

王尚武 王一博 编著

现代物理 导论



国防科技大学出版社

内容简介

本书介绍物理学的主要成就，重点介绍了相对论、量子力学、粒子物理、天体物理、凝聚态物理、统计物理、生物物理、交叉学科等。全书共分四大部分：第一部分为相对论；第二部分为量子力学；第三部分为粒子物理；第四部分为天体物理、凝聚态物理、统计物理、生物物理、交叉学科等。

本书可作为物理专业及相关专业的教材，也可供从事物理工作的工程技术人员参考。

现代物理导论

王尚武 王一博 编著

8. 2008. 8

8. 2008. 8

8. 2008. 8

ISBN 978-7-310-03082-8

王 尚武 著

中国图书馆书号 CIP

国防科技大学出版社
·长沙·

ISBN 978-7-310-03082-8
2008年8月第1次印刷 印数：1-5000册
开本：787×1092 1/16 印张：21.2 字数：210千字
定价：38.00元

内 容 简 介

本书对现代物理的基本内容作了提纲挈领的介绍,分为六章,主要涉及理论力学、狭义相对论、量子物理导论、统计物理导论(包括量子统计)四大块内容。

理论力学部分涉及有心力和二体问题、非惯性系下质点的运动方程和力学定理、刚体力学、拉格朗日力学和哈密顿力学。狭义相对论部分涉及洛伦兹变换与相对论时空观、相对论力学与质能关系、相对论电动力学。量子物理导论部分涉及电磁辐射量子论、微观粒子的波粒二象性、波函数与薛定谔方程、势垒穿透、力学量的表示与测量、氢原子的能级和光谱、电子自旋角动量和磁偶极矩、核磁共振、原子结构与元素周期表的构建、激光器与激光原理、晶固体的能带理论和半导体物理基础。统计物理导论部分涉及气体分子运动论、Maxwell 速度分布律、Boltzmann 能量分布律、Fermi-Dirac 分布和 Bose-Einstein 分布。

本书可供非物理类相关专业的学生作为教材使用,也可供非物理专业的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代物理导论/王尚武,王一博编著. —长沙:国防科技大学出版社,2008.8

ISBN 978-7-81099-489-7

I. 现… II. ①王… ②王… III. 物理学 IV. O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 049125 号

国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4572640 邮政编码:410073

<http://www.gfkdcbs.com>

责任编辑:文慧 责任校对:耿筠

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本:787×1092 1/16 印张:21.5 字数:510千

2008年8月第1版第1次印刷 印数:1-2000册

ISBN 978-7-81099-489-7

定价:38.00元

前言

一、本书的写作背景和目的

众所周知，物理学是一切工程技术的共同基础，其核心内容包含在“四大力学”——理论力学、电动力学、热力学、统计物理以及量子力学之中。一般我们把理论力学、经典电动力学、热力学和统计物理称为经典物理，而把相对论、量子力学、量子电动力学以及量子统计物理称为现代物理。支配自然界的理论是现代物理，而经典物理只不过是现代物理在低速和宏观情形下的极限。现代物理是现代高技术进步的主要源泉。

编写一本《现代物理导论》教材，肯定会有很多人质疑这项工作的必要性。这种质疑是可以理解的，因为其涉及的主要内容已有众多的高水平独立教材供人们选择。那么我们进行这项工作的必要性是什么呢？

我们知道，“四大力学”反映了物理学的主要基础，是国内外物理类专业本科生必修的专业基础课，对于训练未来的科学家和工程师来说，它们是不可或缺的重要内容。然而，对许多非物理类专业的工科学生来说，即使他们知道掌握这些内容是成为合格工程师的必备素质，但由于教学时数的限制，不可能有时间来进行系统的学习。事实上，有的专业甚至在教学计划中根本没有设置这类课程，更有些专业想开设现代物理导论课程，又苦于缺少合适的教材，只好作罢。这是很多技术类工科院校共同的烦恼和无奈。

如何在较短的时间内（比如 60 学时）对现代物理的基本内容作提纲挈领的介绍，使学生在一个学期内了解和掌握其重要内容，正是编写本教材的目的。

二、本书涉及的主要内容

“四大力学”所涵盖的内容繁多，其理论体系完整而深奥，基于这些内容编写一本《现代物理导论》教材，最大的困难是如何合理地筛选和组织内容。在保持内容体系基本完整的前提下缩小篇幅，在不太多地涉及数学技巧和顾及逻辑的严格缜密性的前提下把问题说清楚、道明白，是一件非常困难的事情。作者在这方面做了一些尝试，但实际效果如何只能由读者来评判

了。

本书是编者多年在讲授“现代物理导论”课程讲义的基础上编写而成的，主要涉及理论力学、狭义相对论、量子物理导论、统计物理导论（包括量子统计）四大块内容。按理说，理论力学（拉格朗日力学和哈密顿力学）属于经典物理范畴，但由于它为现代物理提供了一个框架和平台以及主要的物理语言，加上其中的一些重要内容（如二体运动和刚体力学）在工程实际中所具有的重要应用价值，我们也就把它包含在教材之中了。如果因为学时紧张，可以不讲或少讲。

