 连线的夹角 α，AC、BC 连线的夹角 β，则 $\angle ABC=\pi-(\alpha+\beta)$，

从而 $AB=\dfrac{AC\sin\beta}{\sin\angle ABC}$.

典例解析

题型一　可抽象在同一三角形中的两点的距离

【例1】 设 A、B 两点在河的两岸，要测量两点之间的距离，测量者在 A 的同侧，在所在的河岸边选定一点 C，测出 AC 的距离是55 m，$\angle BAC=51°$，$\angle ACB=75°$. 求 A，B 两点间的距离(精确到0.1 m).

思维分析　如图1－10，所求的边 AB 的对角是已知的，又已知三角形的一边 AC，根据三角形内角和定理可计算出边 AC 的对角，根据正弦定理，可以计算出边 AB.

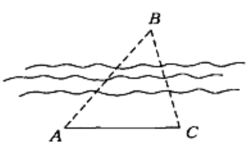


图1－10

【解】 根据正弦定理，得 $\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$，

$$AB=\frac{AC\cdot\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}=\frac{55\sin 75°}{\sin(180°-51°-75°)}$$

$$=\frac{55\sin 75°}{\sin 54°}\approx 65.7(\text{m}).$$

答：A、B 两点间的距离为65.7 m.

【例2】 如图1－11，某货轮在 A 处看灯塔 B 在货轮的北偏东75°，距离为 $12\sqrt{6}$ n mile，在 A 处看灯塔 C 在货轮的北偏西30°，距离为 $8\sqrt{3}$ n mile，货轮由 A 处向正北航行到 D 处时，再看灯塔 B 在北偏东120°，求：(1) A 处与 D 处的距离；(2)灯塔 C 与 D 处的距离.

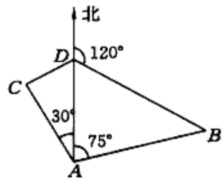


图 1-11

思维分析 (1)要求 AD 的长,在$\triangle ABD$ 中,$AB=12\sqrt{6}$,$\angle B=45°$,可由正弦定理解决.(2)要求 CD 的长,在$\triangle ACD$ 中,可由余弦定理解决.

【解】 (1)在$\triangle ABD$ 中,$\angle ADB=60°$,$\angle B=45°$,由正弦定理得 $AD=\dfrac{AB\cdot\sin B}{\sin\angle ADB}=\dfrac{12\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=24$(n mile).

(2)在$\triangle ADC$ 中,由余弦定理得

$CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos 30°$,

解得 $CD=8\sqrt{3}$(n mile).

答:A 处与 D 处的距离为 24 n mile,灯塔 C 与 D 处的距离为 $8\sqrt{3}$ n mile.

【例 3】 一人见一建筑物 A 在正北方向,另一建筑物 B 在北偏西 30°方向,此人向北偏西 70°方向行走3 km后,则见 A 在其北偏东 56°方向,B 在其北偏东 74°,试求这两个建筑物的距离.(精确到 10 m)

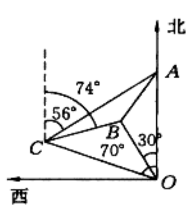


图 1-12

【解】 如图 1-12,在$\triangle BCO$ 中,$\angle BOC=70°-30°=40°$,

$\angle BCO=180°-(74°+70°)=36°$,

所以$\angle CBO=180°-(36°+40°)=104°$,

由正弦定理,得$\dfrac{CO}{\sin 104°}=\dfrac{BO}{\sin 36°}$,

所以 $BO=\dfrac{3\sin 36°}{\sin 104°}$.

在$\triangle AOC$ 中,$\angle AOC=70°$,$\angle CAO=56°$,

所以$\angle ACO=54°$.

由正弦定理,得$\dfrac{CO}{\sin 56°}=\dfrac{AO}{\sin 54°}$,

所以 $AO=\dfrac{3\sin 54°}{\sin 56°}$.

