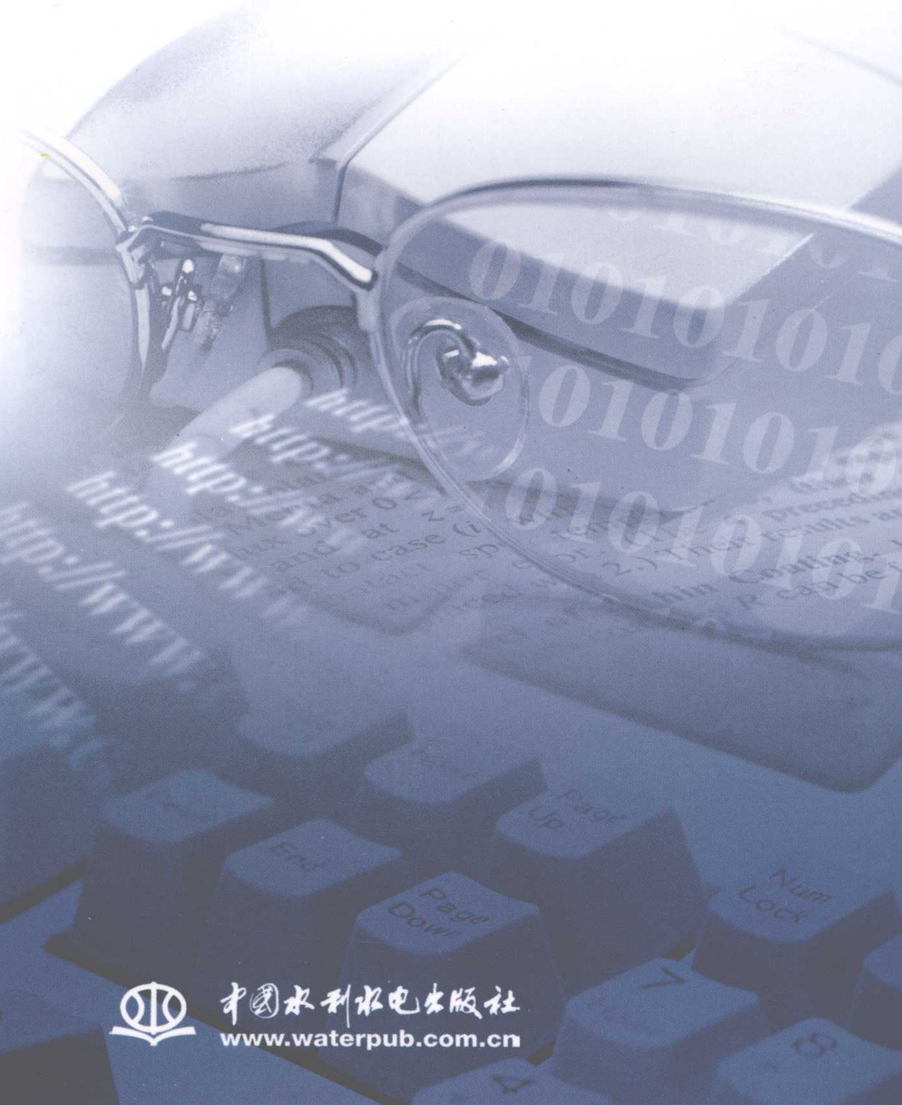
21世纪高职高专规划教材

大学数学(上册)

主　编　刘创宇　副主编　毛建生　姚艳文

21SHIJIGAOZHIGAOZHUANGUIHUAJIAOCA



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

21世纪高职高专规划教材

大学数学

（上册）

主　编　刘创宇

副主编　毛建生　姚艳文

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是高等学校大学数学公共基础课的教材，是作者在总结多年教学经验的基础上，专门针对高职高专学生编写的教材。全书分上、下两册。上册内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、无穷级数等 7 章；下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、行列式、矩阵、线性方程组、概率、数理统计初步等 7 章。每章有习题和复习题以及答案。