理论力学部分涉及的主要内容有：有心力和二体问题、天体运行的三种轨道、火箭运动和抛体运动问题、三种宇宙速度的意义和来历、非惯性系下的质点运动方程和力学定理、地球自转效应对运动物体轨道的影响、陀螺的进动和章动、虚功原理、拉格朗日力学、哈密顿力学和正则变换。

狭义相对论部分涉及的主要内容有：伽利略变换和力学相对性原理、经典时空观、电磁学理论与经典时空观的矛盾、洛伦兹变换与相对论时空观、相对论力学与质能关系、多普勒效应、相对论电动力学。

量子物理导论部分涉及的主要内容有：黑体辐射光谱、光电效应、微观粒子的波粒二象性、波函数与薛定谔方程、束缚电子的能级和波函数、势垒穿透、扫描隧道显微镜、力学量的表示与测量、氢原子的能级和光谱、光的发射和吸收、电子自旋角动量和磁偶极矩、核磁共振、原子结构与元素周期表的构建、激光器与激光原理、晶相固体的能带理论、固体的导电性、绝缘体、金属和半导体、金属的自由电子模型、本征半导体和掺杂半导体、 $P-N$ 结和发光二极管（LED）、半导体激光器、金属氧化物半导体场效应晶体管（MOSFET）。

统计物理导论部分涉及的主要内容有：气体分子运动论、Maxwell速度分布律、Boltzmann能量分布律、能量均分定律和气体热容量、Fermi-Dirac分布、Bose-Einstein分布、金属中自由电子的热容量、Bose-Einstein凝结、光辐射的Planck分布。

三、本书的特点

第一，在保持主干内容完整性的基础上，尽力避免复杂而繁琐的数学推导，侧重告诉学生如何利用所学的新知识解决问题，以提高学生分析和解决实际问题的能力。

第二，不拘泥于现有教材的逻辑体系，采取删繁就简的策略。但精简到什么程度合适是需要准确拿捏的问题。我们认为，如果一味地降低教材难度，把课程当作科普知识来讲，就失去了上这门课的意义，这对学生的后续

学习和今后从事技术工作也是十分不利的。因此要特别注意课程内容的合理组织，注意知识点之间的有机联系和理论与实际的联系。比如，现有的量子力学教材大多内容庞杂，过度注重其形式理论的完整，数学演算多，使学生既感到抽象，又感觉与工程实际问题结合得不那么紧密，甚至得出学习量子力学后不能解决实际问题的错误印象。为解决此偏见，我们对教学内容进行了合理的筛选，淡化了形式理论的完整性和数学推导的严密性，注重量子力学在实际问题中的应用，使学员领略到量子力学与现代高科技的紧密联系，感受到量子力学原来与我们的生活如此贴近。

第三，采用让学生易于理解的方式和逻辑体系来阐述理论。比如，在统计物理部分引入平衡态粒子按能量的三种统计分布：Boltzmann 分布、Fermi-Dirac 分布和 Bose-Einstein 分布时，我们没有采用一般教科书先经典统计后量子统计的叙事顺序，而是直接从量子统计入手，通过计算粒子间碰撞时在不同量子态之间的跃迁速率，再考虑粒子全同性和泡利不相容原理对跃迁速率的限制，采用细致平衡原理而导出的。这样做，既节省了时间，又使学生容易接受，达到了事半功倍的效果。当然这样做的前提是必须先学习量子物理。又比如，从哈密顿力学过渡到量子物理时，阐明为什么微观粒子运动状态不能用正则变量而要用波函数描述，力学量为什么要用算子表示，力学量的取值为什么不唯一。在引入薛定谔方程时，则根据光子与实物粒子的对称特性，采用与单色电磁波函数类比的方法。再如，从量子物理过渡到统计物理时，阐明对大量微观粒子的宏观行为描述为什么要用统计的方法，等等。总之，在不同章节的转换过程中，教材始终注意了前后内容之间的联系，说明一种新理论出现的必然性，一环扣一环。这样的阐述方法会使学生不至于感到突兀，也使学生明白现代物理导论课程的确是一个统一的整体，而不是一个拼盘。

第四，在适当介绍物理理论的同时，侧重介绍其在实际工程中的应用，注意理论与实际工程问题紧密结合。例如，二体问题与卫星变轨原理，Rutherford 散射与原子的核式模型，Einstein 的质能关系式与核能的释放，Doppler 效应与雷达测速，核磁共振与医学成像技术，隧道效应与扫描隧道显微镜 (sTM)，半导体激光器与激光光纤通讯、CD、DVD，发光二极管 (LED) 和光二极管与红外遥控器， $P-N$ 结与 MOS 场效应管， $P-N$ 结的单向导电性与整流器，半导体电阻率的负温度系数与半导体温度传感器，黑体辐射与辐射测温计，等等。目的是使学生感到现代物理与我们的生活关系非常密切，消去其陌生感和学习的畏难情绪。