在$\triangle AOB$ 中,由余弦定理知:

$AB=\sqrt{AO^2+BO^2-2\cdot AO\cdot BO\cdot\cos 30°}$

$\approx 1\ 630$(m).

答:这两个建筑物的距离为 1 630 m.

探究心得

测量水平距离问题的方法:

(1)实际问题经抽象概括,已知量与未知量全部集中在一个三角形中,可用正弦定理或余弦定理求解.

(2)已知量与未知量涉及到两个(或两个以上)三角形,需作出这些三角形,先解够条件的三角形,然后逐步求出其他三角形中的解,有时需设出未知量,从几个三角形中列出方程,解方程得要求的解.

课后测控清单

共同基础

1. 某人向正东方向走 x km 后,他向右转 150°,然后朝新方向走 3 km,结果他离出发点恰好$\sqrt{3}$ km,那么 x 的值为 ( )

A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}$或$\sqrt{3}$ D. 3

2. 轮船 A 和轮船 B 在中午 12 时离开海港 C,两艘轮船的航行方向之间的夹角为 120°,轮船 A 的航速是 25 n mile/h,轮船 B 的航行速度是 15 n mile/h,下午 2 时两船之间的距离是 ( )

A. 35 n mile B. 70 n mile

C. $35\sqrt{2}$ n mile D. $70\sqrt{2}$ n mile

3. 已知两座灯塔 A 与 B 与一岛 C 的距离都等于a km,灯塔 A 在岛 C 的北偏东 20°,灯塔 B 在岛 C 的南偏东 40°,则灯塔 A 与灯塔 B 的距离为 ( )

A. a km B. $\sqrt{3}a$ km

C. $\sqrt{2}a$ km D. $2a$ km

4. 海上有 A、B 两个小岛相距 10 n mile,从 A 岛望 C 岛和 B 岛成 60°角,从 B 岛望 C 岛和 A 岛成 75°角,那么 B 岛和 C 岛间的距离是________.

能力训练

5. 如图 1－13，已知一艘船以 30 n mile/h 的速度往北偏东 10°的 A 岛行驶，计划到达 A 岛后停留 10 min后继续驶往 B 岛，B 岛在 A 岛的北偏西 60°的方向上，船到达 C 处时是上午 10 点整，此时测得 B 岛在北偏西 30°的方向；经过 20 min到达 D 处，测得 B 岛在北偏西 45°的方向. 如果一切正常的话，此船何时能到达 B 岛.

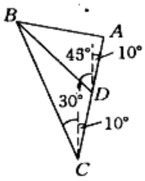


图 1－13

创新拓展

6. A、B、C 是一直线公路上的三点，$BC=2AB=2$ km，从三点分别观测一塔 P，从 A 测得塔在北偏东 60°，从 B 测得塔在正东，从 C 测得塔在东偏南 30°，求该塔到这条公路的距离.

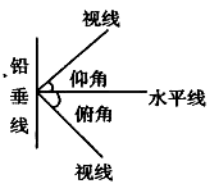
7. 在气象台 A 正西方向 300 km 处有一台风中心，它以 40 km/h 的速度向东北方向移动，距离台风中心 250 km以内的地方都受其影响，问从现在起，大约多长时间后，气象台 A 所在地将遭受台风影响，持续多长时间？

第 5 课时 应用举例(二)

课前自学清单

教材扫描

1. 理解实际问题中专有名词的意义与解三角形的基本类型.



仰角和俯角:与目标视线在同一铅垂直平面内的水平视线和目标视线的夹角. ①__________________________叫仰角,②______________________叫俯角,如上图.

坡角与坡比:③__________________________,坡比是指④________________________.

2. 能在实际问题中,抽象或构造出三角形,根据各量之间的⑤________,确定⑥____________的方法,准确把握实际问题中物体高度的求法.

