■ 高等学校教材

微积分与数学模型

第二版 （上）

◯ 主　编　贾晓峰
◯ 副主编　魏毅强

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

微积分与数学模型

第二版

(上)

主　编　贾晓峰
副主编　魏毅强
编　委　张玲玲
李桂莲
张海峰
侯红卫

高等教育出版社

内容提要

本书第一版荣获2002年全国普通高等学校优秀教材二等奖。此次修订继续贯彻"启发应用意识,提高应用能力"的宗旨,对教材内容和习题均进行了认真修订和调整,注重培养学生的数学理论修养和应用能力。具体有以下特点:(1)增添数学模型教学内容,根据数学理论的进程,循序渐进地引入数学建模实践环节相关的内容,培养学生利用数学知识解决实际问题的能力;同时增加"科学论文初步知识",有意识地培养学生撰写数学建模论文的能力。(2)适当加入微积分经济应用方面的内容,拓宽学生的知识面,激发学生的学习兴趣。

上册共七章,包括:函数·初等模型、函数的极限与连续性、导数与微分、中值定理及利用导数研究函数性态、积分、积分模型及应用、函数逼近与无穷级数。本书可作为高等学校非数学类专业高等数学课程教材。

图书在版编目(CIP)数据

微积分与数学模型.上/贾晓峰主编.—2版.—北京:高等教育出版社,2008.6

ISBN 978-7-04-023888-4

Ⅰ.微… Ⅱ.贾… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 ②数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.O172 O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第048997号

策划编辑 张长虹 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 王凌波
责任绘图 尹文军 **版式设计** 马敬茹 **责任校对** 胡晓琪 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	北京新丰印刷厂		
		版　　次	1999年10月第1版
开　　本	787×960　1/16		2008年6月第2版
印　　张	26	印　　次	2008年6月第1次印刷
字　　数	480 000	定　　价	29.70元

物料号　23888-00

第二版前言

本教材第一版出版八年来，正值全国大学生数学建模竞赛活动的日益普及和深入，将数学建模思想融入大学数学主干课程的教学改革思路已越来越深入人心，逐渐成为大学数学教学改革的重要方面。

我们于2003年承担教育部“新世纪高等教育教学改革工程本科教育教学改革立项项目”之一的“将数学建模思想和方法融入大学数学主干课程教学中的研究与试验”项目的子课题，本书的修订再版是这一课题的主要成果之一。

本次修订的宗旨，仍以强调数学理论与应用相结合，替代原《高等数学》教材为出发点，一方面坚持并改善原教材的部分内容，以提高可读性，并适当增添数学建模的例题和习题，另一方面，修改第一版的部分内容、习题以及错漏之处。修订工作仍由贾晓峰任主编，负责修订思路及审阅全书内容，同时承担“科学论文初步知识”及第六章部分内容的修订工作。上册由魏毅强任副主编，负责审阅上册内容，并承担编写第一、二章的内容。下册由王希云任副主编，负责审阅下册内容，并承担编写第十一、十二章的内容。另外由张海峰负责编写第四、九章的内容；侯红卫负责编写第三、十章的内容；李桂莲负责编写第五、六章的内容；张玲玲负责编写第七章的内容；赵文彬负责编写第八章及附录（不包括习题答案）的内容。除以上人员外，还有戎文晋、郑婷兰参与了本书稿的校对。本教材承蒙多所高校使用并提出修改意见，在此表示感谢。修订中错漏之处在所难免，敬请指正。

编者

2007年11月

目　录

第一章 函数·初等模型

第一节 常量与变量·函数关系

一、常量与变量

客观世界是发展、变化的.事物发展变化有两种状态,相对静止的状态与显著变化的状态.这两种状态表现在数量上就有常量与变量之分.具体讲,在我们考虑的范围和尺度上,保持一定数值不变的量称为**常量**,可以取不同值而变化的量叫**变量**.

例如,物理学中的"常数"就是常量,数学中的圆周率 π 也是常量,这些常量一般认为不随着时间和位置的变化而变化,所以被用作尺度或标准来度量或表示其他数量.还有的量只在我们考虑的一定范围内静止不变,例如两站之间铁路列车上的载客数量及行李总质量、重力加速度 g 等,这些都可以称为常量.但丰富多采的客观世界和工程技术问题中,涉及的许多量都是不断变化的.例如:行驶的列车到前后两站的距离、列车的速度以及车上燃油存量都在不断改变.地球上同一地区的气温也在不断改变,股票交易所里的股票指数也永远是动荡不定的.这些我们都可以称为变量.