四、现代物理导论课程的任务

现代物理导论是我校光电技术专业本科生的一门重要基础理论课。通过本课程的学习，能够使学生对现代物理的基本体系、内容和对物质世界的基本运动规律有所了解，对高技术武器装备的基本物理原理有所掌握，并具备分析和处理实际技术问题的基本技能。同时，加强对学员科学思维方法的训练、提高学员的科学素质，为学习后续专业课程，以及今后从事工程实际应用工作打下坚实的现代物理基础。

从理论力学、狭义相对论、量子物理和统计物理的基本原理出发，简要介绍现代物理的一些重要概念、规律、原理和方法。在尽可能少地涉及繁杂数学推演的前提下，为学生建立起较为清晰的物理概念和物理图像，了解客观世界的物理本质。把物理学中的基本原理、基本规律介绍给学生，把物理学研究对象中的最本质、更深层次的规律揭示出来，把最精彩的最具有吸引力的部分展示出来，尽力把同学们带进五彩缤纷的物理世界中，使之对物质世界有一个全面、清醒的认识，激发大家不断探索自然奥秘的热情，并初步具备运用所学知识分析和解决实际问题的能力。这就是本课程的任务。

总之，本课程将为学生打开现代物理学的大门，并送之一枚指南针，使学生在现代物理学展示的五彩缤纷的物质世界中汲取营养，以迎接新军事革命的挑战。

本书的出版得到了国防科技大学“十一五”教材建设基金的资助。在本书出版过程中，责任编辑文慧女士、责任校对耿筠女士付出了大量心力，编者对她们的大力协助表示诚挚的谢意。同时也对国防科技大学出版社的谢冠军社长表示衷心感谢。没有他们的鼎力支持，本书的出版是不可能的。

由于编者水平所限，时间紧迫，难免挂一漏万，不当之处欢迎批评赐教。

作者

2008年6月于科大家园

绪 论

物理学是探讨物质结构和基本运动规律的一门学科，是客观物质世界本质、结构和一般运动规律的理论总结。

物理学一般分为经典物理学和现代物理学。现代物理学的理论框架是 20 世纪建立起来的，相对论和量子力学是其诞生的标志，也是现代物理的主旋律。相对论阐述了高速世界的规律，并给予人们正确的时空观教育，而量子力学揭示了微观世界的奥秘。现代物理学是现代高技术进步的主要源泉。原子能技术、激光技术、信息技术、微电子技术、光电子技术、新材料技术等各领域无不渗透着现代物理的内涵。原子能的释放、光辐射的频谱、激光的产生、隧道二极管、扫描隧道显微镜、光电效应、康普顿散射、原子的精细结构、金属的比热容、Bose-Einstein 凝结现象、超流、超导现象等，只能通过现代物理的理论和知识来理解和解释。值得指出的是，支配自然界的理论本质上是现代物理，而经典物理只不过是现代物理在低速和宏观情形下的极限。

现代物理主要探索两个奇异世界的物理规律：一个是物体速度接近光速运动的高速世界，另一个是空间尺度比原子还小的微观世界。之所以说这两个世界奇异，是因为它们处于人们平常所能感知的世界之外，尺度小得人们看不见，速度高得人们无法体验。

相对论为我们揭示了“时空本质”的崭新观念。它告诉我们：时间和空间与物体运动密切相关，它们就是物体运动的特性，并不独立于物体的运动之外。另一方面，时间和空间相互纠缠，并不相互独立。正因为如此，才有运动时钟变慢、运动物体长度变短的新奇结论，也才有 Einstein 质能关系式的提出和原子能的释放。

量子力学使我们对客观世界有了更深层次的认识。它告诉我们：微观粒子具有波粒二象性，微观物理量的取值是量子化的。只有用量子力学才能正确地理解和解释与光辐射有关的实验现象（如黑体辐射能量随频率变化的实验曲线、光电效应、原子的线状光谱、光被电子的 Compton 散射等），与电子运动有关的实验现象（如原子的稳定性问题，绕原子核高速运动的电子为什么不辐射损失能量而坠落到原子核上去，导致原子的坍塌？）以及与热现象有关的实验事实（如金属中的电子为什么对金属的比热贡献为零？固体的比热为什么在温度趋于绝对零度时为零？），等等。