本书适用于高职高专工科类或经济管理类各专业，也可作为“专升本”考试培训教材，还可作为职业大学、成人大学和自学考试的教材或参考书。

本书配有免费电子教案，读者可以从中国水利水电出版社网站下载，网址为：http://www.waterpub.com.cn/softdown/。

图书在版编目（CIP）数据

大学数学．上册 / 刘创宇主编．—北京：中国水利水电出版社，2008

21 世纪高职高专规划教材

ISBN 978-7-5084-5447-4

Ⅰ．大…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 094092 号

书　　名	大学数学（上册）
作　　者	主　编　刘创宇 副主编　毛建生　姚艳文
出版　发行	中国水利水电出版社（北京市三里河路 6 号　100044） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）63202266（总机）、68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京市天竺颖华印刷厂
规　　格	184mm×260mm　16 开本　总 32.75 印张　总 836 千字
版　　次	2008 年 7 月第 1 版　2008 年 7 月第 1 次印刷
印　　数	0001—3000 册
总 定 价	56.00 元（上、下册）

前　　言

本书是高职高专规划教材，是根据教育部最新制定的《高职高专教育数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，并参考《全国各类成人高等学校专科起点本科班招生复习考试大纲（非师范类）》编写的。全书分上、下两册，适用于高职高专工科类或经济管理类各专业，也可以作为“专升本”考试培训教材，还可以作为职业大学、成人大学和自学考试的教材或参考书。

本书内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、微分方程、无穷级数、行列式、矩阵、线性方程组、线性经济模型简介、概率、数理统计初步等。

各章内容分模块、分层次编排，供工科类和经济管理类专业选用，每章后编有复习题。

本书遵循高等教育的教学规律，坚持“以应用为目的，以必须够用为度，以可读性为基点，以创新为导向”的编写原则，具有以下特色：

第一，针对现行普高和中职新数学教材编写，突出了初等数学与高等数学的紧密衔接。在第 9 章二重积分部分增补了极坐标，在第 8 章向量与空间解析几何部分删减了部分向量内容等，使初等数学与高等数学衔接得更加紧密。

第二，针对现代教育以学生为主体的理念编写，有较强的可读性。在引进数学概念时，尽量借助几何直观图形、物理意义和生活背景来进行解释，力使抽象的数学概念形象化、直观化、通俗化，切合学生的实际。为降低难度，在论证或解题时，设置了渐进式的思维层次，保留了合适的推理细节，一读就懂。对较难的概念设置为模块，学习时可忽略，不影响系统性，如 ε-N 语言，ε-δ 语言，微分中值定理的证明等，因此不会对学习产生障碍。

第三，针对高职高专各专业的实际编写，有较强的选择性。高职高专教育专业繁多，且差异较大，为了适应各专业使用，对全部内容做了分层处理，选定各专业都必须使用的基本内容作为基本层，在此基础上用模块进行组装，构造出不同层次，如在第 1 章中编写了“建立函数关系举例”和“经济学中常用的函数”，在第 2 章中编写了“导数的经济学意义”和“二阶导数的力学意义”模块等，使本书既适用于理工科类专业，也适用于经济管理类各专业，还适用于各类“专升本考试”培训，弹性大，可选择性强。

第四，针对高职高专的培养目标编写，有较强的实用性。高职高专教育主要培养生产第一线的应用型高级技术人才，为了实现这一目标，本书在理论和计算方面降低了难度，但在数学的应用和使用现代信息技术手段方面进行了充实和强化。

本教材的基本教学时数约为 110 学时，标有*号的内容另行安排课时。

编写本套教材的教师有刘创宇、毛建生、姚艳文、刘仁云、朱勤、沈荣泸、熊开明、兰庭忠、陈明灿、李涛、张玲、邓敏英。他们有丰富的教学经验，教材的内容正是他们长期的教学讲义，他们既深知我国高职高专教育发展的现状，又了解本学科教与学的具体要求，为保证编写质量，对编写大纲进行了反复修改、讨论，并推选了一批教学水平高又有长期教材编写经验的老师参与教材的编写和审定。在本书的编审过程中，得到了泸州职业技术学院电子信息工