扫描指南

1. ①目标视线在水平视线上方时;②目标视线在水平视线下方时;③坡角指坡面与水平面的夹角;④坡面的铅直高度与水平宽度之比;
2. ⑤关系;⑥解三角形.

自主探究

3. 一树干被狂风吹断,折断部分与残存树干成 30° 角,树干底部与树尖着地处处相距 4 m,则树干原来的高度是__________m.
4. 在一幢 20 m 高的楼顶测得对面一塔顶的仰角为 60°,塔基俯角为 45°,那么这座塔的高度为______m.
5. 飞机在空中沿水平方向飞行,在 A 处测得正前下方地面目标 C 的俯角为 30°,向前飞行 10 000 m,到 B 处,测得目标 C 的俯角为 60°,则飞机的高度为 ( )

A. 5 000 m B. 5 000$\sqrt{2}$ m

C. 5 000$\sqrt{3}$ m D. 100 000 m

课堂合作清单

情境引入

在某次旅游中,你沿着与水平地面成 60° 的山坡向上走了 4 km,你能知道你上升的垂直高度是多少吗?

典例解析

题型一 求坡长

【例 1】 倾斜角为 30° 的一段 100 m 的斜坡,若将倾斜角降为 15°,求降坡后的斜坡长.

思维分析 如图 1-14,在坡底不变的情况下,坡角减小,则坡长减小,在 $\triangle ADB$ 中运用正弦定理可求解 AD 的长.

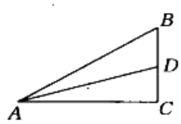


图 1-14

【解】 依题意设 $AB=100$ m,

$\angle BAC=30^\circ$,$\angle DAC=15^\circ$,

则 $\angle B=60^\circ$,$\angle BDA=105^\circ$,在 $\triangle ABD$ 中,

由正弦定理,得 $\dfrac{AD}{\sin 60^\circ}=\dfrac{AB}{\sin 105^\circ}$,

所以 $AD=\dfrac{100\cdot\sin 60^\circ}{\sin 105^\circ}=\dfrac{100\cdot\sin 60^\circ}{\sin(45^\circ+60^\circ)}$

$=50\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$(m).

【点拨】 读懂题意是处理本题的关键,坡底不变.

题型二 求高度

【例 2】 为了测量上海东方明珠塔的高度,某人站在 A 处测得塔尖的仰角为 75.5°,前进 38.5 m 后,到达 B 处测得塔尖的仰角为 80.0°,试计算东方明珠塔的高度(精确到 1 m).

思维分析 如图 1-15,塔高为 CD,只要能计算出 BC 或 AC 的长度,就可以计算出塔高,所以应在 $\triangle ABC$ 中利用正弦定理求 BC 的长.

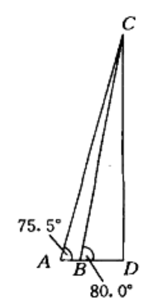


图 1-15

【解】 由于 $\angle CAD=75.5^\circ$,$\angle CBD=80.0^\circ$,

所以 $\angle ACB=4.5^\circ$.

在 $\triangle ABC$ 中,由于 $\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{BC}{\sin A}$,

所以 $BC=\dfrac{AB\cdot\sin A}{\sin\angle ACB}=\dfrac{38.5\times\sin 75.5^\circ}{\sin 4.5^\circ}$.

所以 $CD=BC\cdot\sin 80.0^\circ$

$=\dfrac{38.5\times\sin 75.5^\circ}{\sin 4.5^\circ}\cdot\sin 80.0^\circ$

≈ 468(m).

【点拨】 本例是计算高度问题,由于塔高 CD 难以直接求解,因此放在直角三角形 BCD 中求解,在 $\triangle ABC$ 中利用正弦定理求 BC 的长.

【例 3】 太阳光斜照地面,光线与水平面所成的角为 θ,一定长为 l 的杆与地面成什么角时,其影子最长?