作为现代物理重要组成部分的量子力学，与我们的日常生活有着密不可分的联系。在现代社会，许多的家用电器、办公设备、高科技的科学仪器都是基于量子力学的原理生产和制造出来的。例如：CD 和 DVD、MP4、电脑、复印机、数码相机、电话、手机、超市里的价格条码扫描器、电视机、各类遥控器、收音机等物理基础和工作原理都与量子力学密切相关。另一方面，许多我们在日常生活中看似普通的物理现象也只能用量子力学来理解和解释。比如，什么是光（或激光）？光是怎么产生的？为什么一些物质发红光？一些物质却发黄光和蓝光？光究竟是粒子还是一种波？如果是波，它的传播不需要介质？在何种介质中传播？太阳光是如何到达地球上来的？如果光具有波粒二象性，为什么一开始我们没有意识到光是由粒子（光子）组成的呢？光由光子组成的这个

客观事实没有早早地在我们面前展示出来的原因是什么？用我们的肉眼为什么不能够辨识光是由粒子组成的？电子究竟是粒子还是一种波？如果电子是粒子，电子束又怎么能够用来做电子显微镜？如果电子具有物质波的行为，那么如何理解“一个粒子是一种波”？为什么电子的波动性不能像光的波动性一样早早地被人们发现呢？除此以外，量子力学还能解释化学元素在元素周期表中的排列顺序、微电子器件的工作原理，以及为什么金属导电而玻璃和橡胶不导电的物理本质，等等。

现代物理学也为其他学科创立了原理和技术。几乎所有重大新技术领域的创立，均在物理学中经过了长期的酝酿，在理论和实验上积累了大量的知识，然后才取得突破的。例如，1947年美国贝尔实验室的巴丁、布拉顿和肖克莱发明了晶体管，标志着信息时代的开始。1962年发明了集成电路，1970年代后期出现了大规模集成电路。但是，殊不知在此之前至少存在20年的“史前期”，在这个“史前期”，现代物理学为孕育它的诞生作了大量的理论和实验准备。例如，1925—1926年建立了量子力学；1926年提出费米—狄拉克统计方法、泡利不相容原理；1927年建立布拉赫波的理论；1928年索末菲提出固体能带的猜想；1929年派尔斯提出禁带、空穴的概念，贝特提出费米面的概念。以上这些都是固体物理和半导体物理的理论基础。

现代物理学为一切学科提供了基本的实验手段和基本的研究方法。如光谱分析方法、X光荧光分析方法、核磁共振谱分析方法，等等。可以毫不夸张地说，几乎一切现代的实验分析方法或分析仪器都源于现代物理学的相应原理或效应。

上述事实说明，工程技术中的基本规律均反映在物理学的各个领域。物理学在交叉学科、边缘学科的发展中是最有生命力、最活跃的学科。

现代物理知识是促进各学科发展的重要基础，是高科技创新人才的必要武装，也是高技术条件下军事人才的必备素质。工程技术人员的物理素质直接关系到本领域的发展。实践表明，现在科研成果转化为生产力、战斗力的周期愈来愈短，这意味着知识更新的周期也随之缩短，但物理学作为知识的核心，其基本理论则是持久不衰的。物理知识、原理、方法将使人们终生受益。深厚的科学素养、深刻的科学洞察力以及在此基础上的不懈努力，可以造就伟大的科学家和发明家。例如，新型显微镜——扫描隧道显微镜（STM）的发明过程就充分地说明了这一点。STM的发明者葛·宾尼（Gerd Binnig）和海·罗雷尔（Heinrich Rohrer）巧妙地应用了量子力学中微观粒子的“隧道效应”，改进了“场发射显微镜”，从而使显微镜的发展掀开了新的篇章。STM的分辨率达到 1\AA ，在它之下单原子的图像都清晰可见。

到20世纪末，现代物理不仅支配着物理学、化学、生物学，而且毫不夸张地说，它支配着现代化国家的经济。向“四个现代化”道路上前行的科技工作者，如果不懂得现代物理的知识，是不可想象的。作为未来高技术条件下的军事人才，不懂得高科技武器装备的物理原理，将难以驾驭现代战争而永远立于不败之地。

在国家提出建设创新型国家战略目标的大背景下，作为未来国家创新团队方面军的后备人才，我们必须提前做好现代物理知识的武装。这是因为，任何创新都必须建立在坚实的科学基础之上，如果我们对人类已有的文明成果和知识缺乏必要的了解，却高谈原始创新和继承创新，就如同在沙漠上建设大厦，是靠不住的。

目 录

第一章 质点和质点组力学	(1)
1.1 质点的运动学	(1)
1.2 质点的动力学	(9)
1.3 质点组的动力学	(14)
1.4 二体问题与有心运动	(24)
1.5 非惯性系下质点的动力学方程	(38)
附 非惯性系下的力学定理	(49)
练习题	(54)
第二章 刚体力学	(57)
2.1 刚体的运动学	(57)
2.2 刚体的动力学	(70)
2.3 刚体的定轴转动	(86)
2.4 刚体的定点转动	(91)
2.5 刚体的一般运动和平面平行运动	(99)
练习题	(105)
第三章 分析力学	(107)
3.1 静力学、虚功原理	(107)
3.2 动力学、达朗贝尔原理、Lagrange 方程	(117)
3.3 哈密顿函数与正则方程	(132)
3.4 正则变换	(144)
练习题	(151)
第四章 狭义相对论	(153)
4.1 什么是狭义相对论?	(154)
4.2 惯性系和力学相对性原理	(156)
4.3 惯性系下时空坐标的伽利略变换	(157)
4.4 经典时空观(牛顿的绝对时空观)	(159)
4.5 电磁理论与经典时空观的矛盾	(160)
4.6 狭义相对论的基本假设 洛伦兹变换	(164)
4.7 相对论的时空观	(170)