程系领导的大力支持，数学教研室的教师提出了许多有益的建议，谨在此表示衷心感谢！

由于成书仓促，编审人员水平有限，不足之处，请有关专家、学者及使用本书的老师指正。我们诚恳地希望各界同仁及广大教师关注并支持这套教材的建设，及时将教材使用过程中遇到的问题和改进意见反馈给我们，以供修订时参考。

编 者

2008 年 6 月

目　　录

上册

下册

第 1 章　函数、极限与连续

微积分是研究变量以及变量间函数关系的一门学科．极限概念是微积分的重要基本概念之一，微积分的其他重要概念，如导数、微分、积分等，都是用极限表述的，并且它们的主要性质和法则也是通过极限方法推导出来的．本章将在我们已学习过的函数的基础上进行系统复习和必要补充，再介绍极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质，为以后各章的学习做准备．

§ 1.1　函数

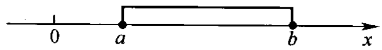
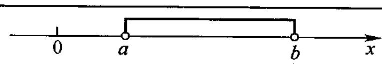
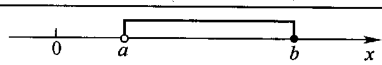
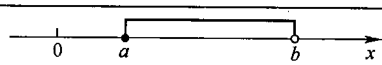
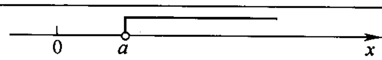
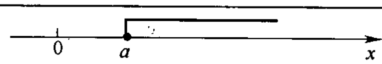
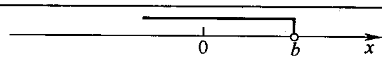
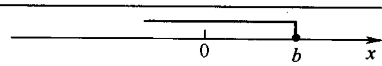
1．常量与变量

在研究实际问题时，我们会遇到各种各样的量，如长度、面积、体积、时间、距离、速度等．在某个过程中，保持不变的量叫做常量，可以取不同值的量叫做变量．例如，在货物的调运过程中，火车运行的时间、速度、距离等是变量，而运载的货物的重量是常量．

注意：一个量是常量还是变量，要根据具体情况做出具体分析．例如，在自由落体运动中，在一定高度之内重力加速度可以看做常量，但当超过一定高度时，重力加速度则应看做变量．

通常用字母 a，b，c 等表示常量，用字母 x，y，z 等表示变量．

对于某个问题来说，一个变量只能在一定的范围内取值．为了简单起见，变量的取值范围常用区间表示．常用的区间有以下几种(a，$b\in$R, $a<b$)：

名称	记号	集合表示法	图示
闭区间	$[a,b]$	$\{x\|a\leqslant x\leqslant b\}$	
开区间	(a,b)	$\{x\|a<x,b\}$	
半开半闭区间	$(a,b]$	$\{x\|a<x\leqslant b\}$	
	$[a,b)$	$\{x\|a\leqslant x<b\}$	
无穷区间	$(a,+\infty)$	$\{x\|a<x<+\infty\}$	
	$[a,+\infty\}$	$\{x\|a\leqslant x<+\infty\}$	
	$(-\infty,b)$	$\{x\|-\infty<x<b\}$	
	$(-\infty,b]$	$\{x\|-\infty<x\leqslant b\}$	
	$(-\infty,+\infty)$	$\{x\|-\infty<x<+\infty\}$	

以后，当不需要指明是哪一类区间时，我们就简单地称它为“区间”，且常用字母 I 表示．

我们把开区间$(\alpha-\delta,\alpha+\delta)(\delta>0)$叫做点 α 的 δ 邻域，α 叫做邻域的中心，δ 叫做邻域的半径（图 1-1）．

点 α 的 δ 邻域可用不等式表示为 $\alpha-\delta<x<\alpha+\delta$. 对该不等式中各式同时加上$-\alpha$，得$-\delta<x-\alpha<\delta$，它等价于绝对值不等式$|x-\alpha|<\delta$.例如$|x-3|<0.01$ 表示以 3 为中心、以 0.01 为半径的邻域，它就是开区间(2.99,3.01).