思维分析 如图 1-16,用 AB 表示长为 l 的杆,光线与地面所成角 θ 一定,影子的长短由 AB 与地面的角度而定,

在△ABC中列出影子长与α的关系，可利用三角函数求出最值.

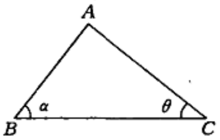


图 1-16

【解】 在△ABC中，

由正弦定理，得$\frac{AB}{\sin\theta}=\frac{BC}{\sin A}$，

又$A=180°-\theta-\alpha$，

所以$BC=\frac{AB\cdot\sin(180°-\theta-\alpha)}{\sin\theta}$

$=\frac{l\cdot\sin(\theta+\alpha)}{\sin\theta}$，

所以当$\alpha+\theta=90°$，即$\alpha=90°-\theta$时，BC有最大值为$\frac{l}{\sin\theta}$.

探究心得

1. 计算高度问题基本步骤是：

(1)准确理解题意和相关名词、术语；

(2)画出示意图，标出已知条件；

(3)分析与问题有关的一个或几个三角形，结合直角三角形知识或正、余弦定理正确求解.

2. 正确地画图、识图、用图是解决这类问题的关键.

3. 由于具体问题中给出数据常为有效近似值，故运算有时较为复杂，要注意算法简炼，计算准确等要求.

课后测控清单

共同基础

1. 若水渠侧面的坡角为α，坡比$i=m:n$，则$\sin\alpha$等于 ( )

A. $\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$ B. $\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}$

C. $\frac{m\cdot n}{\sqrt{m^2+n^2}}$ D. $\frac{n}{m}$

2. 在一座20 m高的观测台顶测得对面一水塔塔顶的仰角为60°，塔底俯角为45°，则塔高为 ( )

A. $20\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$m B. $20(1+\sqrt{3})$m

C. $10(\sqrt{6}+\sqrt{2})$m D. $20(\sqrt{6}+\sqrt{2})$m

3. 有一长为100 m的斜坡，它的倾斜角为45°，现在要把倾斜角改成30°，则坡底要伸长________m.

4. 为测某塔AB的高度，在一幢与塔AB相距20 m的楼的楼顶处测得塔顶A的仰角为30°，测得塔底B的俯角为45°，那么塔AB的高度为 ( )

A. $20\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$m B. $20\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$m

C. $20(1+\sqrt{3})$m D. 30 m

能力训练

5. 一角槽的横断面如图1-17所示，四边形$ADEB$是矩形，已知$\alpha=50°$，$\beta=70°$，$AC=90$，$BC=150$，则DE的长是________.

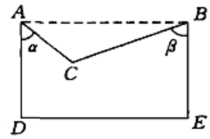


图 1-17

创新拓展

6. 如图1-18所示，在斜度一定的山坡上的一点A测得山顶上建筑物顶端C对于山坡的斜度为15°，向山顶前进100 m后，又从B点测得斜度为45°，设建筑物的高为50 m，求此山坡对于地平面的倾角θ.

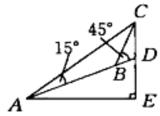


图 1-18

7. 为了测量建造中某城市电视塔已达的高度，小明在学校操场上的某一直线上选择A,B,C三点，且$AB=BC=60$ m，分别在A,B,C三点观察塔的最高点，测得仰角为45°，54.2°，60°，小明身高为1.5 m，试求建造中的电视塔现在已达的高度(结果保留一位小数).

第 6 课时 应用举例(三)

课前自学清单

教材扫描

1. 方位角:①________.
2. 方向角:②________.

扫描指南

1. ①从指北方向线顺时针旋转到目标方向线所成的水平角;
2. ②从指北或指南的方向线与目标线所成的小于 90° 的水平角.

