

高等数学

(第三册)

欧维义 陈维钧 金德俊 编

吉林大学出版社

高等数学

第三册

欧维义 陈维钧 金德俊 编

吉林大学出版社

高 等 数 学

(第三册)

欧维义 陈维钧 金德俊 编

吉林大学出版社出版 吉林大学印刷厂印刷

吉林省新华书店发行

850×1168 大32开 12.5印张 310,000字

1987年5月第1版 1987年5月第1次印刷

印数：1-8500册

ISBN 7-5601-0015-5/O·2

统一书号：13323·21 定价：2.40元

出版说明

根据教学需要，我们出版了这套《吉林大学本科
生教材》，这套教材适合高等学校本科生基础课或选
修课的教学，由我社逐年陆续出版。

吉林大学出版社

序

《高等数学》一书共四册。第一册讲一元微积分和空间解析几何；第二册讲多元微积分和场的数学描写方法；第三册讲级数和常微分方程；第四册讲线性代数。

本教材在课程结构上，我们加强了那些有较深远影响的基本概念、理论和方法（如极限概念、中值定理、泰勒公式、微元法、场的数学描写方法和级数理论等等）。

在应用方面，我们注重物理、力学对数学的渗透，并尽可能地使学生获得应用方面的信息。

在培养能力方面，关键是培养学生有效地使用数学工具。为达到这个目的，重要的途径是解题。多解题才能培养学生的运算能力、抽象思维能力和解决实际问题的能力。为此，在本教材各节之后，多数都配备了A、B、C三类习题。一般说，A类题是理解和消化所学内容的基本题；B类题是体现课程要求的中档题；C类题则是培养学生思维能力、综合能力和技巧的选作题。

总之，本教材在加强基础、培养能力方面都做了一些新的探索。希望在同样的教学时间内，获得更好的教学效果。

在编写教材的过程中，得到我们的老师江泽坚教授、李荣华教授、吴智泉教授的指导和帮助；得到赵为礼、王毅、潘吉勋、宋玉琦等同志的帮助。在此，谨向他们致以谢意。

由于编者水平有限，错误和不妥之处，敬请读者指正和批评。

编 者

1986年4月于吉林大学

目 录

第一篇 无穷级数	(1)
第一章 数项级数	(2)
§ 1 收敛、发散概念和柯西收敛准则	(2)
1.1 收敛、发散概念	(2)
1.2 收敛级数的基本性质及其运算	(5)
1.3 柯西收敛准则及其推论	(7)
§ 2 正项级数的敛散性判别	(11)
2.1 比较原理	(11)
2.2 积分判别法	(15)
2.3 达朗贝尔判别法和柯西判别法	(17)
§ 3 任意项级数的敛散性判别	(24)
3.1 阿贝尔变换和引理	(24)
3.2 阿贝尔判别法和狄利克来判别法	(26)
3.3 绝对收敛与条件收敛	(30)
§ 4 级数的运算性质	(34)
4.1 级数的重排	(34)
4.2 级数的结合律	(35)
4.3 级数的乘法	(36)
第二章 函数级数	(39)
§ 1 收敛域与和函数	(39)
1.1 收敛域	(39)
1.2 和函数	(41)
1.3 收敛域的逐点判别定理	(41)
§ 2 函数级数的一致收敛	(42)
2.1 一致收敛	(43)

2.2	一致收敛的判别法	(45)
2.3	内部一致收敛	(51)
§ 3	和函数的性质	(54)
3.1	和函数的连续性	(55)
3.2	逐项积分性质	(56)
3.3	逐项微商定理	(57)
第三章	幂级数	(59)
§ 1	收敛域结构及其求法	(59)
1.1	收敛域的结构	(59)
1.2	收敛半径的求法	(61)
1.3	幂级数的运算性质	(65)
§ 2	和函数的性质	(70)
2.1	逐项求导级数的收敛半径	(70)
2.2	内部一致收敛性	(71)
2.3	和函数的性质	(72)
2.4	在 $x = x_0$ 点的幂级数	(74)
§ 3	初等函数的幂级数表示	(77)
3.1	必要条件	(78)
3.2	充分条件	(80)
3.3	初等函数在 $x = 0$ 点的泰勒展式	(81)
3.4	在 $x = x_0$ 点的泰勒展开	(86)
第四章	付立叶级数	(90)
§ 1	形式付立叶级数	(90)
1.1	三角函数系及其直交性	(90)
1.2	付立叶系数	(92)
1.3	形式付立叶级数	(93)
1.4	贝塞尔不等式和黎曼引理	(96)
§ 2	收敛定理	(98)
2.1	引理和命题	(98)