如果在点 α 的 δ 邻域中去掉 α，所得集合为$(\alpha-\delta,\alpha)\cup(\alpha,\alpha+\delta)$，则称它为点 α 的去心 δ邻域（图 1-2）.

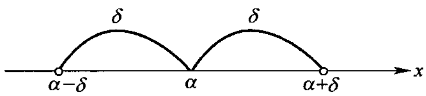


图 1-1

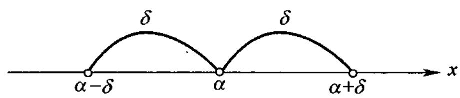


图 1-2

2. 函数的概念

一般来说，在一个问题中往往同时有几个变量在变化着，这几个变量并不是孤立地在变，而是直接或间接地相互联系而又相互制约的．它们之间这种相互依赖的关系刻画了客观世界中事物变化的内在规律，这种规律用数学进行描述，就是函数关系.

看下面两个实际例子：

例 1 对圆的面积 A 与它的半径 r 进行考察，我们得到这两个变量间的相依关系由公式 $A=\pi r^2$ 确定．当半径 r 在区间$(0,+\infty)$内任意取定一个数值时，根据上述公式，变量 A 都有唯一确定的值和它对应.

例 2 在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s，并假定开始下落的时刻为 $t=0$，则变量 s 与 t 之间的相依关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

确定，其中 g 为重力加速度．如果物体着地的时刻为 $t=T$，则当时间 t 在闭区间$[0,T]$上任意取定一个数值时，根据上述公式，变量 s 都有唯一确定的值和它对应.

由以上两例，我们抽象出函数的概念.

定义 设 x，y 是两个变量，D 是一个实数集．如果对于 D 内的每一个数 x，按照某个对应法则 f，变量 y 都有唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$．x 叫做自变量，y 叫做因变量，实数集 D 叫做这个函数的定义域.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，x_0 与相对应的 y 的值叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$.函数 $y=f(x)$ 所有函数值的集合 $M=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 叫做函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应法则的记号 f 也可以改用别的字母，如“g”“φ”“F”等，这时函数就记作 $y=g(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=F(x)$等．当同时考察几个不同的函数时，就需要用不同的函数记号以示区别.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.如，例 1 中，定义域$D=(0,+\infty)$；例 2 中，定义域 $D=[0,T]$.

但在数学上作一般性研究时，对于只给出表达式而没有说明实际背景的函数，我们规定：函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

例 3 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{4}{x^2-1}$；（2）$y=\sqrt{6+x-x^2}+\ln(x+1)$.

解 （1）$x^2-1\neq0$，$x\neq\pm1$，所以定义域为 $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

（2）$\begin{cases}6+x-x^2\geqslant 0\\ x+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 3\\ x>-1\end{cases}$，所以定义域为 $x\in(-1,3]$.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 对于任意取定的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$，则以 x 为横坐标、y 为纵坐标，就确定了平面上的一点(x,y). 当 x 遍取 D 上的数值时，就得到点(x,y)的一个集合

$$G=\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\}.$$

这个点的集合 G 叫做函数 $y=f(x)$的图像（图 1-3）.

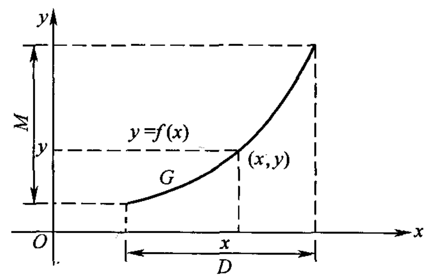


图 1-3

例 4　求下列函数的定义域、值域，并作出其图像：

（1）$y=f(x)=4$；

（2）$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x,x\geqslant 0,\\ -x,x<0.\end{cases}$

解

（1）因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，

变量 y 都有唯一确定的值 4 和它相对应，即函数都有定义，所以这个函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=\{4\}$. 它的图像是一条平行于 x 轴的直线（图 1-4）.