一般来说,常量和变量这两种概念是相对的.例如重力加速度 g,在较粗略的情形下,我们可认为地球表面物体的重力加速度是恒定不变的,但精确的测量表明,地表各地的重力加速度并不相等.又譬如在通常情况下,我们认为一个物品的尺度(如长度、面积、体积)和质量是不变的,但在很精确的测量中,这些量又随着环境、测量精度而改变.这些都说明常量与变量的概念是相对的.同一数量在不同问题中,既可能被当作常量对待,又可能被当作变量来对待,要看问题的具体情形而定.

在本书中,我们常用 a、b、c 等字母表示常量,而用 x、y、z 等字母表示变量.

二、几个实例

在客观世界中,变量的变化都不是独立的,而是遵循一定规律相互关联的.不同变量间常常具有某种相关的数量关系.把这些数量关系用图形、表格或数学

式子来表示，就为我们更好地把握和深入研究它们提供了方便. 为了说明这种关系，我们看几个实例：

例 1　在电子技术中，常会遇到各种波形. 如图 1.1 是"锯齿波"中的一个波形，横坐标表示时间 t，纵坐标表示电压 u. 从图上知道，电压 u 随时间 t 的变化而变化，在区间 $0 \leqslant t \leqslant 30$ 中，每给定一个 t 值，都有一个确定的 u 值与它对应. u 和 t 的关系也可以用数学表达式表示：

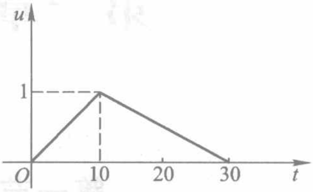

图 1.1

$$u = \begin{cases} \dfrac{1}{10}t, & 0 \leqslant t < 10 \\ \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{20}t, & 10 \leqslant t \leqslant 30 \end{cases}$$

像例 1 这样在不同区间上有不同表达式的变量关系在工程问题及经济学中很常见.

例 2　由实验测出某地区大气中空气密度 ρ 随着海拔高度 h 的变化情况如下表：

h (m)	0	500	1000	1500	2000	3000	4000
ρ (kg/m^3)	1.22	1.17	1.11	1.06	1.01	0.91	0.82

上表反映了 ρ 与 h 的依赖关系. 根据这个表，当 h 取表中某一值时，对应的 ρ 值也随之确定. 反之，当 ρ 取表中某值时，对应的 h 值也随之确定. 有一种在飞机上使用的高度计就是依照这一原理设计的.

例 3　图 1.2 是美国道 · 琼斯工业指数从 1976 年 12 月到 1977 年 3 月的变化情形. 由此图可以看出在这段时间中，股票指数随时间的变化.

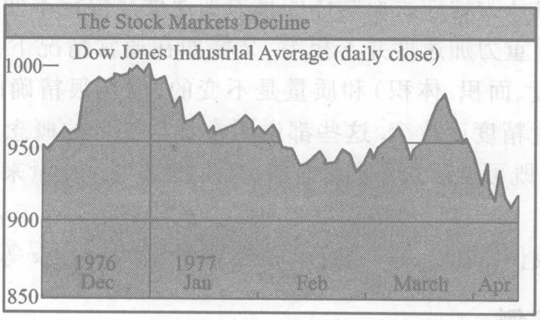

图 1.2

例 4　某企业的成本可分为两部分：一是不受业务量影响的部分（如设备折旧费等），称为**固定成本**；随业务量成正比例增长的另一部分称为**变动成本**. 该企业年固定成本总额为 1500 千元，产品单价为 10 千元，单位变动成本 6 千元，若产品可以全部售出，且税率依 10% 计算，试求企业保本经营的最低产销量（或称**盈亏临界点**）.

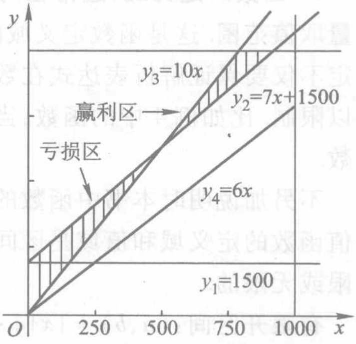

图 1.3

图 1.3 的横轴表示产品销售量，纵轴表示所发生费用. 设产量为 x，由图容易看出 $y_1 = 1500$ 为固定成本，企业总支出为

$$
\begin{aligned}
y_2 &= \text{固定成本} + \text{变动成本} + \text{税费} \\
&= 1500 + 6x + 10x \cdot 10\% \\
&= 7x + 1500
\end{aligned}
$$

销售总收入为 $y_3 = 10x$，总支出线与总收入线在 $y_2 = y_3$ 即 $x = 500$ 处相交，所以 $x < 500$ 为亏损区，$x > 500$ 为赢利区，$x = 500$ 为盈亏临界点.