2.2	收敛定理	(105)
2.3	付立叶级数的指数形式	(113)
§ 3	付立叶级数的逐项积分和逐项微商	(117)
3.1	一致收敛定理	(117)
3.2	逐项积分定理	(120)
3.3	逐项微商定理	(121)
§ 4	一般区间上的结论	(125)
4.1	收敛定理及其推论	(125)
4.2	微分法	(128)
§ 5	付立叶积分公式	(132)
5.1	形式公式	(132)
5.2	基本引理	(134)
5.3	付立叶积分公式	(135)
§ 6	二重付立叶级数	(139)
6.1	收敛定理	(139)
6.2	推论	(141)
§ 7	狄利克来收敛定理	(143)
7.1	第二中值定理	(143)
7.2	狄利克来引理	(146)
7.3	狄利克来收敛定理	(149)
§ 8	广义付立叶级数	(150)
8.1	内积概念和基本不等式	(150)
8.2	正交归一化系	(151)
8.3	广义付立叶级数及其收敛概念	(152)
8.4	完全系统的概念及其判别	(154)
第二篇 常微分方程		(156)
第五章 常微分方程中的名词和概念		(156)
§ 1	实际问题中的微分方程	(156)
1.1	什么是微分方程	(156)

1.2	实际问题中的微分方程	(157)
§ 2	微分方程中的名称	(160)
2.1	微分方程的阶	(160)
2.2	线性方程和非线性方程	(161)
§ 3	微分方程的解	(162)
3.1	微分方程的解	(162)
3.2	微分方程的通解	(163)
3.3	定解问题的解	(164)
3.4	方向场的概念和解的几何解释	(165)
3.5	定解问题的研究课题	(167)
第六章	一阶微分方程的初等解法	(170)
§ 1	可分离变量的方程	(170)
1.1	可分离变量的方程	(170)
1.2	齐次方程	(171)
1.3	准齐次方程	(173)
§ 2	一阶线性方程	(177)
2.1	齐次线性方程	(178)
2.2	非齐次线性方程	(178)
2.3	伯努利方程	(181)
§ 3	恰当方程和积分因子	(186)
3.1	恰当方程的概念	(186)
3.2	恰当方程的判别	(186)
3.3	积分因子的概念	(191)
3.4	积分因子的求法	(192)
§ 4	一阶隐式方程	(199)
4.1	参数形式的解	(199)
4.2	方程 $y = f(x, y')$	(200)
4.3	方程 $x = f(y, y')$	(202)
§ 5	解题的灵活性和应用举例	(204)

5.1	解题的灵活性	(204)
5.2	应用举例	(209)
第七章	高阶方程和方程组的解法	(218)
§ 1	特殊的非线性高阶方程的解法	(218)
1.1	$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ 型的方程	(218)
1.2	$y'' = f(x, y')$ 型的方程	(220)
1.3	$y'' = f(y, y')$	(221)
1.4	解题的灵活性	(222)
§ 2	二阶线性方程的解法	(227)
2.1	通解的结构定理	(227)
2.2	置换法和视常数为变数法	(228)
2.3	常数系数齐次线性方程的通解	(231)
2.4	待定系数法	(234)
2.5	幂级数解法	(241)
§ 3	方程组的初等积分法	(245)
3.1	方程组的概念	(245)
3.2	方程组的名词	(245)
3.3	解方程组的消元法	(248)
3.4	解方程组的首次积分法	(249)
§ 4	应用举例	(255)
4.1	方程式的应用例题	(255)
4.2	方程组的应用例题	(261)
第八章	高阶线性方程	(272)
§ 1	函数间的线性关系	(272)
1.1	函数的线性相关和线性无关概念	(272)
1.2	相关性的判别	(273)
§ 2	解的存在与唯一性定理	(275)
2.1	迭加原理	(275)

