"考研直通车"真题解析系列丛书

2009年
全国硕士研究生入学考试历年真题解析

总主编　新　罗
本册主编　肖新玲

数学三

齐鲁书社

2009年
全国硕士研究生入学考试
历年真题解析

数学二

“考研直通车”真题解析系列丛书

2009年

全国硕士研究生入学考试
历年真题解析

总 主 编　新 罗
本册主编　肖新玲

数学三

齊魯書社

图书在版编目（CIP）数据

2009年全国硕士研究生入学考试历年真题解析——数学三/总主编：新罗　本册主编：肖新玲．—济南：齐鲁书社，2008.6

ISBN 978-7-5333-2003-4

Ⅰ．2…　Ⅱ．肖…　Ⅲ．高等数学—研究生—入学考试—解题　Ⅳ．G643-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第054980号

2009年全国硕士研究生入学考试历年真题解析

数学三

总主编　新　罗

本册主编　肖新玲

出版发行	齊魯書社
社　　址	济南经九路胜利大街39号
邮　　编	250001
网　　址	www.qlss.com.cn
电子邮箱	qlss@sdpress.com.cn
印　　刷	山东新华印刷厂
开　　本	787×1092 /16
印　　张	14.25
插　　页	2
字　　数	356千
版　　次	2008年6月第1版
印　　次	2008年6月第1次印刷
标准书号	ISBN 978—7—5333—2003—4

定价：26.00元

总 主 编　新　罗
本册主编　肖新玲
本册编委　(以姓氏笔画为序)
刘广丽　肖新玲　张艳燕

前　言

有人说，“吃透真题，考研就成功了一半。”这是至理名言，因为历年真题最直接、最全面地显现着命题的方向趋势和基本原则。这也是广大考生对真题重视的原因所在。

“历年真题”，是最经典的试题，是命题专家认真研究分析考试大纲后形成的，既反映了考试大纲的基本要求，又蕴涵着命题的指导思想和发展趋势，是广大考生了解全国硕士研究生入学考试最直接的第一手资料，考生从中可直观地了解到硕士研究生入学考试的试题类型、考点分布和难易程度。

“历年真题”的构成最大限度地体现了考试大纲的基本精神，是检验考生对考试大纲理解和对基础知识掌握的标尺。考生对基础知识进行了一轮复习后，做一遍真题是对自己最好的检验。既能从中找到考研的信心，又能找出自己的不足，使以后的复习更有目的性和针对性，做到心中有数，了然于胸。因此，做一遍真题，本身就是一次收获。

由专家对“历年真题”进行解析，从中可看到解答问题的方法和规范，开阔解题思路，增强答题技巧，提高应试水平，最大限度地发挥自己的水平。有许多考生反映，该看的教材都看了，辅导书也读了不少，自认为对基础知识掌握得比较好，却考不出好的成绩来。这其中一个重要的原因就是答题技巧和应试水平的欠缺，通过看专家对历年真题的解析，可从根本上解决这一问题。

基于以上认识，我们编写了全国硕士研究生入学考试历年真题解析系列丛书。包括政治、英语、数学一、数学二、数学三、数学四、历史学、教育学、心理学、金融学联考、法律硕士联考、西医综合等12册，以期对广大考生有所帮助。

本书汇集了1996年至2008年历届全国硕士研究生入学考试数学三的试题，并根据评卷的基本原则进行了解析，供广大考生参考使用。希望考生能从中提取精华，受到启示，获得收益。起到举一反三、触类旁通的效果。解析时参考了多部大学经典教材和教学参考书，由于体例的原因未能在解析时一一注明，在此对教材和教学参考书的编写者表示衷心的感谢。

编　者
2008年3月

目　录

前　言 …… (1)

2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (1)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案与解析 …… (4)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (19)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案与解析 …… (23)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (37)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案与解析 …… (40)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (55)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案与解析 …… (58)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (72)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案与解析 …… (76)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (92)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案与解析 …… (96)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (110)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案与解析 …… (113)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (126)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案与解析 …… (130)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (143)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案与解析 …… (146)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (159)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案与解析 …… (162)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (175)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案与解析 …… (178)
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (190)
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案与解析 …… (193)
1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题 …… (207)
1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案与解析 …… (210)

2008年全国硕士研究生入学统一考试
数学三试题

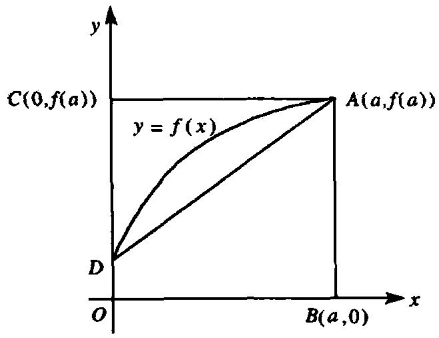
一、选择题(1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在答题纸指定位置上)

(1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续,则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的(　　).