4.8	相对论速度合成定律	(182)
4.9	相对论力学	(185)
4.10	相对论电动力学	(197)
	练习题	(209)
第五章 量子物理导论		(211)
5.1	用经典理论无法解释的黑体辐射现象	(212)
5.2	波动的粒子性和实物粒子的波动性	(217)
5.3	薛定谔方程	(226)
5.4	粒子在无限深势阱中的运动	(232)
5.5	小能量的粒子对高势垒的穿透问题	(236)
5.6	量子力学中的力学量	(240)
5.7	氢原子能级和光谱	(243)
5.8	电子的自旋	(254)
5.9	核磁共振	(262)
5.10	原子结构	(263)
5.11	激光器和激光	(268)
5.12	固体的导电性	(271)
	练习题	(288)
第六章 统计物理导论		(290)
6.1	热现象和热力学基本定律	(291)
6.2	气体分子运动论	(300)
6.3	分子速度的 Maxwell 分布	(303)
6.4	分子按能量 ϵ 的 Boltzmann 分布	(305)
6.5	能量均分定律和气体的热容量	(310)
6.6	Fermi-Dirac 分布	(313)
6.7	Bose-Einstein 分布	(316)
6.8	Bose-Einstein 分布和 Fermi-Dirac 分布向连续态的过渡、物理量的统计平均值的计算	(319)
6.9	Fermi-Dirac 统计和 Bose-Einstein 统计的一些应用	(324)
	练习题	(331)
参考文献		(332)

第一章 质点和质点组力学

质点和质点组的运动学和动力学问题在“大学物理”中已经涉及过,鉴于它们是处理刚体运动的基础,故有必要在这里对其主要知识点进行梳理和总结。在此基础上,本章重点讨论在实际问题的处理中常见的两个问题:一是二体问题与有心运动,二是非惯性系下质点的动力学方程。

1.1 质点的运动学

力学有三个分支,即运动学(Kinematics)、动力学(Dynamics)和静力学(Static Mechanics)。

运动学主要从几何的观点来研究物体位置随时间的变化(即所谓的机械运动),它不涉及引起这种变化的原因。运动学中的主要物理概念有质点的位矢 \mathbf{r} 、位移 $\Delta\mathbf{r}$ 、速度 \mathbf{v} 、加速度 \mathbf{a} 等。

动力学则研究导致质点运动状态改变的原因。动力学中的主要物理概念有质量 m 、动量 \mathbf{p} 、力 \mathbf{F} 、冲量 \mathbf{I} 、功 W 、动能 K 、势能 U 、角动量 \mathbf{L} 、力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 等。

静力学主要研究一个存在相互作用的力学体系处于平衡状态时,各部件受力的分布问题。实际上,静力学是动力学的特殊情况。

1.1.1 质点、参考系和坐标系

1. 质点

在力学中,“质点”是一个实际物体的抽象,它没有大小和形状,却具有质量。质点这个概念是为了便于力学问题的数学处理而引入的一个理想模型。实际上,除了质点这个理想模型外,物理学中还有许多其他的理想模型,如刚体、点电荷、理想气体、理想流体等。

力学中哪些物体可以当作质点来看待呢?一般有以下两种情况:

(1) 如果一个物体在运动时不改变形状,也不旋转,物体的每一个部分都以同样的速度(即各部分速度的大小和方向均相同)运动,该物体就可以当作质点来处理;

(2) 不论物体是否改变形状,也不论它是否旋转,只要该物体的运动范围远远大于物体本身的线度,该物体的运动就可以当作质点来处理。例如,地球围绕太阳运动时,地球就可当作质点来处理,尽管地球很大,也存在自转运动。

必须指出,一个物体是否可以被当作质点来处理,与所研究的物体的何种特性密切相

关。例如,如果我们研究的是地球围绕太阳的机械运动,地球就可以当作质点来处理;如果我们研究的是一个原子的内部结构,就不能将原子当作质点来处理了。

2. 参考系

宇宙中的任何物体都是运动的,没有一个物体处于“绝对静止”的状态。为了描述每个物体的运动,需要另一个客体来作为其参照物。这个用来作参照物的客体就叫做参考系。这里有几点需要说明:

(1) 宇宙中的任何物体都有同等的资格和优先权被选择作为参考系,在这一方面,不存在一个物体比另一个物体更优越。所以,研究一个物体的运动时,参考系可以任意选择。

(2) 任何物体的运动都属于相对运动,宇宙中不存在绝对运动。既然物体的运动都是相对运动,对其运动的描述就依赖于参考系的选择。也就是说,参考系的选择不同,对物体运动的描述就完全不同。例如,在匀速运动的火车上往上抛一个球,球的运动轨迹在火车上看就是直线,而在地面上看球的运动轨迹则是抛物线。

几个常用的参考系是太阳中心(日心参考系)、地球中心(地心参考系)和地球表面(地面参考系)。我们通常所说的实验室坐标系就是固定在地球表面的参考系。

3. 坐标系

坐标系是参考系的数学抽象。一个坐标系有三个坐标轴,每个轴上都有数值刻度。

建立坐标系的目的是,便于对一个物体相对于参考系的运动作定量的数学描述。坐标系建立了,相当于给定了参考系;然而,当参考系选定后,坐标系可以任意选择。常用的几个坐标系是直角坐标系、球坐标系、柱坐标系。

在直角坐标系中,质点的位置用 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 表示,如图 1.1 所示;在球坐标系中,质点的位置用 $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$ 表示,如图 1.2 所示;在柱坐标系中,质点的位置则用 $\mathbf{r} = (\rho, \varphi, z)$ 表示,如图 1.3 所示。

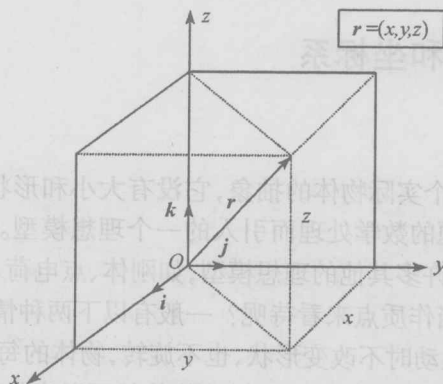


图 1.1 直角坐标系

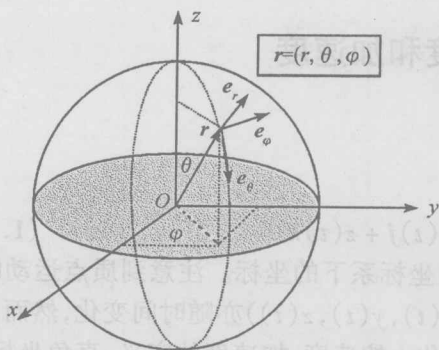


图 1.2 球坐标系

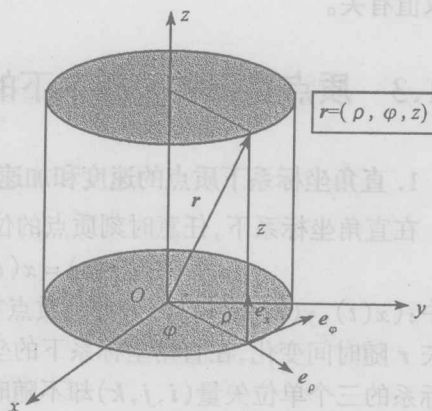


图 1.3 柱坐标系

1.1.2 质点的位矢

质点运动学的任务是,寻找质点在任意时刻 t 相对于某个参考点 O 的位置 $\mathbf{r}(t)$ 。这个参考点一般称为原点或零点。

如何定量地确定质点 P 相对于某个参考点 O 的位置 $\mathbf{r}(t)$ 呢? 首先必须建立坐标系,例如直角坐标系。其次,用一个矢量 \mathbf{r} 来确定质点 P 相对于原点 O 的位置。该矢量起始于原点 O ,指向质点 P 所在的位置。矢量 \mathbf{r} 就称为质点的位置矢量,简称位矢。

例如,在直角坐标系下(见图 1.1),质点位矢 \mathbf{r} 的分量形式为

$$\mathbf{r} = xi + yj + zk \quad (1.1-1)$$

其中: (i, j, k) 为直角坐标系的三个单位矢量,它们的长度为 1,没有量纲。在质点运动时,单位矢量 (i, j, k) 在空间的指向不随时间改变,即不随质点位置的不同而改变; (x, y, z) 称为质点在直角坐标系下的坐标,它们具有长度的量纲,数值上可正可负。

球坐标系(见图 1.2)的三个单位矢量为 (e_r, e_θ, e_ϕ) ,它们的长度为 1,也没有量纲,但在质点运动时,它们在空间的指向随质点位置的不同而不同,都是随时间改变的,故球坐标系也称为局域坐标系或活动坐标系。在球坐标系下,质点位矢 \mathbf{r} 的分量形式为

$$\mathbf{r} = r e_r \quad (1.1-2)$$

其中: $r = |\mathbf{r}|$ 为位矢 \mathbf{r} 的长度。注意,这里位矢 \mathbf{r} 似乎与 (θ, ϕ) 无关,实际上是有关的,因为 \mathbf{r} 方向的单位矢量 e_r 与 (θ, ϕ) 有关。