（2）函数的定义域 $D=(-\infty,0)\cup[0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=[0,+\infty)$. 它的图像如图 1-5 所示.

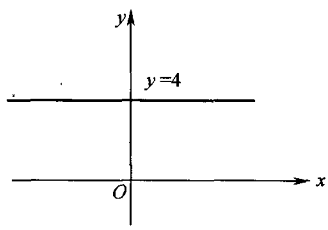


图 1-4

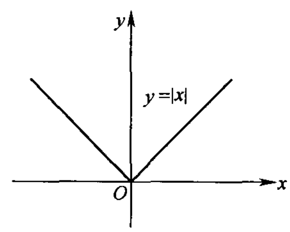


图 1-5

由函数的定义知，一个函数是由它的定义域 D 和对应法则 f 唯一确定的. 因此，如果两个函数的定义域与对应法则相同，则这两个函数就是相同的（或相等的），否则就是不同的. 如果两个函数相同，则它们的自变量和因变量用什么字母表示，是无关紧要的.

例如，$y=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$与 $u=v^2$，$v\in(-\infty,+\infty)$表示同一个函数.

例 5　下列各对函数是否相同？为什么？

（1）$f(x)=2x$，$g(x)=\dfrac{2x^2}{x}$；

（2）$f(x)=1$，$g(x)=\sin^2 3x+\cos^2 3x$；

（3）$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$.

解

（1）不相同，因为 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$g(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，它们的定义域不同，所以不是同一个函数.

（2）相同. 因为 $f(x)$与 $g(x)$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$，且对同一个 x，有 $1=\sin^2 x+\cos^2 x$，即对应法则相同，所以 $f(x)$与 $g(x)$是同一个函数.

（3）不相同. 虽然两个函数的定义域都是$(-\infty,+\infty)$，但对应法则不同，例如当 $x=-1$ 时，$f(-1)=-1$，$g(-1)=1$，不相等.

下面讨论两个常用的函数.

例 6 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

叫做符号函数. 它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=\{-1,0,1\}$，它的图像如图 1-6 所示.

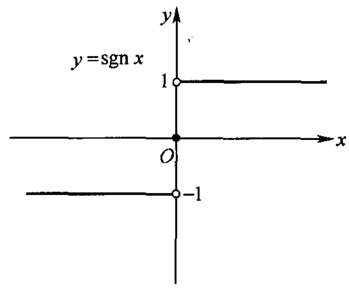


图 1-6

例 7 设 x 为任一实数，$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如

$$\left[\frac{1}{2}\right]=0,\ [\sqrt{3}]=1,\ [-2]=-2,\ [\pi]=3,\ [-\pi]=-4.$$

我们把函数

$$y=[x]$$

叫做取整函数. 它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=\mathbf{Z}$. 它的图像如图 1-7 所示.

我们看到，有时一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数.

例如，函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1+x, & 0\leqslant x,\\ 1-x, & -1\leqslant x<0\end{cases}$$

是一个分段函数. 它的定义域 $D=[-1,0]\cup[0,+\infty]=[-1,+\infty]$. 当 $x\in[-1,0]$时，对应的函数表达式为 $f(x)=1-x$；当 $x\in[0,+\infty)$ 时，对应的函数表达式为 $f(x)=1+x$. 例如，因为 $-\dfrac{1}{2}\in[-1,0)$，所以 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$；因为 $0\in[0,+\infty)$，所以 $f(0)=1+0=1$；因为 $1\in[0,+\infty)$，所以 $f(1)=1+1=2$. 函数的图像如图 1-8 所示.

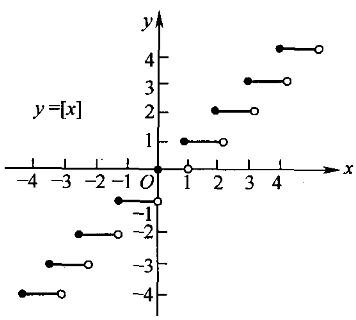


图 1-7

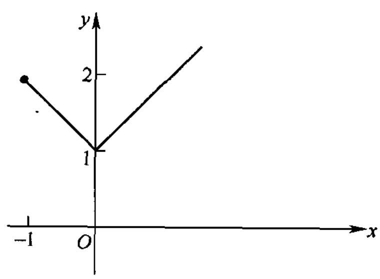


图 1-8

分段函数在自然科学和工程技术中有着重要的应用.