(A) 跳跃间断点　　(B) 可去间断点

(C) 无穷间断点　　(D) 振荡间断点

(2) 如图,曲线段的方程为 $y=f(x)$,函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数,则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于(　　).



(A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积

(B) 梯形 $ABOD$ 的面积

(C) 曲边三角形 ACD 的面积

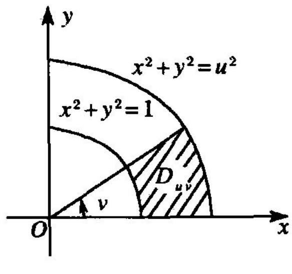
(D) 三角形 ACD 的面积

(3) 已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$,则(　　).

(A) $f'_x(0,0)$,$f'_y(0,0)$ 都存在　　(B) $f'_x(0,0)$ 不存在,$f'_y(0,0)$ 存在

(C) $f'_x(0,0)$ 存在,$f'_y(0,0)$ 不存在　　(D) $f'_x(0,0)$,$f'_y(0,0)$ 都不存在

(4) 设函数 f 连续.若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分,则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$(　　).



(A) $vf(u^2)$　　(B) $\dfrac{v}{u}f(u^2)$

(C) $vf(u)$　　(D) $\dfrac{v}{u}f(u)$

(5) 设 A 为 n 阶非零矩阵,E 为 n 阶单位矩阵,若 $A^3=\boldsymbol{O}$,则(　　).

(A) $E-A$ 不可逆,$E+A$ 不可逆　　(B) $E-A$ 不可逆,$E+A$ 可逆

(C) $E-A$ 可逆,$E+A$ 可逆　　(D) $E-A$ 可逆,$E+A$ 不可逆

(6) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$,则在实数域上与 A 合同的矩阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 X,Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为(　　).

(A)$F^2(x)$　　(B)$F(x)F(y)$

(C)$1-[1-F(x)]^2$　　(D)$[1-F(x)][1-F(y)]$

(8) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则(　　).

(A)$P\{Y=-2X-1\}=1$　　(B)$P\{Y=2X-1\}=1$

(C)$P\{Y=-2X+1\}=1$　　(D)$P\{Y=2X+1\}=1$

二、填空题(9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上)

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & |x|\leqslant c, \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c \end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续，则 $c=$ ________.

(10) 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$，则$\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

(11) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则$\displaystyle\iint_D(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

(12) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$ ________.

(13) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1,2,2,E 为 3 阶单位矩阵，则 $|4A^{-1}-E|=$ ________.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=EX^2\}=$ ________.

三、解答题(15 ~ 23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 9 分)

计算$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$

(16)(本题满分 10 分)

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq -1$.

(Ⅰ) 求 $\mathrm{d}z$；

(Ⅱ) 记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

(17)(本题满分 11 分)

计算$\displaystyle\iint_D\max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)=|\,0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

(18)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数.

(Ⅰ) 证明对任意的实数 t，有$\displaystyle\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$；

(Ⅱ) 证明 $G(x)=\displaystyle\int_0^x\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$ 是周期为 2 的周期函数.

(19)(本题满分 10 分)

设银行存款的年利率为 $r=0.05$,并依年复利计算.某基金会希望通过存款 A 万元实现第一年提取 19 万元,第二年提取 28 万元,…,第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元,并能按此规律一直提取下去,问 A 至少应为多少万元?

(20)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$,其中

$$A=\begin{bmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n\times n},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(Ⅰ)证明行列式 $|A|=(n+1)a^n$;

(Ⅱ)当 a 为何值时,该方程组有唯一解,并求 x_1;

(Ⅲ)当 a 为何值时,该方程组有无穷多解,并求通解.

(21)(本题满分 10 分)

设 A 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量,向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $A\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ)证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(Ⅱ)令 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,求 $P^{-1}AP$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$,$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$.

(Ⅰ)求 $P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}$;

(Ⅱ)求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本.记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

(Ⅰ)证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(Ⅱ)当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,求 DT.

2008年全国硕士研究生入学统一考试 数学三试题答案与解析

一、选择题(1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上)

(1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续,则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的(　　).

(A) 跳跃间断点　　(B) 可去间断点

(C) 无穷间断点　　(D) 振荡间断点

【思路点拨】本题的考点是间断点的分类.利用各类间断点的定义即可.