2.2	解的存在与唯一性定理	(277)
2.3	解组的线性关系的判别	(277)
§ 3	通解的结构定理	(280)
3.1	齐次方程通解的结构定理	(280)
3.2	非齐次方程通解的结构定理	(281)
§ 4	高阶线性方程的解法	(283)
4.1	常系数齐次方程的基本解组	(283)
4.2	欧拉 (Euler) 方程	(286)
4.3	解非齐次方程的待定系数法	(288)
第九章	一阶线性方程组	(294)
§ 1	解的存在与唯一性定理	(294)
1.1	迭加原理	(294)
1.2	解的存在与唯一性定理	(296)
1.3	解组的线性关系的判别	(297)
§ 2	解的结构定理	(300)
2.1	齐次线性方程组通解的结构	(300)
2.2	非齐次线性方程组通解的结构	(302)
§ 3	一阶线性方程组的解法	(303)
3.1	常系数方程组的基本解组	(303)
3.2	视常数为变数法	(309)
3.3	待定系数法	(311)
第十章	解的存在与唯一性定理	(318)
§ 1	一阶方程解的存在与唯一性定理	(318)
1.1	李普希茨条件	(318)
1.2	正规形方程解的存在与唯一性定理	(318)
1.3	用逐步逼近法求近似解	(322)
1.4	一阶隐式方程解的存在与唯一性定理	(323)
§ 2	方程组解的存在与唯一性定理	(325)
2.1	李普希茨条件	(325)

2.2	一阶方程组的存在与唯一性定理	(326)
2.3	一阶线性方程组存在与唯一性定理	(327)
§ 3	高阶方程式解的存在与唯一性定理	(328)
3.1	基本引理	(328)
3.2	存在与唯一性定理	(330)
§ 4	奇解	(331)
4.1	奇解的概念	(331)
4.2	奇解的求法	(333)
第十一章	一阶偏微分方程	(342)
§ 1	名称和基本概念	(342)
1.1	一阶偏微分方程	(342)
1.2	通解和特解	(343)
§ 2	一阶线性齐次方程	(344)
2.1	特征方程组	(344)
2.2	首次积分与通解	(346)
2.3	多个自变量的线性齐次方程	(350)
§ 3	一阶拟线性方程	(352)
3.1	拟线性方程解法	(352)
3.2	初值问题的解法	(354)
	答案与提示	(359)

第一篇 无穷级数

无穷级数是数学分析的一个分支。它与微积分一起构成数学分析的两个基础分支，二者共同以极限为基本工具，分别从连续与离散两个方面，结合起来研究函数及其应用。

无穷级数，第一是研究无穷项的求和与分解；第二是研究无穷和保存着有限和的哪些性质，或者说有限和的一些性质在什么条件下能够传递给无穷和。这里，一个是收敛问题，一个是性质问题，就是级数研究中的两个基本问题。

无穷求和与分解来自实践。比如，单位圆域 K_1 的面积 s ，可以表成

$$s = p_1 + p_2 + \cdots + p_n + \cdots \quad (1)$$

其中 p_1 是 K_1 的内接正四边形 $ABCD$ 的面积 (图 1)； p_2 是弧 \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CD} , \widehat{DA} 的中点 E, F, G, H 与 A, B, C, D 的连线而成的四个三角形 ($\triangle AEB, \triangle BFC, \triangle CGD, \triangle DHA$) 的面积和 (图 2) (因此 $p_1 + p_2$ 就是内接正八边形的面积)； p_3 是 (图 3) 八个三角形 ($\triangle AIE, \triangle EJB, \triangle BKF, \dots, \triangle HLA$) 的面积和 (因此 $p_1 + p_2 + p_3$ 就是内接正十六边形的面积)，依此类推。