该问题用盈亏临界图分析有利于直观地看出产品成本，利润依赖于产销量的各种变化情形，所以在企业经济活动分析中有着广泛的应用.

三、函数的定义

以上各例中，撇开各个数量的实际意义，可以发现这些问题最基本的共同点是：问题涉及两个变量，两变量间有一个确定的依赖关系（即对应法则），虽然对应规则的表达方式不同（可以采用解析表达式、表格、图像等），但是，当其中一个变量在某一范围内取值时，另一变量按照对应规则就有确定的值与之对应. 两个变量的这种对应关系实质上就是函数关系. 下面给出函数的定义：

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的数集，$x \in D$. 若对 D 中的每一个确定值 x，变量 y 按照一定的法则总有确定的值与之对应，则称 y 为 x 的函数，记作 $y = f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

如果 $x_0 \in D$，称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 有定义，并把 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 函数值的全体称为函数的**值域**，记作 W，即

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

关于函数，还有下列几点值得注意：

1. 由函数的定义，可以看出构成函数的基本要素有两个：一是**对应法则**或称**对应规律**，二是**定义域**.

若两个函数的对应法则和定义域都相同，则两函数相等，否则不能认为它们

是相同的函数.

2. **函数的定义域:通常在用解析式表示一个函数时,是使该式有意义的自变量取值范围**. 这是函数定义域的数学意义. 但对有实际意义的问题,定义域的确定不仅要保证解析表达式在数学上有意义,还要依照问题的实际意义进一步加以限制. 比如例 4 中的函数,当其自变量表示某月产销量时,就只能取非负的实数.

不另加说明时本书中函数的定义域均限制在实数范围内. 实自变量的许多实值函数的定义域和值域是区间或区间的组合,区间可以是开,闭或半开的以及有限或无限的.

有限开区间:$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$

有限闭区间:$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$

有限半开区间:$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$

$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$

无穷区间:$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$

$(a,+\infty)=\{x \mid a<x\}$

$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$

$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x\}$

$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$

此处记号 $-\infty$, $+\infty$ 及 ∞(无穷)只是为了用起来方便,并不意味着是一个数.

3. 函数的对应法则可以由表格、图像、解析式来表示. 在工程技术、经济活动中大量出现以表格形式表示的函数关系. 在平面直角坐标系 Oxy 中,记

$$P=\{(x,y) \mid y=f(x), x\in D_f\}$$

点集 P 称为**函数 $y=f(x)$ 的图形**. 以图像表示的函数关系由于最直观也常常被使用. 但由于解析表达式含义准确,且便于使用数学手段进行处理,对进行深入研究具有特别重要的意义,所以我们一般提到函数时,总假定它有一个解析表达式,可记为 $y=f(x)$ 或 $y=fx$ 等,其中"f"仅是一个对应关系的记号,f 与 x 也非乘积关系. 另外 f 也可用其他字母表示,如用 g,φ,y 等表示为:$y=g(x)$,$y=\varphi(x)$,$y=y(x)$ 等,在同一问题中讨论到几个不同函数时,需要用不同的函数记号加以区别.

4. 在函数定义域中,只说 y 总有确定的值与 x 对应,通常情形下,我们理解为 y 有唯一确定的值与 x 对应,这样的函数我们称为**单值的**. 若对自变量 x 的同一取值,函数 y 有不止一个值与之对应,我们称这样的函数为**多值的**. 例如,函数 $y=x^2$,$y=a^x$ 等都是单值函数,而圆 $x^2+y^2=r^2$ 上点的纵坐标 y 就与横坐标 x 形成双值对应,因为从圆方程中解出 y,可得

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}, \quad -r\leqslant x\leqslant r$$

对有限多值的函数,我们可以将其分为不同的**单值分支**进行研究,这样就能保持单值性.

5. 在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同表达式来表示的函数通常称为分段函数,如例 1 中的函数,又如

$$y=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0\\ x^2+1, & x<0\end{cases}$$

是一个函数(分段函数),它的定义域是$(-\infty,+\infty)$.分段函数有极其广泛的应用.

下面举几个函数例子.

例 5　函数

$$y=3$$

的定义域$D=(-\infty,+\infty)$,值域$W=\{3\}$,它的图形是一条平行 x 轴的直线,如图 1.4 所示.