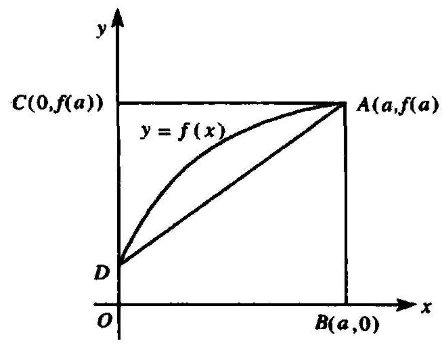
【解题分析】因为

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0} f(x)=f(0).$$

所以 $x=0$ 是函数 $g(x)$ 的可去间断点.

故选(B).

(2) 如图,曲线段的方程为 $y=f(x)$,函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数,则定积分 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于(　　).



(A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积

(B) 梯形 $ABOD$ 的面积

(C) 曲边三角形 ACD 的面积

(D) 三角形 ACD 的面积

【思路点拨】本题的考点是定积分的几何意义.定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,(b>a)$ 当 $f(x)\geqslant 0$ 时的值是曲线 $y=f(x)$,$x=a$,$x=b$ 及 $y=0$ 所围曲边梯形的面积.

【解题分析】由于

$$\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^a x\mathrm{d}f(x)==xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=af(a)-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

其中 $af(a)$ 是矩形 $OBAC$ 的面积,$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 是曲边梯形 $ABOD$ 的面积.

所以 $\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于曲边三角形 ACD 的面积.

故选(C).

(3) 已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则(　　).

(A) $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 都存在　　(B) $f'_x(0,0)$ 不存在，$f'_y(0,0)$ 存在

(C) $f'_x(0,0)$ 存在，$f'_y(0,0)$ 不存在　　(D) $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 都存在

【思路点拨】本题的考点是二元函数的偏导数. 对于偏导数的存在可以通过定义来判定，而且最终要归结为一元函数求导数.

【解题分析】由 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$ 知

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+0}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x}$$

当 $x>0$ 时

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=1,$$

当 $x<0$ 时

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}=-1,$$

由于

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x}\neq\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x},$$

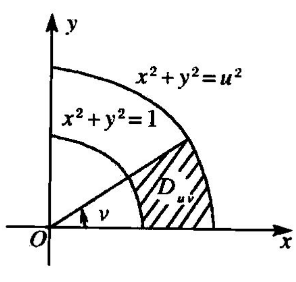
因此 $f'_x(0,0)$ 不存在.

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{0+y^4}}-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^{y^2}-1}{y}=0$$

所以 $f'_y(0,0)$ 存在.

故选(B).

(4) 设函数 f 连续. 若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分，则 $\frac{\partial F}{\partial u}=($　　$)$.



(A) $vf(u^2)$　　(B) $\frac{v}{u}f(u^2)$

(C) $vf(u)$　　(D) $\frac{v}{u}f(u)$

【思路点拨】本题的考点是二重积分的计算以及多元函数求偏导数.

若二重积分的被积函数出现 x^2+y^2 或者积分区域是圆域(或圆域的一部分)，通常会使用极坐标变换进行计算.

【解题分析】利用极坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，则区域 D_{uv} 变换为

$$D_{r\theta}=\{(r,\theta)\mid 1\leqslant r\leqslant u,\quad 0\leqslant\theta\leqslant v\}.$$

故

$$F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^v \mathrm{d}\theta\int_1^u\frac{f(r^2)}{r}r\,\mathrm{d}r=v\int_1^u f(r^2)\mathrm{d}r$$

所以

$$\frac{\partial F}{\partial u}=v\cdot f(u^2).$$

故选(A).

(5) 设 A 为 n 阶非零矩阵,E 为 n 阶单位矩阵,若 $A^3=\boldsymbol{O}$,则(　　).

(A)$E-A$ 不可逆,$E+A$ 不可逆　　(B)$E-A$ 不可逆,$E+A$ 可逆

(C)$E-A$ 可逆,$E+A$ 可逆　　(D)$E-A$ 可逆,$E+A$ 不可逆

【思路点拨】本题的考点是矩阵可逆的判断.矩阵 A 可逆的一个充分必要条件是 $|A|\neq 0$.

【解题分析】因为

$$\begin{aligned}E&=E^3-A^3=(E-A)(E+A+A^2)\\&=E^3+A^3=(E+A)(E-A+A^2)\end{aligned}$$

又 $|E|=1\neq 0$,所以 $|E-A|\neq 0$,$|E+A|\neq 0$.即 $E-A$,$E+A$ 均可逆.

故选(C).

(6) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$,则在实数域上与 A 合同的矩阵为(　　).