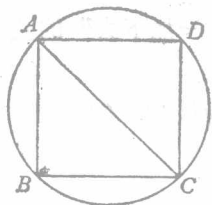


图 1

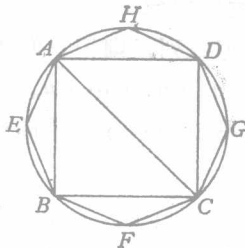


图 2

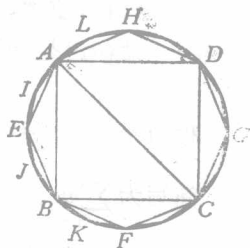


图 3

无限小数 $\sqrt{2} = 1.4142\dots$ 可以写成

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \dots \quad (2)$$

在物理学中，常常把一个复杂波 $f(t)$ 分解为无限多个简谐波的迭加

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots + A_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) + \dots \quad (3)$$

这里，(1),(2),(3)式右端的求和都是无穷项求和。这种无穷项求和的式子，在数学中就称为无穷级数，或简称为级数。(1),(2)式右端求和中的每项都是一个常数，这种级数称为常数项级数（或数项级数，数值级数）；(3)式右端和式中的每项都是一个函数，称为函数项级数，或称函数级数。

在这一篇里，先讲数项级数，后讲函数项级数，最后讲幂级数和三角级数（付立叶级数）。

第一章 数项级数

§1 收敛、发散概念和柯西收敛准则

1.1 收敛、发散概念

设 $\{u_n\}$ 是一无穷数列，则把它们“逐一加下去”的式子

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1.1)$$

称为一数项级数（数值级数），或简称为级数。(1.1)式也可

简写为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 。

数 u_n 称为级数(1.1)的第 n 项，也叫做级数(1.1)的一般项。称数

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

为级数(1.1)的(前 n 项的)部分和;称数列

$$s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots \quad (1.2)$$

为级数(1.1)的部分和数列, 简记成 $\{s_n\}$

定义1.1 若级数(1.1)的部分和数列 $\{s_n\}$ 的极限存在, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

则称级数(1.1)是收敛的; 否则, 称级数(1.1)是发散的。

若级数(1.1)收敛, 则把它的部分和数列 $\{s_n\}$ 的极限 s , 称为它的和数, 记成

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = s$$

即

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

一个级数只在它收敛时, 才象有限和一样具有一个唯一确定的和数。级数的和数与一般和数的区别只在于被加项的个数是无限的。这是级数理论的基本出发点。

例1.1 根据等比级数(几何级数)的求和公式, 等比级数

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \quad (1.3)$$

的前 n 项和为

$$s_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

由此即见:

- 1) 当 $|r| < 1$ 时, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1 - r}$;
- 2) 当 $|r| > 1$ 时, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$;

3) 当 $r=1$ 时, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty$;

4) 当 $r=-1$ 时, 级数(1.3)就是

$$a + (-a) + a + \cdots + (-1)^n a + \cdots$$

它的部分和

$$s_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ a, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 不存在。

从上面的讨论可知, 等比级数(1.3), 当且仅当 $|r| < 1$ 时收敛。

例1.2 证明数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

收敛, 且其和为 1。

证 因为

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

所以

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$$

即

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

例1.3 证明级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \quad (1.4)$$

发散。

证 若记 $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ ，则得级数(1.4)的部分和数列 $\{s_n\}$ 。

对任何自然数 n, m ，显然有

$$|s_{n+m} - s_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+m} > \frac{m}{n+m}$$

于是不管 n 多大，总有

$$|s_{n+n} - s_n| > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2}$$

根据数列极限的柯西收敛准则知，数列 $\{s_n\}$ 不收敛，因此级数(1.4)发散。

级数(1.4)称为调和级数，它是一个具有典型意义的发散级数，在正项级数的研究中，它起着重要的作用。

1.2 收敛级数的基本性质及其运算

命题1.1 若级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

收敛，则它的一般项 u_n ，当 $n \rightarrow \infty$ 时以零为极限，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

证 根据假设，级数的部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛。设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

例1.4 如果一级数的一般项不满足条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ，那么根据命题 1.1 就知这个级数是发散的。比如级数