柱坐标系(见图 1.3)的三个单位矢量为 (e_ρ, e_ϕ, e_z) ,它们的长度为 1,没有量纲,但在质点运动时, (e_ρ, e_ϕ) 在空间的指向也随质点位置的不同而不同,是随时间改变的,但 e_z 的指向却不随时间改变。因此柱坐标系也称为局域坐标系或活动坐标系。在柱坐标系下,质点位矢 \mathbf{r} 的分量形式为

$$\mathbf{r} = \rho e_\rho + z e_z \quad (1.1-3)$$

其中, ρ 为位矢 \mathbf{r} 在 xy 平面的投影长度; z 为位矢 \mathbf{r} 在 z 轴的分量;单位矢量 e_ρ 的指向与 ϕ

的取值有关。

1.1.3 质点在三种坐标系下的速度和加速度

1. 直角坐标系下质点的速度和加速度

在直角坐标系下,任意时刻质点的位矢为

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (1.1-4)$$

其中: $(x(t), y(t), z(t))$ 为 t 时刻质点在直角坐标系下的坐标。注意到质点运动时,其位矢 \mathbf{r} 随时间变化,在直角坐标系下的坐标 $(x(t), y(t), z(t))$ 亦随时间变化,然而,直角坐标系的三个单位矢量 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 却不随时间变化。按速度、加速度的定义,直角坐标系下质点的速度和加速度分别为

$$\begin{cases} \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k} \\ \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \ddot{x}(t)\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\mathbf{j} + \ddot{z}(t)\mathbf{k} \end{cases} \quad (1.1-5)$$

2. 柱坐标系下质点的速度和加速度

在柱坐标系下,任意时刻质点的位矢为

$$\mathbf{r}(t) = \rho(t)\mathbf{e}_\rho + z(t)\mathbf{e}_z \quad (1.1-6)$$

注意到质点运动时,即其位矢 \mathbf{r} 随时间变化时,不仅质点的坐标 $(\rho(t), z(t))$ 随时间变化,而且柱坐标系的两个单位矢量 $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi)$ 的指向亦随时间变化,按速度的定义有

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\rho}(t)\mathbf{e}_\rho + \rho(t)\dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z}(t)\mathbf{e}_z \quad (1.1-7)$$

其中: 已用 $\dot{\mathbf{e}}_z = \frac{d\mathbf{e}_z}{dt} = 0$, 问题是, $\dot{\mathbf{e}}_\rho = \frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} = ?$

注意到柱坐标系的三个单位矢量 $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ 与直角坐标系的三个单位矢量 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 存在以下关系

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\rho = \cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j} = \mathbf{e}_\rho(\varphi) \\ \mathbf{e}_\varphi = \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})\mathbf{i} + \sin(\varphi + \frac{\pi}{2})\mathbf{j} = -\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j} = \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \end{cases}$$

再注意到质点的位矢随时间变化时, $\varphi(t)$ 随时间变化,而直角坐标系的三个单位矢量 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ 不随时间变化,因此,柱坐标系的单位矢量 $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi)$ 作为 $\varphi(t)$ 的函数也就随时间变化。故 $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi)$ 的时间变化率为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_\rho = \frac{d\mathbf{e}_\rho}{d\varphi}\dot{\varphi} = (-\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j})\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{d\varphi}\dot{\varphi} = (-\cos\varphi\mathbf{i} - \sin\varphi\mathbf{j})\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_\rho \end{cases} \quad (1.1-8)$$

将 $\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$ 代入式(1.1-7)得柱坐标系下质点的速度为

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\rho}(t)\mathbf{e}_\rho + \rho(t)\dot{\varphi}(t)\mathbf{e}_\varphi + \dot{z}(t)\mathbf{e}_z \quad (1.1-9)$$

上式对时间求导,注意到式(1.1-8),得柱坐标系下质点的加速度为

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = [\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\varphi}^2(t)]e_\rho + [2\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}(t) + \rho(t)\ddot{\varphi}(t)]e_\varphi + \ddot{z}(t)e_z \quad (1.1-10)$$

3. 球坐标系下质点的速度和加速度

在球坐标系下,任意时刻质点的位矢为

$$r(t) = r(t)e_r \quad (1.1-11)$$

注意到质点运动时,不仅质点在球坐标系下的坐标 $r(t)$,而且球坐标系的单位矢量 $(e_r, e_\theta, e_\varphi)$ 亦随时间变化,按速度的定义有

$$v(t) \equiv \frac{dr(t)}{dt} = \dot{r}(t)e_r + r(t)\dot{e}_r$$

问题是 $\dot{e}_r = \frac{de_r}{dt} = ?$

注意到球坐标系的三个单位矢量 $(e_r, e_\theta, e_\varphi)$ 与直角坐标系的三个单位矢量 (i, j, k) 存在以下关系

$$\begin{cases} e_r = \sin\theta \cos\varphi i + \sin\theta \sin\varphi j + \cos\theta k \\ e_\theta = \sin(\theta + \pi/2) \cos\varphi i + \sin(\theta + \pi/2) \sin\varphi j + \cos(\theta + \pi/2) k \\ e_\varphi = e_r \times e_\theta \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} e_r = \sin\theta \cos\varphi i + \sin\theta \sin\varphi j + \cos\theta k \\ e_\theta = \cos\theta \cos\varphi i + \cos\theta \sin\varphi j - \sin\theta k \\ e_\varphi = e_r \times e_\theta = -\sin\varphi i + \cos\varphi j \end{cases} \quad (1.1-12)$$