(A)$\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$　(B)$\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$　(C)$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$　(D)$\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

【思路点拨】本题的考点是实对称矩阵的合同.两个实对称矩阵 A、B 合同的充分必要条件是 A 与 B 的秩相等且有相同的正惯性指数.

【解题分析】$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=(\lambda-1-2)(\lambda-1+2)=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$

得 $\lambda_1=-1$,$\lambda_2=3$.

对于(A):$\begin{vmatrix}\lambda+2&-1\\-1&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2-1=(\lambda+3)(\lambda+1)=0$ 得 $\lambda_1=-1$,$\lambda_2=-3$;

对于(B):$\begin{vmatrix}\lambda-2&1\\1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2-1=(\lambda-3)(\lambda-1)=0$ 得 $\lambda_1=1$,$\lambda_2=3$;

对于(C):$\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2-1=(\lambda-3)(\lambda-1)=0$ 得 $\lambda_1=1$,$\lambda_2=3$;

对于(D):$\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=(\lambda-3)(\lambda+1)=0$ 得 $\lambda_1=3$,$\lambda_2=-1$.

故选(D).

(7) 设随机变量 X,Y 独立同分布,且 X 的分布函数为 $F(x)$,则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为(　　).

(A)$F^2(x)$　　(B)$F(x)F(y)$

(C)$1-[1-F(x)]^2$　　(D)$[1-F(x)][1-F(y)]$

【思路点拨】本题的考点是随机变量函数的分布. 由最大值函数的定义及随机变量 X、Y 独立同分布的性质可得.

【解题分析】$F(z)=P(Z\leqslant z)=P(\max\{X,Y\}\leqslant z)=P(X\leqslant z,Y\leqslant z)$

$$=P(X\leqslant z)P(Y\leqslant z)=F^2(z).$$

故选(A).

(8) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(1,4)$,且相关系数 $\rho_{XY}=1$,则(　　).

(A)$P\{Y=-2X-1\}=1$　　(B)$P\{Y=2X-1\}=1$

(C)$P\{Y=-2X+1\}=1$　　(D)$P\{Y=2X+1\}=1$

【思路点拨】本题的考点是两个正态分布的随机变量的相关性. 运用相关系数的定义、正态分布的性质、数学期望的性质可得结果.

【解题分析】用排除法.

设 $Y=aX+b$,由 $P_{XY}=1$ 知,X,Y 正相关,得 $a>0$,排除(A),(C).

因为 $X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(1,4)$ 所以 $EX=0$,$EY=1$.

又由数学期望的线性性 $E(Y)=E(aX+b)=aEX+b$.

即　$1=a\times 0+b$,$b=1$. 排除(B).

故选(D).

二、填空题(9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上)

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c\\ \dfrac{2}{|x|} & |x|>c\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,则 $c=$ ________.

【思路点拨】本题的考点是函数连续的定义. 函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 连续的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to c+}f(x)=\lim\limits_{x\to c-}f(x)=\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$.

【解题分析】由于要求 $f(x)$ 在 $x=c$ 连续. 且

$$\lim_{x\to c+}f(x)=\frac{2}{c},\lim_{x\to c-}f(x)=c^2+1$$

所以$\dfrac{2}{c}=c^2+1$　即　$c^3+c-2=0$.

因为奇数次多项式方程必有实根,且实根为方程中常数项的某一个因子(当首项系数为 1 时),故将 $c=\pm 1$,± 2 分别代入方程,知 $c=1$ 是根. 因此

$$c^3+c-2=(c-1)(c^2+c+2)=0.$$

因为 $c^2+c^1+2=0$ 的判别式 $\Delta=1^2-4\times 1\times 2=-7<0$,故方程 $c^2+c^1+2=0$ 无实根.

由此可知 c 只有一个实根 $c=1$,可验证当 $c=1$ 时,函数 $f(x)$ 在分界点 $x=1$ 处连续,进而在$(-\infty,+\infty)$内连续.

(10) 设 $f(x+\dfrac{1}{x})=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$,则$\displaystyle\int_2^{2\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x=$ ____________.

【思路点拨】本题的考点是定积分计算.由题目条件先求出 $f(x)$ 的解析式,再代入求定积分.

【解题分析】已知 $f(x+\frac{1}{x})=\frac{x+x^3}{1+x^4}=\frac{\frac{1}{x}+x}{\frac{1}{x^2}+x^2}=\frac{\frac{1}{x}+x}{(\frac{1}{x}+x)^2-2}$

令 $t=x+\frac{1}{x}$,则 $f(t)=\frac{t}{t^2-2}$.