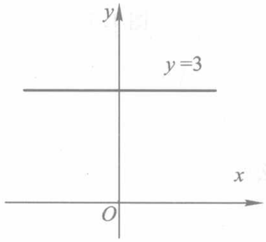

图 1.4

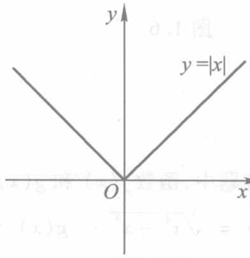

图 1.5

例 6　函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域$D=(-\infty,+\infty)$,值域$W=[0,+\infty)$,它的图形如图 1.5 所示.

例 7　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数,它的定义域$D=(-\infty,+\infty)$,值域$W=\{-1,0,1\}$,它的图形如图 1.6 所示.对任何函数 x,下列关系成立

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$$

例 8　设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数简称为 x 的最大整数,记作

$[x]$,例如$[\sqrt{2}]=1$,$[-1.3]=-2$,$[\pi]=3$,把x看作自变量,则函数

$$y=[x]$$

的定义域$D=(-\infty,+\infty)$,值域$W=Z$,它的图形如图1.7所示,这图形称为阶梯曲线,这个函数称为取整函数.

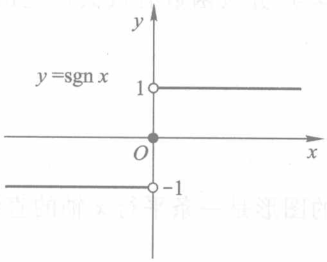

图1.6

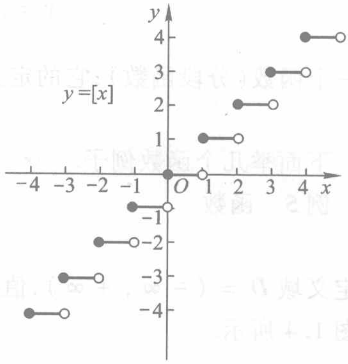

图1.7

习　题　1.1

1. 下列各题中,函数$f(x)$和$g(x)$是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$,　$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(2) $f(x)=\sqrt{x^3-x^2}$,　$g(x)=x\sqrt{x-1}$;

(3) $f(x)=\lg x^{\frac{2}{3}}$,　$g(x)=\frac{2}{3}\lg x$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\arcsin\frac{x-3}{4}$;　　(2) $y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{3}}$.

3. 已知$f(x)$的定义域为$[0,1]$,求$f(\lg x)$,$f(\sin x)$的定义域.

4. 设$f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$,证明$f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$.

5. 设$f(x)=\sqrt{2+x^2}$,求下列函数值:

$$f(0),f(-2),f(\frac{1}{a}),f(x_0),f(x_0+h)$$

6. 某公司生产一批产品.单位变动成本为12元,固定成本为90000元,产品出售单价为18元.

(1) 将总成本C表示为产量x的函数;

(2) 将总收入R表示为产量x的函数;

(3) 将总利润P表示为产量x的函数;

(4) 求该企业保本经营的最低产量.

第二节　函数的几种特性

有的函数具有某些特殊性质,掌握这些性质对研究函数很有帮助. 现分别介绍如下:

一、函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对任意 $x \in D$,

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立,则称函数 $y = f(x)$ 为**偶函数**,如果对任意 $x \in D$,

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立,则称函数 $y = f(x)$ 为**奇函数**. 例如:$y = x, y = x^3, y = \sin x$ 等都是奇函数,而 $y = x^2, y = x^4, y = \cos x$ 等都是偶函数. 而函数

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 5$$

既不是奇函数又不是偶函数,通常称为非奇非偶函数.

从几何上看(图 1.8),奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称(为什么?).

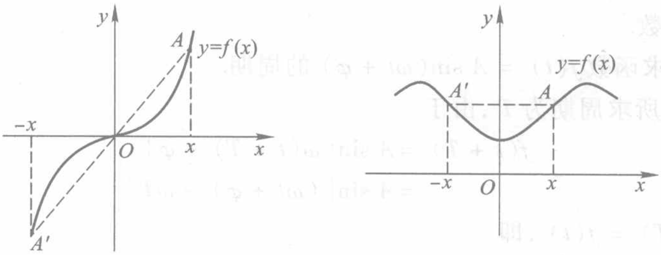

图 1.8

二、函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X \subset D$,若存在确定的实数 $M > 0$,使任一 $x \in X$ 所对应的函数值都满足 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**. 若这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

如果存在常数 M(不一定是正数),使对一切的 $x \in X$,恒有 $f(x) \leqslant M$ 则称 $f(x)$ 在 X 上有上界,且称 M 为 $f(x)$ 的一个上界. 易知任意一个 $M'(>M)$ 都是

$f(x)$在 X 上的一个上界；如果存在常数 m，使对一切的 $x\in X$，恒有 $f(x)\geqslant m$，则称$f(x)$在 X 上有下界，且称 m 为 $f(x)$ 在 X 上的一个下界. 易知任意一个 $m'(<m)$都是$f(x)$在 X上的一个下界.