由于质点的位矢 $r(t)$ 随时间变化时, $(\theta(t), \varphi(t))$ 随时间变化,故 $(e_r, e_\theta, e_\varphi)$ 作为 $(\theta(t), \varphi(t))$ 的函数也就随时间变化,但直角坐标系的三个单位矢量 (i, j, k) 不随时间变化,故 $(e_r, e_\theta, e_\varphi)$ 的时间变化率为

$$\begin{cases} \dot{e}_r = \frac{\partial e_r}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial e_r}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \dot{\theta} e_\theta + \sin\theta \dot{\varphi} e_\varphi \\ \dot{e}_\theta = \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial e_\theta}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = -\dot{\theta} e_r + \cos\theta \dot{\varphi} e_\varphi \\ \dot{e}_\varphi = \dot{e}_r \times e_\theta + e_r \times \dot{e}_\theta \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dot{e}_r = \dot{\theta} e_\theta + \sin\theta \dot{\varphi} e_\varphi \\ \dot{e}_\theta = -\dot{\theta} e_r + \cos\theta \dot{\varphi} e_\varphi \\ \dot{e}_\varphi = -\sin\theta \dot{\varphi} e_r - \cos\theta \dot{\varphi} e_\theta \end{cases} \quad (1.1-13)$$

因此,球坐标系下质点的速度为

$$v(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}e_\varphi \quad (1.1-14)$$

而加速度为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \\ &= (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_\theta + (2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\sin\theta\ddot{\phi})\mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (1.1-15)$$

4. 平面极坐标系下质点的速度和加速度

平面极坐标系是柱坐标系的一种特殊情况,其中质点局限在 xy 平面上作二维运动,其 z 坐标为 0。任意时刻质点的位矢为

$$\mathbf{r}(t) = \rho(t)\mathbf{e}_\rho \quad (1.1-16)$$

注意到质点的位矢随时间变化时,不仅质点的坐标,而且平面极坐标系的单位矢量 $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi)$ 亦随时间变化,按速度的定义有

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\rho}(t)\mathbf{e}_\rho + \rho(t)\dot{\mathbf{e}}_\rho$$

其中 $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi)$ 的时间变化率为

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_\rho \quad (1.1-17)$$

因此,平面极坐标系下质点的速度为

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\rho}(t)\mathbf{e}_\rho + \rho(t)\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\rho}(t)\mathbf{e}_\rho + \rho(t)\dot{\varphi}(t)\mathbf{e}_\varphi \quad (1.1-18)$$

加速度为

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = [\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\varphi}^2(t)]\mathbf{e}_\rho + [2\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}(t) + \rho(t)\ddot{\varphi}(t)]\mathbf{e}_\varphi \quad (1.1-19)$$

5. 二维自然坐标系下质点的速度和加速度

如图 1.4,假设一质点沿平面路径 C 作二维运动, t 时刻相对于原点 O 的位矢为 $\mathbf{r}(t)$ 。

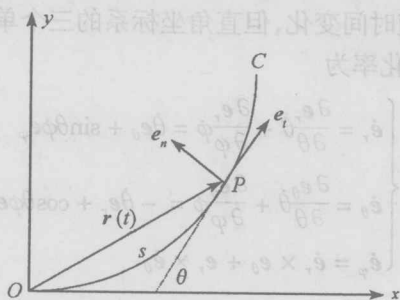


图 1.4 自然坐标系的定义

在 P 点处,质点的位矢为 $\mathbf{r}(t)$,从原点到 P 点路径长度为 s 。曲线 C 在 P 点处的切线方向的单位矢量为 \mathbf{e}_t ,朝内部的法线方向的单位矢量为 \mathbf{e}_n 。 \mathbf{e}_t 与 x 轴的正方向的夹角为 θ 。显然,质点位矢 $\mathbf{r}(t)$ 的坐标为 (s, θ) 。我们把 (s, θ) 称为位矢 $\mathbf{r}(t)$ 的自然坐标, $(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_t)$ 则称为自然坐标系的单位矢量,它们和质点所处的位置是紧密联系在一起。

当质点位矢 $\mathbf{r}(t)$ 随时间变化时,自然坐标的单位矢量 $(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_t)$ 的空间取向发生变化。