所以

$$\int_2^{2\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_2^{2\sqrt{2}}\frac{x}{x^2-2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_2^{2\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}(x^2-2)}{x^2-2}=\frac{1}{2}\ln(x^2-2)\Big|_2^{2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{2}(\ln6-\ln2)=\frac{1}{2}\ln3.$$

(11) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1\}$,则 $\iint\limits_D(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

【思路点拨】本题的考点是二重积分的计算.为了简化计算,要充分考虑区域的对称性和被积函数的奇偶性.

【解题分析】由于区域 D 关于 x 轴对称,又函数 y 在 x 轴两边对应点的值互为相反数,所以

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

又由于区域 D 关于 $y=x$ 对称,故

$$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此

$$\iint\limits_D(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}.$$

(12) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$ ________.

【思路点拨】本题的考点是一阶齐次微分方程初值问题的求解.先用分离变量法求得齐次微分方程的通解,再代入初始条件求得特解.

【解题分析】由 $xy'+y=0$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}$,分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两边积分:$\ln|y|=-\ln|x|+\ln|c|$.

即
$$y=\frac{c}{x}$$

又 $y(1)=1$ 得 $c=1$.故 $y=\frac{1}{x}$.

(13) 设3阶矩阵A的特征值为1,2,2,E为3阶单位矩阵,则$|4A^{-1}-E|=$ ________.

【思路点拨】本题的考点是矩阵特征值的性质.通过矩阵运算求得$4A^{-1}+E$再求其行列式或者先求得$4A^{-1}+E$的特征值,再通过特征值求得其行列式.

【解题分析】解法一:因为A的特征值为1,2,2.故存在可逆矩阵P,使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}=B,\text{即 }A=PBP^{-1},A^{-1}=PB^{-1}P^{-1}.$$

又 $|4A^{-1}-E|=|4PB^{-1}P-E|=|4PB^{-1}P^{-1}-PEP^{-1}|$

$$=|P||4B^{-1}-E||P^{-1}|=|4B^{-1}-E|^2$$

且 $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&&\\&\frac{1}{2}&\\&&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.则 $|4A^{-1}-E|=\begin{vmatrix}3&&\\&1&\\&&1\end{vmatrix}=3.$

解法二:因为A的特征值为1,2,2,故A^{-1}的特征值为$1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}$,则$4A^{-1}-E$的特征值为3,1,1,所以$|4A^{-1}-E|=3$.

(14) 设随机变量X服从参数为1的泊松分布,则$P\{X=EX^2\}=$ ________.

【思路点拨】本题的考点是泊松分布的数学期望、方差及概率分布列.

【解题分析】因为X服从参数为1的泊松分布,$E(X)=1,D(X)=1$,又因为$DX=EX^2-(EX)^2$,所以$EX^2=2$.因此$P\{X=2\}=\frac{1\cdot e^{-1}}{2!}=\frac{1}{2}e^{-1}$.

三、解答题(15～23小题,共94分.请将答案写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分9分)

计算$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$.

【思路点拨】本题的考点是两个无穷小量比的极限.两个无穷小量比的极限常用的方法有洛必达法则,无穷小量代换等.本题采用后者比较简单.常用的无穷小代换有$(x\to 0)\sin x\sim x,\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x,\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2},\cos x\sim\frac{x^2}{2}$等.

【解题分析】解法一:

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{6x^2}\\&=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

解法二：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(1+\frac{\sin x}{x}-1)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

(16)(本题满分 10 分)

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq -1$.

(Ⅰ) 求 dz；

(Ⅱ) 记 $u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$.

【思路点拨】本题的考点是隐函数求导. 隐函数求导常用的方法有两种：一是公式法，由 $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y=f(x)$ 的导数为 $f'(x)=-\frac{F_x}{F_y}$(多元隐函数求偏导类似)；二是直接对方程两端关于自变量求导. 无论哪种方法，关键是分清哪些量是自变量，哪些量是因变量.

【解题分析】解法一：(Ⅰ) 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z-\varphi(x+y+z)$，

$$F'_x=2x-\varphi',F'_y=2x-\varphi',F'_z=-1-\varphi',$$

由公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F'_x}{F'_z},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F'_y}{F'_z},$$

得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'},$$

所以

$$\begin{aligned}
dz &= \frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\\
&= \frac{1}{1+\varphi'}[(2x-\varphi')dx+(2y-\varphi')dy].
\end{aligned}$$

(Ⅱ) 由于

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{1}{x-y}(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y})\\
&= \frac{1}{x-y}(\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}-\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'})\\
&= \frac{1}{x-y}\frac{2y-2x}{1+\varphi'}
\end{aligned}$$