习题 1-1

1. 用区间表示下列变量的变化范围：

（1）$-2<x<7$； （2）$x\geqslant 0$；

（3）$x^2>2$；　　（4）$|x-2|\leqslant 3$.

2．下列各对函数是否相同？为什么？

（1）$f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$；　　（2）$f(x)=x-1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$；

（3）$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}$；　　（4）$f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$.

3．求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{x+1}$；　　（2）$y=\sqrt{3x-4}$；

（3）$y=\dfrac{1}{x^2-3x}$；　　（4）$y=\sqrt{x^2-16}$；

（5）$y=\dfrac{1}{x+2}+\sqrt{x+5}$；　　（6）$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

（7）$y=\dfrac{1}{x-1}+\lg(x+1)$；　　（8）$y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

4．设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$．求 $f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，$f(x_0)$，$f(x_0+h)$.

5．设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(-x)$，$f(x+1)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

6．设 $y=\begin{cases}1-x, x\leqslant 1,\\ 1+x, x>1.\end{cases}$ 求 $f(-1)$，$f(\pi)$，$f(-\sqrt{2})$，并作出函数的图像.

7．设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 求 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

8．求函数 $y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的定义域和值域.

§1.2　函数的几种特性

1．函数的奇偶性

定义 1　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称．如果对于任一 $x\in D$，都有

$$f(-x)=-f(x)$$

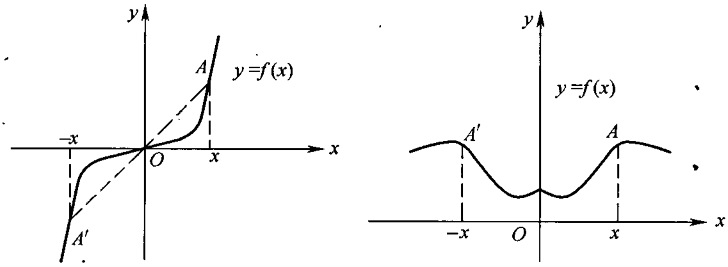
成立，则称 $f(x)$ 为奇函数．如果对于任一 $x\in D$，都有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如，函数 $f(x)=x^3$ 是奇函数，因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$．函数 $f(x)=x^4$ 是偶函数，因为 $f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$．函数 $f(x)=x^2+x^3$ 既不是奇函数，也不是偶函数，因为它不满足定义的条件.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称（图 1-9）.



（1）　　（2）

图 1-9

2. 函数的单调性

定义 2　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subseteq D$．如果对于区间 I，上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，都有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的（图 1-10），区间 I 称为单调增加区间；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，都有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的（图 1-11），区间 I 称为单调减少区间．单调增加和单调减少的函数统称为单调函数，单调增加和单调减少区间称为单调区间．

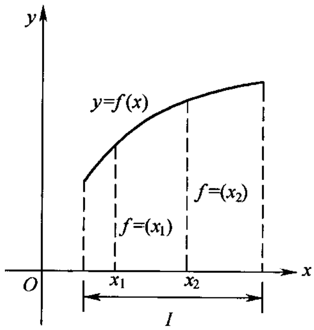


图 1-10

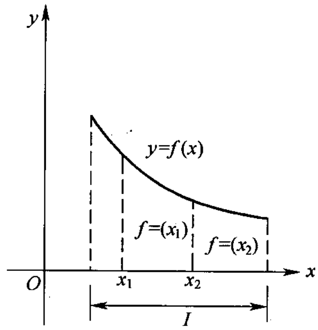
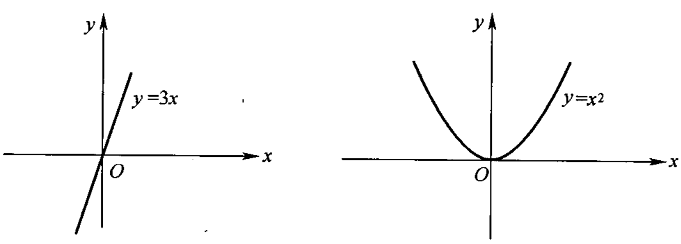