自主探究

3. 从 A 处望 B 处的仰角为 α,从 B 处望 A 处的俯角为 β,则 α 与 β 的关系是 ( )

A. $\alpha>\beta$　　B. $\alpha=\beta$

C. $\alpha+\beta=90^\circ$　　D. $\alpha+\beta=180^\circ$

4. 某山坡的坡度为 $\frac{1}{2}$,设 α 为坡角,则 $\cos\alpha$ 为 ( )

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

5. 在某测量中,设 A 在 B 的南偏东 $35^\circ30'$,则 B 在 A 的 ( )

A. 北偏西 $35^\circ30'$　　B. 北偏东 $54^\circ30'$

C. 北偏西 $54^\circ30'$　　D. 南偏西 $35^\circ30'$

6. 已知两座灯塔 A 和 B 与海洋观察站 C 的距离相等,灯塔 A 在观察站 C 的北偏东 40°,灯塔 B 在观察站 C 的南偏东 60°,则灯塔 A 在灯塔 B 的 ( )

A. 北偏东 10°　　B. 北偏西 10°

C. 南偏东 10°　　D. 南偏西 10°

课堂合作清单

情境引入

清晨的阳光照到你身上,你能根据你的身高和你的影子长测算出阳光与地面的角度吗?

典例解析

【例 1】 沿一条小路前进,从 A 到 B,方位角是 50°,距离是 470 m,从 B 到 C,方位角是 80°,距离是 860 m,从 C 到 D,方位角是 150°,距离是 640 m,试画出示意图,并计算出从 A 到 D 的方位角和距离.

思维分析 如图 1-19,作图要理解题意,并按适当的比例,要求 A 到 D 的方位角,需构造三角形,连结 AC,在 $\triangle ABC$ 中,用余弦定理求出 AC,进而求出 $\angle BAC$,再在 $\triangle ACD$ 中,求出 AD 和 $\angle CAD$.

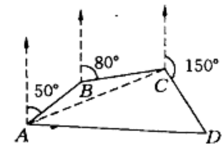


图 1-19

【解】 连接 AC,

在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ABC=50^\circ+(180^\circ-80^\circ)=150^\circ$.

由余弦定理得

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos 150^\circ}\approx 1\ 289(\text{m})$,

由正弦定理得

$\sin\angle BAC=\frac{BC\cdot\sin\angle ABC}{AC}=\frac{860\sin 150^\circ}{1\ 289}\approx 0.333\ 6$.

所以 $\angle BAC\approx 19.5^\circ$,$\angle ACB=10.5^\circ$.

在 $\triangle ACD$ 中,$\angle ACD=80^\circ-10.5^\circ+30^\circ=99.5^\circ$.

由余弦定理得

$AD=\sqrt{AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos\angle ACD}\approx 1\ 531(\text{m})$.

由正弦定理得 $\sin\angle CAD=\frac{CD\sin\angle ACD}{AD}$.

求得 $\angle CAD\approx 24.3^\circ$.

于是 AD 的方位角为 $50^\circ+19.5^\circ+24.3^\circ=93.8^\circ$.

即 A 到 D 的方位角为 93.8°,距离约为 1 531 m.

题型二 追逐问题

【例 2】 某渔轮在航行中不幸遇险,发出呼叫信号,我海军舰艇在 A 处获悉后,立即测出该渔轮在方位角为 45° 距离为 10 n mile 的 C 处,并测得渔轮正沿方位角为 105° 的方向,以 9 n mile/h 的速度向小岛靠拢,我海军舰艇立即以 21 n mile/h的速度前去营救,求舰艇的航向和靠近渔轮所需时间.

思维分析 首先根据题意画出图形,如图 1-20,由题意可知 $AC=10$,$\angle ACB=120^\circ$,再利用舰艇靠近渔轮所需的时间与渔轮用的时间相同,设相遇点为 B,这样解 $\triangle ACB$ 即可.

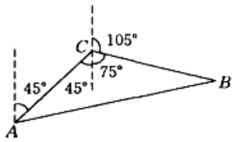


图 1-20

【解】 设所需时间为 t h，则 $AB=21t$，$CB=9t$.

