高等数学

（第三册）

欧维义　陈维钧　金德俊　编

吉林大学出版社

高 等 数 学

第 三 册

欧维义 陈维钧 金德俊 编

吉 林 大 学 出 版 社

高 等 数 学

（第三册）

欧维义 陈维钧 金德俊 编

吉林大学出版社出版 吉林大学印刷厂印刷

吉林省新华书店发行

850×1168 大32开 12.5印张 310,000字

1987年5月第1版 1987年5月第1次印刷

印数：1－6500册

ISBN 7－5601－0015－5/O·2

统一书号：13323·21 定价：2.40元

出版说明

根据教学需要，我们出版了这套《吉林大学本科生教材》，这套教材适合高等学校本科生基础课或选修课的教学，由我社逐年陆续出版。

吉林大学出版社

序

《高等数学》一书共四册。第一册讲一元微积分和空间解析几何；第二册讲多元微积分和场的数学描写方法；第三册讲级数和常微分方程；第四册讲线性代数。

本教材在课程结构上，我们加强了那些有较深远影响的基本概念、理论和方法（如极限概念、中值定理、泰勒公式、微元法、场的数学描写方法和级数理论等等）。

在应用方面，我们注重物理、力学对数学的渗透，并尽可能地使学生获得应用方面的信息。

在培养能力方面，关键是培养学生有效地使用数学工具。为达到这个目的，重要的途径是解题。多解题才能培养学生的运算能力、抽象思维能力和解决实际问题的能力。为此，在本教材各节之后，多数都配备了A、B、C三类习题。一般说，A类题是理解和消化所学内容的基本题；B类题是体现课程要求的中挡题；C类题则是培养学生思维能力、综合能力和技巧的选作题。

总之，本教材在加强基础、培养能力方面都做了一些新的探索。希望在同样的教学时间内，获得更好的教学效果。

在编写教材的过程中，得到我们的老师江泽坚教授、李荣华教授、吴智泉教授的指导和帮助；得到赵为礼、王毅、潘吉勋、宋玉琦等同志的帮助。在此，谨向他们致以谢意。

由于编者水平有限，错误和不妥之处，敬请读者指正和批评。

编　　者

1986年4月于吉林大学

目　　录

第一篇　无穷级数

无穷级数是数学分析的一个分支。它与微积分一起构成数学分析的两个基础分支，二者共同以极限为基本工具，分别从连续与离散两个方面，结合起来研究函数及其应用。

无穷级数，第一是研究无穷项的求和与分解；第二是研究无穷和保存着有限和的哪些性质，或者说有限和的一些性质在什么条件下能够传递给无穷和。这里，一个是收敛问题，一个是性质问题，就是级数研究中的两个基本问题。

无穷求和与分解来自实践。比如，单位圆域 K_1 的面积 s，可以表成

$$s = p_1 + p_2 + \cdots + p_n + \cdots \tag{1}$$

其中 p_1 是 K_1 的内接正四边形 $ABCD$ 的面积（图 1）；p_2 是弧 $\widehat{AB}$，$\widehat{BC}$，$\widehat{CD}$，$\widehat{DA}$ 的中点 E，F，G，H 与 A，B，C，D 的连线而成的四个三角形（ΔAEB，ΔBFC，ΔCGD，ΔDHA）的面积和（图 2）（因此 p_1+p_2 就是内接正八边形的面积）；p_3 是（图 3）八个三角形（ΔAIE；ΔEJB，ΔBKF，…，ΔHLA）的面积和（因此 $p_1+p_2+p_3$ 就是内接正十六边形的面积），依此类推。

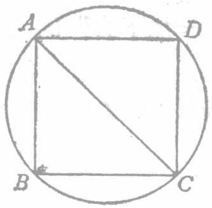

图 1

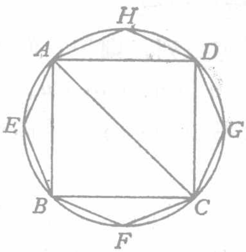

图 2

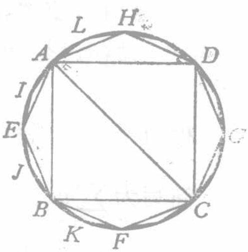

图 3

无限小数$\sqrt{2}=1.4142\cdots$ 可以写成

$$\sqrt{2}=1+\frac{4}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\frac{2}{10^4}+\cdots \qquad (2)$$