图 1-11

例 1　讨论函数 $y = 3x$，$y = x^2$ 的单调性．

解　观察图 1-12 可知，函数 $y=3x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的；函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的，在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的．



（1）　　（2）

图 1-12

例 2　证明函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的.

证　任取两点 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$，有

$$f(x_2)-f(x_1)=\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)\left(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}\right)}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}},$$

因为 $x_1<x_2$，所以 $x_2-x_1>0$．又 $\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}>0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$，所以 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的.

3. 函数的有界性

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subseteq D$．如果存在正数 M，使得对任一 $x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M.$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有界．如果这样的正数 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在区间 I 内无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为取 $M=1$，对于任一 $x\in(-\infty,+\infty)$，总有 $|\sin x|\leqslant M$．类似地，函数 $y=\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内也有界．但函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，因为对任意取定的一个正数 M，不能使得 $\left|x^2\right|\leqslant M$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内都成立.

注意：函数是否有界与所给的区间有关．例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内有界，但在区间 $(0,1)$ 内是无界的.

4. 函数的周期性

定义 4　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D．如果存在一个不为零的数 l，使得对任一 $x\in D$．有 $(x\pm l)\in D$．且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，l 称为函数 $f(x)$ 的周期．通常，周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数；函数 $y=x^2$ 不是周期函数.

很明显，对于周期函数的性态，只需在长度等于周期 l 的任—个区间上考虑即可.

从几何上看，以 l 为周期的周期函数的图像在每个长为 l 的区间上的图像都是一样的（图 1-13）．因此，作周期函数的图像，只要作出任意一个周期内的一段曲线，再将它从区间的两端延伸出去即得.

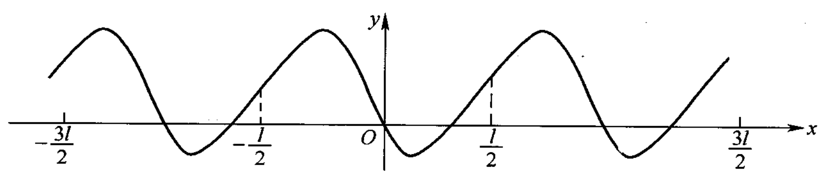


图 1-13

习题 1-2

1．指出下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些既不是奇函数也不是偶函数?

（1）$f(x)=x^4-2x^2-3$；（2）$f(x)=x^2\cos x$；

（3）$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{5}$；（4）$f(x)=\dfrac{2e^x+e^{-x}}{4}$；

（5）$f(x)=\sin x+\cos x-2$；（6）$f(x)=x(x-1)(x+1)$．

2．下列函数中哪些是周期函数?对于周期函数，指出其周期.

（1）$y=\sin(x-\pi)$；（2）$y=3\cos 2x$；

（3）$y=\sin\pi x-3$；（4）$y=x^2\tan x$．

3．设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$上的．证明：

（1）两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

（2）两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数；

（3）定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和．

4．证明函数$y=\dfrac{1}{x}$在区间(-1,0)内单调减少．

5．证明函数$y=\lg x$在区间$(0,+\infty)$内单调增加．

6．下列函数中哪些函数在区间$(-\infty,+\infty)$内是有界的?