在△ABC 中，根据余弦定理有

$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos 120°$，

可得 $21^2t^2=10^2+9^2t^2+2\times10\times9t\times\frac{1}{2}$，

整理得 $360t^2-90t-100=0$，$t=\frac{2}{3}$ 或 $t=-\frac{5}{12}$（舍去）.

舰艇需 $\frac{2}{3}$ h靠近渔轮.

所以 $AB=14$(n mile)，$BC=6$(n mile)，

由正弦定理 $\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{AB}{\sin 120°}$，

$\sin\angle CAB=\frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，所以 $\angle CAB\approx21.8°$.

所以舰艇的方位角为 66.8°.

【点拨】 解本题关键是根据实际，找出等量关系，利用余弦定理列出方程，问题可解. 在画示意图时，要注意方位角的作法.

题型三　物理中的角度问题

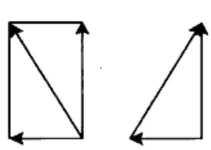
【例3】 某人在静水中游泳，速度为 $4\sqrt{3}$ km/h.

(1)如果他径直游向河对岸，水的流速为 4 km/h，他实际沿什么方向前进？速度大小是多少？

(2)他必须朝哪个方向游才能沿与水流垂直的方向前进？实际前进的速度大小为多少？

思维分析　(1)设人游泳的速度为 $\overrightarrow{OB}$，水流的速度为 $\overrightarrow{OA}$，以 OA，OB 为邻边的平行四边形 $OACB$ 中，$\overrightarrow{OC}$ 表示人的实际速度.

(2)设此人的实际速度为 $\overrightarrow{OB}$，水流速度为 $\overrightarrow{OA}$，因为实际速度＝游速＋水速，故游速为 $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AB}$ 可求.



(a)　　(b)

图 1-21

【解】 (1)图 1-21(a)中，$|\overrightarrow{OB}|=4\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{OA}|=4$.

在 Rt△OAC 中，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2}=8$(km/h).

$\cos\angle AOC=\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OC}|}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，

所以 $\angle AOC=60°$.

故此人沿着与河岸夹角 60°，顺着水流方向前进，速度大小为 8 km/h.

(2)图 1-21(b)中，$\overrightarrow{OB}$ 表示此人实际速度，水流速度为 $\overrightarrow{OA}$，则 $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.

在 Rt△AOB 中，$|\overrightarrow{AB}|=4\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{OA}|=4$，

所以 $|\overrightarrow{OB}|=4\sqrt{2}$，$\angle BAO=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故此人应沿着与河岸夹角 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$，逆着水流方向前进，实际前进速度的大小为 $4\sqrt{2}$ km/h.

【点拨】 正确理解题意是处理该问题的关键，注意区别(1)、(2)问中文字的叙述.

探究心得

1. 与角度有关的实际问题，除了仍要合理应用正、余弦定理和三角形知识外，还要注意弄清仰角、俯角、视角、方向角、方位角等有关术语.

2. 解决这类问题的基本步骤是：

(1)读懂题意，作出示意图，标明相关角度和长度；

(2)选用正确的定理或三角公式求解；

(3)作答.

课后测控清单

共同基础

1. 一船从 A 出发，船行到河的正对岸 B 处，船速为 v_1，水速为 v_2，则船行到 B 处时，行驶速度的大小为　　(　　)

A. $v_1^2-v_2^2$　　B. $|v_1|^2-|v_2|^2$

C. $\sqrt{v_1^2+v_2^2}$　　D. $\sqrt{|v_1|^2-|v_2|^2}$

2. 雨滴在空中以 4 m/s 的速度竖直下落，人打着伞以 3 m/s的速度向东急行，如果希望让雨滴垂直打向雨伞的截面而少淋雨，伞柄应指向什么方向？