显然，函数$f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是$f(x)$在 X 上既有上界又有下界.

例如，函数$f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的，因为对任何实数 x，$|\sin x|\leqslant 1$ 总成立. 而函数 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内是无界的，因为找不到这样的正数 M，使$|\tan x|<M$对$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$都成立. 但$y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$是有界的，因为当$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$时，$|\tan x|<1$.

三、函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为D. 若存在非零常数 T，使得对于任一$x\in D$，都有 $x+T\in D$，且$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$为**周期函数**，而 T 叫做$f(x)$的**周期**，显然，如果 $x+2T\in D$，则 $2T$ 也是$f(x)$的周期. 通常我们把函数的**最小正周期**称为函数的周期.

例如，$\sin x$ 与$\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数，而$\tan x$ 与$\cot x$ 都是周期为 π 的周期函数.

例 1　求函数$f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$的周期.

解　设所求周期为 T，由于

$$\begin{aligned}f(t+T)&=A\sin[\omega(t+T)+\varphi]\\&=A\sin[(\omega t+\varphi)+\omega T]\end{aligned}$$

要使$f(t+T)=f(t)$，即

$$A\sin[(\omega t+\varphi)+\omega T]=A\sin(\omega t+\varphi)$$

成立，只需

$$\omega T=2n\pi\ (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

所以$f(T)$的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

这就是说，$f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$是周期为$\dfrac{2\pi}{\omega}$的周期函数. 对以 T 为周期的周期函数，只需知道该函数在长度为 T 的区间上的表达式，即可得到该函数在任意区间上的表达式. 换句话说，只需知道该函数在长度为 T 的区间上的图形，即可得到该函数在任一区间上的图形. 由周期函数在长度为 T 的区间上的性质就能推知其在整个数轴上的性质，这一过程我们称之为**延拓**. 图 1.9 就是由函数 y

$=f(x)$ 在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 区间上的图形经延拓得到的.

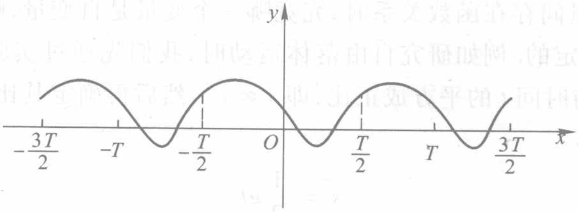

图 1.9

四、函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果在该区间上任取两点 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的或**单调增**;如果恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的或**单调减**.

单调增加或单调减少的函数,统称为**单调函数**.

从几何上看,单调增函数的曲线由左下方上升到右上方,而单调减函数的曲线由左上方下降到右下方(图 1.10).

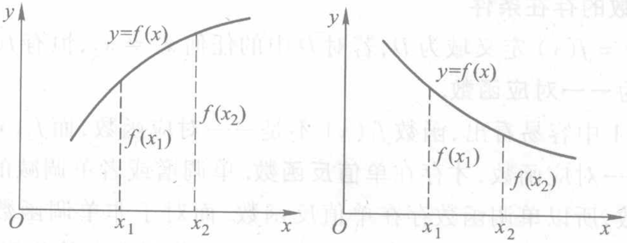

图 1.10

例 2　讨论函数 $y=x^2$ 的单调性.

解　自变量 x 取任意两个值 x_1 和 x_2,$x_1<x_2$,则

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$$

当 $x_1<x_2\leqslant 0$ 时,$f(x_2)-f(x_1)<0$,即 $f(x_2)<f(x_1)$,所以在 $(-\infty,0]$ 函数单调减少. 当 $0\leqslant x_1<x_2$ 时,$f(x_2)-f(x_1)>0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,所以在 $[0,+\infty)$ 函数单调增加. 而在 $(-\infty,+\infty)$ 内,函数 $f(x)=x^2$ 是非单调的.

研究函数的单调性是很重要的,对一般函数单调性的讨论,我们将在第四章中进行.