在物理学中，常常把一个复杂波$f(t)$分解为无限多个简谐波的迭加

$$f(t)=A_0+A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)+\cdots+A_n\sin(\omega_n t+\varphi_n)+\cdots \qquad (3)$$

这里，(1),(2),(3)式右端的求和都是无穷项求和。这种无穷项求和的式子，在数学中就称为无穷级数，或简称为级数。(1),(2)式右端求和中的每项都是一个常数，这种级数称为常数项级数（或数项级数，数值级数）；(3)式右端和式中的每项都是一个函数，称为函数项级数，或称函数级数。

在这一篇里，先讲数项级数，后讲函数项级数，最后讲幂级数和三角级数（付立叶级数）。

第一章　数项级数

§1　收敛、发散概念和柯西收敛准则

1.1　收敛、发散概念

设$\{u_n\}$是一无穷数列，则把它们“逐一加下去”的式子

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \qquad (1.1)$$

称为一数项级数（数值级数），或简称为级数。(1.1)式也可简写为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$。

数u_n称为级数(1.1)的第n项，也叫做级数(1.1)的一般项。称数

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

为级数(1.1)的(前 n 项的)部分和；称数列

$$s_1, s_2, \cdots s_n, \cdots \qquad (1.2)$$

为级数(1.1)的部分和数列，简记成$\{s_n\}$

定义1.1 若级数(1.1)的部分和数列$\{s_n\}$的极限存在，即

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

则称级数(1.1)是收敛的；否则，称级数(1.1)是发散的。

若级数(1.1)收敛，则把它的部分和数列$\{s_n\}$的极限 s，称为它的和数，记成

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = s$$

即

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n \to \infty} s_n = s$$

一个级数只在它收敛时，才象有限和一样具有一个唯一确定的和数。级数的和数与一般和数的区别只在于被加项的个数是无限的。这是级数理论的基本出发点。

例1.1 根据等比级数(几何级数)的求和公式，等比级数

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \qquad (1.3)$$

的前 n 项和为

$$s_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

由此即见：

1) 当 $|r| < 1$ 时，有 $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \dfrac{a}{1-r}$；

2) 当 $|r| > 1$时，有 $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \infty$；

3） 当 $r=1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}na=\infty$；

4） 当 $r=-1$ 时，级数(1.3)就是

$$a+(-a)+a+\cdots+(-1)^n a+\cdots$$

它的部分和

$$s_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数}\\ a, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 不存在。

从上面的讨论可知，等比级数(1.3)，当且仅当 $|r|<1$ 时收敛。

例1.2 证明数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$$

收敛，且其和为 1。

证 因为

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

所以

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}s_n=1$$

即

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$$

例1.3 证明级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \qquad (1.4)$$

发散。

证 若记$s_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，则得级数(1.4)的部分和数列$\{s_n\}$。

对任何自然数n,m，显然有

$$\left|s_{n+m}-s_n\right|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+m}>\frac{m}{n+m}$$

于是不管n多大，总有

$$\left|s_{n+n}-s_n\right|>\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2}$$

根据数列极限的柯西收敛准则知，数列$\{s_n\}$不收敛，因此级敛(1.4)发散。

级数(1.4)称为调和级数，它是一个具有典型意义的发散级数，在正项级数的研究中，它起着重要的作用。

1.2 收敛级数的基本性质及其运算

命题1.1 若级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

收敛，则它的一般项u_n，当$n\to\infty$时以零为极限，即

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0$$

证 根据假设，级数的部分和数列$\{s_n\}$收敛。设

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}s_{n-1}=s-s=0$$

例1.4 如果一级数的一般项不满足条件$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，那么根据命题1.1就知这个级数是发散的。比如级数