（1）$y=3\sin^2 x$；（2）$y=\dfrac{1}{1+\tan x}$．

§1.3 反函数

在研究两个变量之间的函数关系时，可根据问题的实际需要选定其中一个作为自变量，另一个为函数．

例如，在商品销售中，已知某种商品的价格为p，销售量为x，销售收入为y．当已知销售量x求销售收入y时，则根据关系式$y=px$即可求得，这里x是自变量，y是因变量，y是x的函数；反之，如果已知销售收入y，求对应的销售量x时，根据$y=px$可解得关系式$x=\dfrac{y}{p}$，则给定y值，可求得对应的x值．这时y是自变量，x是因变量，x是y的函数．我们称$x=\dfrac{y}{p}$为$y=px$的反函数．

定义 5 设函数$y=f(x)$的定义域为D，值域为M．如果对于M中的每一个y值($y\in M$)，都可以从关系式$y=f(x)$确定唯一的x值与之对应，则所确定的以y为自变量的函数$x=\varphi(y)$叫做函数$y=f(x)$的反函数，常记作$x=f^{-1}(y)$．这个函数的定义域为M，值域为D．相对于反函数$x=\varphi(y)$来说，原来的函数$y=f(x)$叫做直接函数．

习惯上，函数的自变量都用x表示，因变量用y表示，所以，反函数通常表示为$y=f^{-1}(x)$．

例 1 求函数$y=\dfrac{1}{2}x+2$的反函数，并在同一个平面直角坐标系中作出它们的图像．

解　由 $y=\dfrac{1}{2}x+2$ 解得 $x=2y-4$，所以 $y=\dfrac{1}{2}x+2$ 的反函数是 $y=2x-4$.

直接函数 $y=\dfrac{1}{2}x+2$ 的图像是过点(0,2)和点(–4,0)的直线，其反函数 $y=2x-4$ 的图像是过点(2,0)和点(0,–4)的直线（图 1-14）.

从图 1-14 可以看到，直接函数 $y=\dfrac{1}{2}x+2$ 的图像与反函数 $y=2x-4$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的．一般地，由图 1-15 可以看出：函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

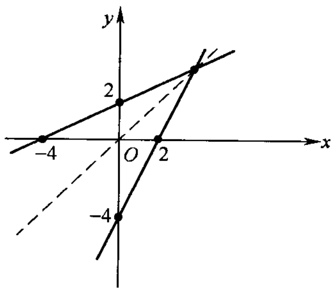


图 1-14

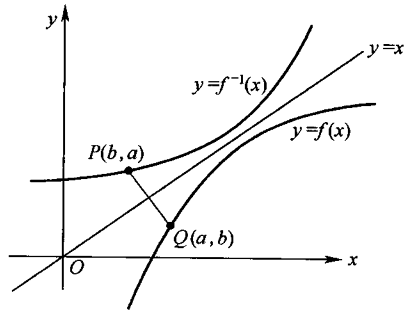


图 1-15

例 2　求函数 $y=\ln(x+2)-1$ 的反函数.

解　由 $y=\ln(x+2)-1$ 解得

$$\ln(x+2)=y+1,\ \ x+2=\mathrm{e}^{y+1},\ \ x=\mathrm{e}^{y+1}-2.$$

即函数 $y=\ln(x+2)-1$ 的反函数为 $y=\mathrm{e}^{x+1}-2$.

由反函数的定义知，如果函数 $y=f(x)$ 有反函数，则 x 与 y 的取值是一一对应的．据此，可判定一个函数是否存在反函数.

例 3　讨论函数 $y=x^2$ 的反函数.

解　函数 $y=x^2$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=[0,+\infty)$．因为

$$x=\pm\sqrt{y},$$

所以，任取 $y\in[0,+\infty)$ $(y\neq 0)$，有两个 x 值与之对应（图 1-16）．所以 x 不是 y 的函数．即函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上不存在反函数.

在上例中，如果只考虑函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的反函数，则由 $y=x^2$，$x\in[0,+\infty)$ 解得

$$x=\sqrt{y},$$

即 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上存在反函数 $y=\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$．同理，函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上存在反函数 $y=-\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$.

看图 1-16 知，在这两种情形中，函数在所限定的区间内都是单调的．一般地，有下述反函数存在定理.

定理　设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域是 M．如果函数 $y=f(x)$ 在 D 上是单调增加（或减少）的，则它必存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，$x\in M$，且反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在 M 上也是单调